2023 北京十二中高二（下）期末

数　　学

考生须知

1．本试卷共 4 页，分为三部分．总分 150 分．考试时间 120 分钟．

2．将选择题答案填涂在答题卡上，第二部分必须用黑色字迹的签字笔作答在答题卡上，在试卷上作答无效．

3．考试结束时，收答题卡．

第一部分　选择题（共 60 分）

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 已知集合 $A=\{x|x-2\geq 0\}$，$B=\{1,2,3\}$，则 $A\cap B=$（　）

A. $\{1\}$　　B. $\{2\}$　　C. $\{3\}$　　D. $\{2,3\}$

2. 由数字 1，2，3 组成的三位数中，至少有两位数字相同的三位数的个数为（　）

A. 21　　B. 18　　C. 15　　D. 12

3. 已知数列 $\{a_n\}$ 是递增的等比数列, 且 $a_1+a_4=9$, $a_2a_3=8$,则数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为（　）

A. 2^n-1　　B. $16\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$

C. $2^{n-1}-1$　　D. $16\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]$

4. 马老师从课本上抄录一个随机变量 X 的概率分布律如下表

X	1	2	3
P	?	!	?

尽管“！”处无法完全看清，且两个“？”处字迹模糊，但能肯定这两个“？”处的数值相同．据此求 $E(X)$ 的结果为（　）

A. 1.5　　B. 2　　C. 2.5　　D. 不确定

5. 若函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+ax+4$ 在区间(0，4)上不单调，则实数 a 的取值范围为（　）

A. $\left[-4,\frac{9}{4}\right)$　　B. $\left[0,\frac{9}{4}\right]$　　C. $\left(-4,\frac{9}{4}\right)$　　D. $\left(0,\frac{9}{4}\right)$

6. 中国历法推测遵循以测为辅，以算为主的原则.例如《周髀算经》里对二十四节气的晷影长的记录中，冬

至和夏至的晷影长是实测得到的，其它节气的晷影长则是按照等差数列的规律计算得出的.二十四节气中，从冬至到夏至的十三个节气依次为：冬至、小寒、大寒、立春、雨水、惊蛰、春分、清明、谷雨、立夏、小满、芒种、夏至. 已知《周髀算经》中记录某年的冬至的晷影长为 13 尺，夏至的晷影长是 1.48 尺，按照上述规律，那么《周髀算经》中所记录的立夏的晷影长应为（　）

A. 3.4 尺　　B. 4.36 尺　　C. 5.32 尺　　D. 21.64 尺

7. 已知函数 $f\left(x\right)=\ln x-x+m$，若存在 $x\in\left[\frac{1}{e},e\right]$，使 $f\left(x\right)\le 0$，则 m 的取值范围是（　）

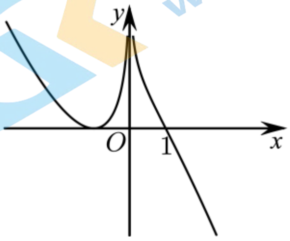
A. $\left(-\infty,1\right]$　　B. $\left(-\infty,1+\frac{1}{e}\right]$

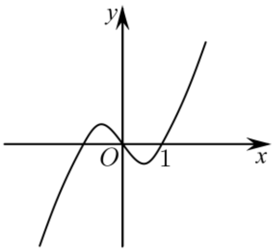
C. $\left(-\infty,e-1\right]$　　D. $\left(-\infty,e\right]$

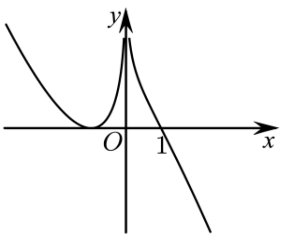
8. 某 4 位同学排成一排准备照相时，又来了 2 位同学要加入，如果保持原来 4 位同学的相对顺序不变，则不同的加入方法种数为（　）

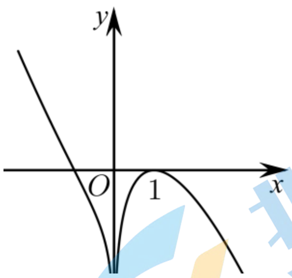
A. 10　　B. 20　　C. 24　　D. 30

9. 函数 $f\left(x\right)=\left(x-1\right)\ln\left|x\right|$ 的图象可能为（　）

A.


B.


C.


D.


