通州区 2023-2024 学年第一学期高三年级期中质量检测

数学参考答案及评分标准

2023 年 11 月

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

题号	（1）	（2）	（3）	（4）	（5）	（6）	（7）	（8）	（9）	（10）
答案	B	C	D	B	C	B	A	C	A	C

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

（11）$\{x|x>-2, 且 x\neq 0\}$　（12）$(-2)^{n-1}$；171　（13）$a=-3$，$b=3$（答案不唯一）

（14）2；24　（15）②④

三、解答题（共 6 小题，共 85 分）

（16）（本小题 13 分）

解：（Ⅰ）因为 $a=2$，所以 $f(x)=x^2-2x+1$.

所以 $f(x)$ 的图象开口向上，且对称轴 $x=1$.　……………………2 分

所以 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上单调递减，在区间 $[1,3]$ 上单调递增.　……………………3 分

所以 $f(x)$ 在区间 $[0,3]$ 上的最小值是 $f(1)=0$.　……………………4 分

因为 $f(0)=1$，$f(3)=4$，　……………………5 分

所以 $f(x)$ 在区间 $[0,3]$ 上的最大值是 4.　……………………6 分

所以 $f(x)$ 的值域为 $[0,4]$.　……………………7 分

（Ⅱ）因为 $f(x)$ 有两个零点，分别为 x_1，x_2，

所以方程 $f(x)=0$ 有两个不相等的实数根.　……………………8 分

所以 $\Delta=(-a)^2-4\times1\times(-a+3)=a^2+4a-12>0$.

所以 $a<-6$，或 $a>2$.　……………………10 分

因为 $x_1x_2>0$，所以 $-a+3>0$.

所以 $a<3$.　……………………12 分

综上 $a<-6$，或 $2<a<3$.

所以 a 的取值范围是 $(-\infty,-6)\cup(2,3)$.　　……………………13 分

（17）（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）因为 $f(x)=2\sqrt{3}\sin x\cos x-2\sin^2 x+1=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x$

$$=2\sin(2x+\frac{\pi}{6}).$$　　……………………3 分

所以 $f(\frac{5\pi}{4})=2\sin(\frac{5\pi}{2}+\frac{\pi}{6})=2\sin(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6})=2\cos\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}$.　　……………………5 分

（Ⅱ）因为 $f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$，

所以 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$；　　……………………7 分

由 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in Z$，得 $[-\frac{\pi}{3}+k\pi,\frac{\pi}{6}+k\pi]$，$k\in Z$.

由 $\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi$，$k\in Z$，得 $[\frac{\pi}{6}+k\pi,\frac{2\pi}{3}+k\pi]$，$k\in Z$.

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[-\frac{\pi}{3}+k\pi,\frac{\pi}{6}+k\pi]$，$k\in Z$；单调递减区间为 $[\frac{\pi}{6}+k\pi,\frac{2\pi}{3}+k\pi]$，$k\in Z$.

……………………9 分

（Ⅲ）因为 $f(x)$ 的最小正周期为 π，

所以 $f(\frac{7\pi}{8})=f(\frac{7\pi}{8}-\pi)=f(-\frac{\pi}{8})$.　　……………………10 分

因为 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}]$ 上单调递增，　　……………………12 分

所以 $f(-\frac{\pi}{5})<f(-\frac{\pi}{8})$.　　……………………13 分

所以 $f(-\frac{\pi}{5})<f(\frac{7\pi}{8})$.　　……………………14 分

（18）（本小题 13 分）

解：（Ⅰ）若选条件①：$\cos A=\frac{2\sqrt{7}}{7}$，$a=2$，$B=\frac{\pi}{3}$，

所以 $\sin A=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$，由正弦定理得：$\dfrac{2}{\frac{\sqrt{21}}{7}}=\dfrac{b}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$，

所以 $b=\sqrt{7}$．

所以 $\cos C=-\cos(A+B)=\sin A\sin B-\cos A\cos B$

$$=\frac{\sqrt{21}}{7}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{2\sqrt{7}}{7}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{7}}{14}.$$

由余弦定理得 $c^2=4+7-2\times2\times\sqrt{7}\times\dfrac{\sqrt{7}}{14}$．

所以 $c^2=9$．

因为 $c>0$，

所以 $c=3$． ……………………9 分

若选条件②，则 $a=\sqrt{2}$，$B=\dfrac{\pi}{3}$，$b=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$．

由正弦定理得 $\dfrac{2}{\sin A}=\dfrac{\frac{\sqrt{7}}{2}}{\sin\frac{\pi}{3}}$，所以 $\sin A=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$．