10. 某企业拟定 4 种改革方案，经统计它们在该企业的支持率分别为 $p_1=0.9$，$p_2=0.75$，$p_3=0.3$，$p_4=0.2$，用“$\xi_i=1$”表示员工支持第 i 种方案，用“$\xi_i=0$”表示员工不支持第 i 种方案$\left(i=1,2,3,4\right)$，那么方差 $D\left(\xi_1\right)$，$D\left(\xi_2\right)$，$D\left(\xi_3\right)$，$D\left(\xi_4\right)$的大小关系为（　）

A. $D\left(\xi_1\right)<D\left(\xi_2\right)<D\left(\xi_3\right)<D\left(\xi_4\right)$

B. $D\left(\xi_4\right)<D\left(\xi_3\right)<D\left(\xi_2\right)<D\left(\xi_1\right)$

C. $D\left(\xi_2\right)<D\left(\xi_3\right)<D\left(\xi_1\right)<D\left(\xi_4\right)$

D. $D\left(\xi_1\right)<D\left(\xi_4\right)<D\left(\xi_2\right)<D\left(\xi_3\right)$

11. 若 a、b 为实数，则“$0<ab<1$”是“$a<\frac{1}{b}$ 或 $b>\frac{1}{a}$”的（　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

12. 已知项数为 $k\left(k\in\mathbf{N}^*\right)$ 的等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$\frac{1}{4}a_{n-1}\le a_n\left(n=2,3,\cdots,k\right)$．若 $a_1+a_2+\cdots+a_k=8$，则 k 的最大值是（　）

A. 14　　B. 15　　C. 16　　D. 17

第二部分　非选择题（共 90 分）

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．

13. 如表定义函数 $f\left(x\right)$：

x	1	2	3	4	5
$f\left(x\right)$	5	4	3	1	2

对于数列 $\{a_n\}$，$a_1=4$，$a_n=f\left(a_{n-1}\right)$，$n$=2，3，4，…，则 $a_{2023}=$______．

14. 4 封信随机投入 A，B，C 三个空邮箱，则邮箱 A 的信件数 X 的数学期望 $E\left(X\right)=$______．

15. 已知数列 $\{a_n\}$ 为等比数列，S_n 是它的前 n 项和．若 $a_2\cdot a_3=2a_1$，且 a_4 与 $2a_7$ 的等差中项为 $\frac{5}{4}$，则 S_5 等于 ________．

16. 过点 $P\left(0,2\right)$ 作曲线 $f\left(x\right)=x+\frac{2}{x}$ 的切线 l，则 l 的方程为______．

17. 5 个相同的篮球，分给甲、乙、丙三位同学，不同分法的总数为______．

18. 已知函数 $f\left(x\right)=x^2+a\ln x-2x$，有下列四个结论：

①当 $a\ge 0$ 时，$y=f\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上为增函数；

②当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，$y=f\left(x\right)$ 存在两个极值点；

③当 $a\le 0$ 时，$y=f\left(x\right)$ 存在极大值；

④若函数存在两个不同的极值点 x_1，x_2，则 $f\left(2x_1x_2\right)$ 的最大值恒为负．

其中所有正确结论的序号是______．

三、解答题：本大题共 5 小题，共 60 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

19. 已知函数 $f\left(x\right)=x^3+2x^2-4x+1$．

（1）求 $f\left(x\right)$ 的单调区间；

（2）求 $f\left(x\right)$ 在 $\left[-3,1\right]$ 上的最值．

20. 甲、乙足球爱好者为了提高球技，两人轮流进行点球训练（每人各踢一次为一轮），在相同的条件下，

每轮甲、乙两人在同一位置，一人踢球另一人扑球，甲先踢，每人踢一次球，两人有 1 人进球另一人不进球，进球者得 1 分，不进球者得－1 分；两人都进球或都不进球，两人均得 0 分，设甲、乙每次踢球命中的概率均为$\frac{1}{2}$，甲扑到乙踢出球的概率为$\frac{1}{2}$，乙扑到甲踢出球的概率$\frac{1}{3}$，且各次踢球互不影响.

（1）经过 1 轮踢球，分别求甲、乙进球的概率；

（2）经过 1 轮踢球，记甲的得分为 X，求 X 的分布列及数学期望；

（3）经过 10 轮踢球，请直接写出甲最有可能进球的个数.

21. 已知椭圆 G：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，且过点 $P\left(1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

（1）求椭圆 G 的方程；

（2）若过点 M（1，0）的直线与椭圆 G 交于两点 A，B，设点 $N\left(\frac{1}{2},0\right)$，求$\left|\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}\right|$的范围.

22. 已知函数 $f(x)=e^x\left(ax^2-x-1\right)$.

（1）求曲线 $y=f(x)$ 在点$(0,-1)$处的切线方程；

（2）若 $f(x)$ 在 $x=-2$ 处取得极大值，求 a 的取值范围；

（3）求证：当 $a\geq 1$ 时，$f(x)\geq -e$.

23. 设数列 $A:a_1,a_2,\cdots,a_n\ (n\geq 2)$.如果 $a_i\in\{1,2,\cdots,n\}\ (i=1,2,\cdots,n)$，且当 $i\neq j$ 时，$a_i\neq a_j\ (1\leq i,j\leq n)$，则称数列 A 具有性质 P.对于具有性质 P 的数列 A，定义数列 $T(A):t_1,t_2,\cdots,t_{n-1}$，其中 $t_k=\begin{cases}1,a_k<a_{k+1},\\0,a_k>a_{k+1}\end{cases}(k=1,2,\cdots,n-1)$.

（1）对 $T(A):0,1,1$，写出所有具有性质 P 的数列 A；

（2）对数列 $E:e_1,e_2,\cdots,e_{n-1}\ (n\geq 2)$，其中 $e_i\in\{0,1\}\ (i=1,2,\cdots,n-1)$，证明：存在具有性质 P 的数列 A，使得 $T(A)$ 与 E 为同一个数列；

（3）对具有性质 P 的数列 A，若 $|a_1-a_n|=1\ (n\geq 5)$ 且数列 $T(A)$ 满足 $t_i=\begin{cases}0,i\text{为奇数},\\1,i\text{为偶数}\end{cases}(i=1,2,\cdots,n-1)$，证明：这样的数列 A 有偶数个.

参考答案

第一部分 选择题（共 60 分）

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1.【答案】D

【分析】根据集合的交运算即可求解.

【详解】$A=\{x|x-2\geq 0\}=\{x|x\geq 2\}$，$B=\{1,2,3\}$，所以 $A\cap B=\{2,3\}$，

故选:D

2.【答案】A

【分析】根据已知，先利用分类加法计数原理进行分类，再利用组合数以及有限制的排数问题列举求解.

【详解】由题可知，至少有两位数字相同的三位数分为两种情况，

有三位数字相同的三位数有：111，222，333 共 3 个；

有两位数字相同的三位数的个数为 $6C_3^2=18$，

所以，由数字 1，2，3 组成的三位数中，至少有两位数字相同的三位数的个数为 21，故 B，C，D 错误.

故选：A.

3.【答案】A

【分析】由题可得 $a_1=1,a_4=8$,进而可得 $q=2$,然后利用求和公式即得.

【详解】设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，

由题意可得：$\begin{cases}a_1+a_4=9\\a_2a_3=a_1a_4=8\end{cases}$，

又数列 $\{a_n\}$ 是递增的等比数列，

所以 $a_1=1,a_4=8$，

所以 $q=\sqrt[3]{\dfrac{a_4}{a_1}}=2$，

所以数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n=\dfrac{1\times\left(1-2^n\right)}{1-2}=2^n-1$.

故选: A.

4.【答案】B

【分析】设 $P(X=1)=a$，$P(X=2)=b$，由分布列的性质可得出 $2a+b=1$，再利用随机变量的期望公式可求得 $E(X)$ 的值.

【详解】设 $P(X=1)=a$，$P(X=2)=b$，由分布列的性质可得 $2a+b=1$，

所以，$E(X)=a+2b+3a=4a+2b=2(2a+b)=2$.

故选：B.

5.【答案】C

【分析】

求出 $f(x)$ 的导数，先求出 $f(x)$ 在区间(0，4)上单调的 a 的范围，即 $f'(x)\ge 0$ 或 $f'(x)\le 0$ 在 $(0,4)$ 恒成立，即可得出不单调的 a 的取值范围.

【详解】可知 $f'(x)=x^2-3x+a=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+a$，

若函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+ax+4$ 在区间(0，4)上单调，

则 $f'(x)\ge 0$ 或 $f'(x)\le 0$ 在 $(0,4)$ 恒成立，

$\therefore f'\left(\frac{3}{2}\right)=a-\frac{9}{4}\ge 0$ 或 $f'(4)=4+a\le 0$，

解得 $a\le -4$ 或 $a\geqslant\frac{9}{4}$，

$\because$ 函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+ax+4$ 在区间(0，4)上不单调，

$\therefore -4<a<\frac{9}{4}$.

故选：C.

【点睛】本题考查导数与函数单调性的关系，属于基础题.

6.【答案】B

【分析】根据等差数列定义求得公差，再求解立夏的晷影长在数列中所对应的项即可.

【详解】设从冬至到夏至的十三个节气依次为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 13 项，则 $a_1=13, a_{13}=1.48$

所以公差为 $d=\frac{1}{13-1}\times(1.48-13)=-0.96$，

则立夏的晷影长应为 $a_{10}=a_1+(10-1)d=13-9\times 0.96=4.36$ (尺)

故选：B

7.【答案】C

【分析】将题意转化为 $m\le x-\ln x$，$x\in\left[\frac{1}{e},e\right]$，令 $g(x)=x-\ln x$，即 $m\le g(x)_{\max}$，对 $g(x)$ 求导，求出 $g(x)$ 在 $\left[\frac{1}{e},e\right]$ 的最大值即可得出答案.