因为 $B=\dfrac{\pi}{3}$，所以 $A\in(0,\dfrac{2\pi}{3})$，而 $\sin A=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}>\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $\sin A=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ 在 $(0,\dfrac{2\pi}{3})$ 上有两根，$\triangle ABC$ 不唯一．

若选条件③，$b=\sqrt{7}$，$a=2$，$B=\dfrac{\pi}{3}$，

由余弦定理得 $7=4+c^2-2\times2\cdot c\cdot\dfrac{1}{2}$，

所以 $c=3$，或 $c=-1$（舍）． ……………………9 分

（Ⅱ）因为 $a=2$，$B=\dfrac{\pi}{3}$，$c=3$，

所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}\times2\times3\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{2\sqrt{3}}{2}$． ……………………13 分

（19）（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）因为 $f(x)=e^{2x}-2x$，

所以 $f'(x)=2e^{2x}-2$.

所以 $f(0)=1$, $f'(0)=0$.

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y-1=0$. ……………………4 分

（II）因为 $f(x)=e^{2x}-2x$，定义域为 $\mathbf{R}$，

所以 $f'(x)=2e^{2x}-2$.

令 $f'(x)=0$，即 $2e^{2x}-2=0$，解得 $x=0$.

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表所示.

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	单调递减	1	单调递增

所以当 $x=0$ 时，$f(x)$ 有极小值，且极小值为 $f(0)=1$，无极大值. ……………………8 分

（III）因为对于任意 $x\in\mathbf{R}$，不等式 $f(x)>2(e-1)x+m$ 恒成立，

即对于任意 $x\in\mathbf{R}$，不等式 $m<e^{2x}-2ex$ 恒成立.

设 $g(x)=e^{2x}-2ex$，$x\in(-\infty,+\infty)$，

所以 $g'(x)=2e^{2x}-2e$.

令 $g'(x)<0$，得 $x<\frac{1}{2}$；令 $g'(x)>0$，得 $x>\frac{1}{2}$.

所以 $g(x)$ 在区间 $(-\infty,\frac{1}{2})$ 上单调递减，在区间 $(\frac{1}{2},+\infty)$ 上单调递增.

所以 $g(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的最小值为 $g(\frac{1}{2})=0$.

所以 $m<0$.

所以实数 m 的取值范围为 $(-\infty,0)$. ……………………14 分

（20）（本小题 16 分）

解：（Ⅰ）因为函数 $f(x)=\dfrac{e^x-2}{x}$，

所以 $f'(x)=\dfrac{e^x(x-1)+2}{x^2}$.

所以 $f'(1)=2$. ……………………3 分

（Ⅱ）因为 $g(x)=a\ln x-\dfrac{1}{x}$，定义域是 $(0,+\infty)$，

所以 $g'(x)=\dfrac{a}{x}+\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{ax+1}{x^2}$.

（1）当 $a\geqslant 0$ 时，$ax+1>0$，即 $\dfrac{ax+1}{x^2}>0$，则 $g'(x)>0$.

所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，即 $g(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上单调递增.

所以 $g(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上的最大值为 $g(2)=a\ln 2-\dfrac{1}{2}$.

（2）当 $a<0$ 时，令 $g'(x)<0$，得 $x>-\dfrac{1}{a}$；令 $g'(x)>0$，得 $0<x<-\dfrac{1}{a}$.

所以 $g(x)$ 在 $(0,-\dfrac{1}{a})$ 上单调递增，在 $(-\dfrac{1}{a},+\infty)$ 上单调递减.

①当 $-\dfrac{1}{a}\leqslant 1$，即 $a\leqslant -1$ 时，$g(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上单调递减.

所以 $g(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上的最大值为 $g(1)=-1$.

②当 $-\dfrac{1}{a}\geqslant 2$，即 $a\geqslant -\dfrac{1}{2}$ 时，$g(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上单调递增.

所以 $g(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上的最大值为 $g(2)=a\ln 2-\dfrac{1}{2}$.

③当 $1<-\dfrac{1}{a}<2$，即 $-1<a<-\dfrac{1}{2}$ 时，$g(x)$ 在 $[1,-\dfrac{1}{a})$ 上单调递增，在 $(-\dfrac{1}{a},2]$ 上单调递减.

所以 $g(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上的最大值为 $g(-\dfrac{1}{a})=a\ln(-\dfrac{1}{a})+a$.

综上所述，当 $a\leqslant -1$ 时，$g(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上的最大值为 -1；当 $-1<a<-\dfrac{1}{2}$ 时，$g(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上的最大值为 $a\ln(-\dfrac{1}{a})+a$；当 $a\geqslant -\dfrac{1}{2}$ 时，$g(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上的最大值为 $a\ln 2-\dfrac{1}{2}$.