【详解】若存在$x\in\left[\frac{1}{e},e\right]$，使$f(x)\le 0$，即$f(x)=\ln x-x+m\le 0$，

所以$m\le x-\ln x$，令$g(x)=x-\ln x$，$x\in\left[\frac{1}{e},e\right]$，

$g'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$，令$g'(x)>0$，解得：$x\in(1,e]$，

令$g'(x)<0$，解得：$x\in\left[\frac{1}{e},1\right)$，

所以$g(x)$在$x\in[1,e]$上单调递增，在$x\in\left[\frac{1}{e},1\right]$上单调递减，

所以$g(e)=e-1,g\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}-\ln\frac{1}{e}=\frac{1}{e}+1,e-1>\frac{1}{e}+1$

所以$m\le e-1$.

故选：C.

8.【答案】D

【分析】利用排列中的定序问题的处理方法进行处理.

【详解】6位同学排成一排准备照相时，共有A_6^6种排法，

如果保持原来4位同学的相对顺序不变，则有$\frac{A_6^6}{A_4^4}=30$种排法，故A，B，C错误.

故选：D.

9.【答案】A

【分析】由函数的定义域可排除B，取特值可排除D，当x趋近负无穷时，$f(x)<0$可排除C，即可得出答案.

【详解】函数$f(x)=(x-1)\ln|x|$的定义域为$\{x|x\neq 0\}$，排除B；

当$x=\frac{1}{2}$时，$f(x)=-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}>0$，排除D；

当x趋近负无穷时，$x-1<0,\ln|x|$趋于正无穷，所以$f(x)=(x-1)\ln|x|<0$，排除C.

故选：A.

10.【答案】D

【分析】由题意可知：随机变量$\xi_i\ (i=1,2,3,4)$服从两点分布，由两点分布的方差公式$D(\xi)=p(1-p)$可解.

【详解】由题意可知：用“$\xi_i=1$”表示员工支持第i种方案，用“$\xi_i=0$”表示员工不支持，第i种方案$(i=1,2,3,4)$，

所以随机变量$\xi_i\left(i=1,2,3,4\right)$服从两点分布，

则$D\left(\xi_1\right)=p_1(1-p_1)=0.9\times0.1=0.09$，$D\left(\xi_2\right)=p_2(1-p_2)=0.75\times0.25=0.1875$，

$D\left(\xi_3\right)=p_3(1-p_3)=0.3\times0.7=0.21$，$D\left(\xi_4\right)=p_4(1-p_4)=0.2\times0.8=0.16$，

所以$D\left(\xi_1\right)<D\left(\xi_4\right)<D\left(\xi_2\right)<D\left(\xi_3\right)$，D选项正确.

故选：D

11.【答案】A

【分析】利用不等式的基本性质、特殊值法结合充分条件、必要条件的定义判断可得出结论.

【详解】若$0<ab<1$，若$b>0$，则$a>0$，此时有$0<a<\dfrac{1}{b}$，

若$a<0$，则$b<0$，此时有$\dfrac{1}{a}<b<0$，

所以，若$0<ab<1$，则“$0<a<\dfrac{1}{b}$或$\dfrac{1}{a}<b<0$”，

即“$0<ab<1$”$\Rightarrow$“$a<\dfrac{1}{b}$或$b>\dfrac{1}{a}$”；

若“$a<\dfrac{1}{b}$或$b>\dfrac{1}{a}$”，若$a<\dfrac{1}{b}$，不妨取$a=-2$，$b=-1$，则$ab>1$；

若$b>\dfrac{1}{a}$，不妨取$b=2$，$a=1$，则$ab>1$.

所以，“$0<ab<1$”$\not\Leftarrow$“$a<\dfrac{1}{b}$或$b>\dfrac{1}{a}$”.

因此，“$0<ab<1$”是“$a<\dfrac{1}{b}$或$b>\dfrac{1}{a}$”的充分不必要条件.

故选：A.

12.【答案】B

【分析】通过条件$a_1=1$，$\dfrac{1}{4}a_{n-1}\le a_n\left(n=2,3,\cdots,k\right)$，得到$d\ge-\dfrac{3}{3k-2}$，

再利用条件$a_1+a_2+\cdots+a_k=8$得到$16=2k+k(k-1)d$，

进而得到不等关系：$16\ge2k+k(k-1)\dfrac{-3}{3k-2}$，从而得到$k$的最大值.

【详解】由$a_1=1$，$\dfrac{1}{4}a_{n-1}\le a_n\left(n=2,3,\cdots,k\right)$，得到$1+(n-2)d\le4\left[1+(n-1)d\right]$，

即$3+(3n-2)d\ge0$，

当$n=2,3,\cdots,k$时，恒有$3+(3n-2)d\ge0$，即$d\ge-\dfrac{3}{3n-2}$，

所以 $d \geq -\dfrac{3}{3k-2}$，

由 $a_1+a_2+\cdots+a_k=8$，得到 $8=\dfrac{k(a_1+a_k)}{2}=\dfrac{k\left[2+(k-1)d\right]}{2}$，

所以 $16=2k+k(k-1)d \geq 2k+k(k-1)\dfrac{-3}{3k-2}$，$\because k\in \mathrm{N}, k\geq 2$，

整理得到：$3k^2-49k+32\leq 0$，所以 $k\leq 15$.

故选：B

第二部分 非选择题（共 90 分）

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

13.【答案】5

【分析】根据已知条件及数列的周期性即可求解.

【详解】由题意，$a_1=4$，$a_n=f\left(a_{n-1}\right)$，

所以 $a_2=f\left(a_1\right)=f\left(4\right)=1, a_3=f\left(a_2\right)=f\left(1\right)=5, a_4=f\left(a_3\right)=f\left(5\right)=2,$

$a_5=f\left(a_4\right)=f\left(2\right)=4, a_6=f\left(a_5\right)=f\left(4\right)=1, a_7=f\left(a_6\right)=f\left(1\right)=5, \cdots,$

所以数列 $\left\{a_n\right\}$ 是以 4 为周期的周期数列，

所以 $a_{2023}=a_{505\times 4+3}=a_3=5$

故答案为：5.

14.【答案】$\dfrac{4}{3}$

【分析】根据已知，利用二项分布以及二项分布的期望公式计算求解.

【详解】4 封信随机投入 A，B，C 三个空邮箱，每封信投入邮箱 A 的都是 $\dfrac{1}{3}$，

所以邮箱 A 的信件数 $X\sim B\left(4,\dfrac{1}{3}\right)$，所以邮箱 A 的信件数 X 的数学期望 $E\left(X\right)=\dfrac{4}{3}$.

故答案为：$\dfrac{4}{3}$.

15.【答案】31

【分析】根据两个已知条件求出 a_1, q 的值，再利用等比数列的前 n 项和求 S_5.

【详解】设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，

则 $a_2\cdot a_3=a_1^2q^3=a_1\cdot a_4=2a_1 \Rightarrow a_4=2$，

$a_4+2a_7=a_4+2a_4q^3=2+4q^3=2\times\dfrac{5}{4}\Rightarrow q=\dfrac{1}{2}$.

故 $a_1=\dfrac{a_4}{q^3}=16$，$S_5=\dfrac{a_1\left(1-q^5\right)}{1-q}=31$.

故答案为：31

16.【答案】$y=\dfrac{x}{2}+2$

【分析】利用导数计算公式、导数的几何意义以及直线的点斜式方程求解.

【详解】设曲线 $f\left(x\right)=x+\dfrac{2}{x}$ 的切点为 $P\left(x_0, y_0\right)$，又 $f'\left(x\right)=1-\dfrac{2}{x^2}$，所以切线斜率 $k=f'\left(x_0\right)$，

所以切线方程为 $y-y_0=k\left(x-x_0\right)$，即 $y-x_0-\dfrac{2}{x_0}=\left(1-\dfrac{2}{x_0^2}\right)\left(x-x_0\right)$，

又因为切线过点 $P\left(0,2\right)$，所以 $2-x_0-\dfrac{2}{x_0}=\left(1-\dfrac{2}{x_0^2}\right)\left(0-x_0\right)$，解得 $x_0=2$，

所以切点 $P\left(2,3\right)$，所以切线 l 的方程为：$y=\dfrac{x}{2}+2$.

故答案为：$y=\dfrac{x}{2}+2$.

17.【答案】6

【分析】在5个相同的篮球中间形成的4个空位中插入两块板，结合隔板法可得出结果.

【详解】问题等价于：在5个相同的篮球中间形成的4个空位中插入两块板，

所以，不同的分法种数为 $C_4^2=6$ 种.

故答案为：6.