……………………9 分

（Ⅲ）证明：当 $a=1$ 时，$g(x)=\ln x-\dfrac{1}{x}$.

要证 $f(x)>g(x)-\dfrac{\cos x}{x}$，即证 $\dfrac{e^x-2}{x}>\ln x-\dfrac{1}{x}-\dfrac{\cos x}{x}$.

所以 $a_n-a_1\geqslant nt-t>nt$.

所以存在 t（$t\in\mathbf{R}$），使得 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，$a_n-a_1>nt$ 成立. ……………………10 分

（II）因为 $a_{n+1}-a_n\geqslant a_n-a_{n-1}$，$n\in\mathbf{N}^*$，且 $n\geqslant 2$，

所以 $(n-1)(a_{n+1}-a_n)\geqslant a_n-a_1$，$(n-2)(a_{n+1}-a_n)\geqslant a_n-a_2$，$(n-3)(a_{n+1}-a_n)\geqslant a_n-a_3$，…，

$0a_{n+1}=a_n-a_n$，其中 $n\in\mathbf{N}^*$.

所以 $(n-1)a_{n+1}\geqslant na_n-a_1$，$(n-2)a_{n+1}\geqslant(n-1)a_n-a_2$，$(n-3)a_{n+1}\geqslant(n-2)a_n-a_3$，…，$0a_{n+1}=a_n-a_n$.

所以 $[(n-1)+(n-2)+(n-3)+\cdots+0]a_{n+1}\geqslant[n+(n-1)+(n-2)+\cdots+1]a_n-[a_1+a_2+a_3+\cdots a_n]$.

所以 $\dfrac{n(n-1)}{2}a_{n+1}\geqslant\dfrac{n(n+1)}{2}a_n-S_n$.

所以 $2S_n\geqslant(n^2+n)a_n-(n^2-n)a_{n+1}$. ……………………15 分

化简得 $x\ln x < \mathrm{e}^x + \cos x - 1$.

（1）当 $0 < x \leqslant 1$ 时，$x\ln x \leqslant 0$，$\mathrm{e}^x + \cos x - 1 > 1 + \cos 1 - 1 = \cos 1 > 0$，

所以 $x\ln x < \mathrm{e}^x + \cos x - 1$ 成立，即 $f(x) - g(x) > \dfrac{\cos x}{x}$ 成立.

（2）当 $x > 1$ 时，设函数 $F(x) = \mathrm{e}^x + \cos x - x\ln x - 1(x > 1)$，

所以 $F'(x) = \mathrm{e}^x - \sin x - \ln x - 1$.

设函数 $G(x) = \mathrm{e}^x - \sin x - \ln x - 1(x > 1)$，

所以 $G'(x) = \mathrm{e}^x - \cos x - \dfrac{1}{x}$.

因为 $x > 1$，所以 $G'(x) = \mathrm{e}^x - \cos x - \dfrac{1}{x} > \mathrm{e} - 1 - 1 > 0$.

所以当 $x > 1$ 时，$G(x)$ 单调递增，

所以 $G(x) > \mathrm{e} - \sin 1 - 1 > 0$，即 $F'(x) > 0$.

所以 $F(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增.

所以 $F(x) > \mathrm{e} + \cos 1 - 1 > 0$，即 $\mathrm{e}^x + \cos x - x\ln x - 1 > 0$.

所以对任意 $x \in (0, +\infty)$，恒有 $f(x) > g(x) - \dfrac{\cos x}{x}$ 成立. ……………………16 分

（21）（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）（i）2，1，$\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{4}$.（答案不唯一） ……………………4 分

（ii）证明：因为 $a_{n-1} + a_{n+1} \geqslant 2a_n$，

所以 $a_{n+1} - a_n \geqslant a_n - a_{n-1}$.

设 $a_2 - a_1 = t$，

所以 $a_3 - a_2 \geqslant a_2 - a_1 = t$，$a_4 - a_3 \geqslant a_3 - a_2 \geqslant t$，…，$a_n - a_{n-1} \geqslant a_{n-1} - a_{n-2} \geqslant t$.

所以 $a_n - a_1 \geqslant (n-1)t$.

所以 $a_n - a_1 \geq nt - t$.

因为 $a_1 > a_2$，所以 $a_2 - a_1 = t < 0$.

北京高一高二高三期中试题下载

京考一点通团队整理了【**2023 年 10-11 月北京各区各年级期中试题&答案汇总**】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期中**】或者点击公众号底部栏目<**试题专区**>，进入各年级汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！