18.【答案】②④

【分析】根据导函数的正负，即可判断①, 极值点的定义，结合函数的单调性即可判断②③，根据极值点，构造函数 $g\left(a\right)=a^2+a\ln a-2a$,，即可利用导数求解函数单调性进而可求解④

【详解】$f\left(x\right)=x^2+a\ln x-2x$ 的定义域为 $\left(0,+\infty\right)$，

$f'\left(x\right)=2x+\dfrac{a}{x}-2=\dfrac{2x^2-2x+a}{x}$，

当 $a\ge 0$ 时，$2x^2-2x+a=2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+a-\dfrac{1}{2}\ge a-\dfrac{1}{2}\ge -\dfrac{1}{2}$，故无法确定 $y=f\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上为增函数；故①错误，

若 $y=f\left(x\right)$ 存在两个极值点；则 $2x^2-2x+a=0$ 有两个相异的正实数根，所以 $\begin{cases}\Delta=4-8a>0\\ x_1x_2=\dfrac{a}{2}>0\\ x_1+x_2=1>0\end{cases}$，解得

$0<a<\frac{1}{2}$，故②正确，

当$a\le 0$时，令$f'(x)=0$，则$2x^2-2x+a=0$，设该方程的两个根为$x_1<x_2$，

则$x_1x_2=\frac{a}{2}\le 0$，则$x_1<0,x_2>0$，

当$x\in(0,x_2)$，$f'(x)<0$，当$x\in(x_2,+\infty)$，$f'(x)>0$，

所以$f(x)$在$(0,x_2)$单调递减，在$(x_2,+\infty)$单调递增，

因此当$x=x_2$时，$f(x)$取极小值，不存在极大值；③错误，

由②知若函数存在两个不同的极值点x_1，x_2，$0<a<\frac{1}{2}$，

$x_1x_2=\frac{a}{2}$，$\therefore f(2x_1x_2)=f(a)=a^2+a\ln a-2a$，

令$g(a)=a^2+a\ln a-2a, g'(a)=2a+\ln a-1$，

由于$y=2a, y=\ln a-1$均为$0<a<\frac{1}{2}$上的单调递增函数，

所以$g'(a)=2a+\ln a-1$为$0<a<\frac{1}{2}$上的单调递增函数，$g'\left(\frac{1}{2}\right)=1-\ln 2-1=-\ln 2<0$，所以

$g'(a)<0$在$0<a<\frac{1}{2}$恒成立，

故$g(a)$为$0<a<\frac{1}{2}$上的单调递减函数，当a趋近于0时，$g(a)$也趋向于于0，因此$g(a)<0$，则

$f(2x_1x_2)$的最大值恒为负．④正确，

故答案为：②④

【点睛】对于利用导数研究函数的综合问题的求解策略：

1、通常要构造新函数，利用导数研究函数的单调性，求出最值，从而求出参数的取值范围；

2、利用可分离变量，构造新函数，直接把问题转化为函数的最值问题．

3、根据恒成立或有解求解参数的取值时，一般涉及分离参数法，但压轴试题中很少碰到分离参数后构造的新函数能直接求出最值点的情况，进行求解，若参变分离不易求解问题，就要考虑利用分类讨论法和放缩法，注意恒成立与存在性问题的区别．

三、解答题：本大题共5小题，共60分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

19.【答案】(1) 减区间为$\left(-2,\frac{2}{3}\right)$，增区间为$(-\infty,-2)$和$\left(\frac{2}{3},+\infty\right)$

(2) 最大值为9，最小值为$-\frac{13}{27}$

【分析】(1) 求出 $f'(x)$，利用函数的单调性与导数的关系可求得函数 $f(x)$ 的增区间和减区间；

(2) 求出函数 $f(x)$ 在区间 $[-3,1]$ 上的极大值和极小值，再与 $f(-3)$、$f(1)$ 比较大小，即可得出结论.

【小问 1 详解】

解：因为 $f(x)=x^3+2x^2-4x+1$，其中 $x\in\mathbf{R}$，则 $f'(x)=3x^2+4x-4=(3x-2)(x+2)$，

由 $f'(x)<0$ 可得 $-2<x<\dfrac{2}{3}$，由 $f'\ \ x\ \ >0$ 可得 $x<-2$ 或 $x>\dfrac{2}{3}$，

所以，函数 $f(x)$ 的减区间为 $\left(-2,\dfrac{2}{3}\right)$，增区间为 $(-\infty,-2)$ 和 $\left(\dfrac{2}{3},+\infty\right)$.

【小问 2 详解】

解：列表如下：

x	$[-3,-2)$	-2	$\left(-2,\dfrac{2}{3}\right)$	$\dfrac{2}{3}$	$\left(\dfrac{2}{3},1\right]$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	增	极大值 9	减	极小值 $-\dfrac{13}{27}$	增

又因为 $f(-3)=4$，$f(1)=0$，则 $-\dfrac{13}{27}<0<4<9$，

因此，函数 $f(x)$ 在 $[-3,1]$ 上的最大值为 9，最小值为 $-\dfrac{13}{27}$.

20.【答案】(1) 甲、乙进球的概率分别为 $\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{4}$

(2) 分布列见解析，$E(X)=\dfrac{1}{12}$

(3) 3

【分析】(1) 根据独立事件的乘法公式即可求解，

(2) 根据独立事件的概率乘法公式求解概率，即可得分布列，由期望的计算公式及可求解期望，

(3) 利用期望的性质即可求解.

【小问 1 详解】

记一轮踢球，甲进球为事件 A，乙进球为事件 B，A，B 相互独立，

由题意得：$P(A)=\dfrac{1}{2}\times(1-\dfrac{1}{3})=\dfrac{1}{3}$，$P(B)=\dfrac{1}{2}\times(1-\dfrac{1}{2})=\dfrac{1}{4}$，

【小问 2 详解】

甲的得分 X 的可能取值为 -1，0，1，

$P(X=-1)=P(\bar{A}B)=P(\bar{A})P(B)=(1-\frac{1}{3})\times\frac{1}{4}=\frac{1}{6}$,

$P(X=0)=P(AB)+P(\bar{A}\bar{B})=P(A)P(B)+P(\bar{A})P(\bar{B})=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}+(1-\frac{1}{3})\times(1-\frac{1}{4})=\frac{7}{12}$,

$P(X=1)=P(A\bar{B})=P(A)P(\bar{B})=\frac{1}{3}\times(1-\frac{1}{4})=\frac{1}{4}$,

所以 X 的分布列为：

X	-1	0	1
p	$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{4}$

$E(X)=-1\times\frac{1}{6}+0\times\frac{7}{12}+1\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$.

【小问 3 详解】

又（1）知一轮比赛中甲进球的个数 Y 的可能取值为 0，1，

所以一轮比赛中甲进球个数 Y 的分布列为

Y	0	1
p	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

$E(Y)=0\times\frac{2}{3}+1\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$,故 10 轮比赛的进球个数为 $E(10Y)=10E(Y)=\frac{10}{3}\approx 3$,

故经过 10 轮踢球，请直接写出甲最有可能进球的个数为 3.

21.【答案】（1）$\frac{x^2}{4}+y^2=1$

（2）$\left[\frac{1}{2},1\right]$

【分析】（1）根据题意列方程解出 a,b,c，即可得出方程；

（2）根据题意设直线 AB 及交点 A,B 坐标，联立直线与椭圆的方程得到 y_1+y_2，y_1y_2，表示出 $\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}$，再由向量的模长公式结合基本不等式求解即可.

【小问 1 详解】

依题意可得 $\begin{cases} a^2=b^2+c^2 \\ \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{a^2}+\frac{3}{4b^2}=1 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ c=\sqrt{3} \end{cases}$，

所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.

【小问 2 详解】

当直线 AB 斜率为 0 时，$l_{AB}:y=0$，$A(-2,0),B(2,0)$，$N\left(\dfrac{1}{2},0\right)$，

所以 $\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}=\left(-\dfrac{5}{2},0\right)+\left(\dfrac{3}{2},0\right)=(-1,0)$，所以 $\left|\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}\right|=1$，

当直线 AB 斜率不为 0 时，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，直线 AB 的方程为：$x=my+1$，

联立方程组可得 $\begin{cases}x=my+1\\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$，得到 $(m^2+4)y^2+2my-3=0$，

$\Delta=4m^2+12(m^2+4)=16m^2+48>0$，

由根与系数的关系得到 $y_1+y_2=-\dfrac{2m}{m^2+4}$，$y_1y_2=\dfrac{-3}{m^2+4}$，

$N\left(\dfrac{1}{2},0\right)$，所以 $\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}=\left(x_1-\dfrac{1}{2},y_1\right)+\left(x_2-\dfrac{1}{2},y_2\right)=(x_1+x_2-1,y_1+y_2)$，

而 $x_1+x_2-1=m(y_1+y_2)+1=m\cdot\left(-\dfrac{2m}{m^2+4}\right)+1=\dfrac{-m^2+4}{m^2+4}$，

所以 $\left|\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}\right|=\sqrt{\left(\dfrac{-m^2+4}{m^2+4}\right)^2+\left(-\dfrac{2m}{m^2+4}\right)^2}$

$=\sqrt{\dfrac{m^4-4m^2+16}{m^4+8m^2+16}}=\sqrt{\dfrac{m^4+8m^2+16-12m^2}{m^4+8m^2+16}}=\sqrt{1-\dfrac{12m^2}{m^4+8m^2+16}}$

当 $m=0$ 时，$\left|\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}\right|=\sqrt{1-0}=1$，

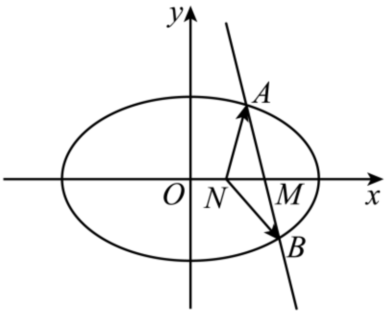
当 $m\neq0$ 时，$\left|\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}\right|=\sqrt{1-\dfrac{12}{m^2+8+\dfrac{16}{m^2}}}$，因为 $m^2+8+\dfrac{16}{m^2}\geq2\sqrt{m^2\cdot\dfrac{16}{m^2}}+8=16$，

当且仅当 $m^2=\dfrac{16}{m^2}$ 时取等，$\dfrac{12}{m^2+8+\dfrac{16}{m^2}}\in\left(0,\dfrac{3}{4}\right]$，

$1-\dfrac{12}{m^2+8+\dfrac{16}{m^2}}\in\left[\dfrac{1}{4},1\right)$，所以 $\sqrt{1-\dfrac{12}{m^2+8+\dfrac{16}{m^2}}}\in\left[\dfrac{1}{2},1\right)$.

故 $\left|\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}\right|$ 的范围为：$\left[\dfrac{1}{2},1\right]$.

综上所述：$\left|\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}\right|$ 的范围为：$\left[\frac{1}{2},1\right]$.



【点睛】思路点睛：解答直线与椭圆的题目时，联立直线方程与椭圆方程，消去 x(或 y)建立一元二次方程，然后借助根与系数的关系，并结合题设条件建立有关参变量的等量关系，再由基本不等式和向量的模长公式求解即可.

22. 【答案】（1）$2x+y+1=0$

（2）$a>-\frac{1}{2}$

（3）证明见解析

【分析】（1）求出 $f'(0)$ 的值，利用导数的几何意义可得出所求切线的方程；

（2）求得 $f'(x)=\mathrm{e}^x(ax-1)(x+2)$，对实数 a 的取值进行分类讨论，利用导数分析函数 $f(x)$ 在 $x=-2$ 附近的单调性，结合极值点的定义可得出实数 a 的取值范围；

（3）由 $f(x)<0$ 可得 $\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2a}<x<\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2a}$，利用导数分析函数 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2a},\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2a}\right)$ 上的单调性，证明出函数 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2a},\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2a}\right)$ 上的最小值 $f\left(\frac{1}{a}\right)\geq-\mathrm{e}$ 即可.

【小问 1 详解】

解：因为 $f(x)=\mathrm{e}^x(ax^2-x-1)$，

则 $f'(x)=\mathrm{e}^x(ax^2-x-1)+\mathrm{e}^x(2ax-1)=\mathrm{e}^x\left[ax^2+(2a-1)x-2\right]$，

所以，$f'(0)=-2$，

又因为 $f(0)=-1$，所以，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,-1)$ 处的切线方程为 $y=-2x-1$，即 $2x+y+1=0$.

【小问 2 详解】

解：因为 $f'(x)=\mathrm{e}^x\left[ax^2+(2a-1)x-2\right]=\mathrm{e}^x(ax-1)(x+2)$，

因为 $f(x)$ 在 $x=-2$ 处取得极大值，

①当 $a=0$ 时，$f'(x)=-(x+2)\mathrm{e}^x$，当 $x<-2$ 时，$f'(x)>0$，此时函数 $f(x)$ 单调递增，

当 $x>-2$ 时，$f'(x)<0$，此时函数 $f(x)$ 单调递减，则函数 $f(x)$ 在 $x=-2$ 处取得极大值，合乎题意；

②当 $a>0$ 时，$\frac{1}{a}>-2$，当 $x<-2$ 时，$f'(x)>0$，此时函数 $f(x)$ 单调递增，

当 $-2<x<\frac{1}{a}$ 时，$f'(x)<0$，此时函数 $f(x)$ 单调递减，

则函数 $f(x)$ 在 $x=-2$ 处取得极大值，合乎题意；

③当 $\frac{1}{a}=-2$ 时，即当 $a=-\frac{1}{2}$ 时，$f'(x)=-\frac{1}{2}e^x(x+2)^2\le 0$ 且 $f'(x)$ 不恒为零，

所以，函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，即函数 $f(x)$ 无极值点，不合乎题意；

④当 $-\frac{1}{2}<a<0$ 时，$\frac{1}{a}<-2$，当 $\frac{1}{a}<x<-2$ 时，$f'(x)>0$，此时函数 $f(x)$ 单调递增，

当 $x>-2$ 时，$f'(x)<0$，此时函数 $f(x)$ 单调递减，

所以，函数 $f(x)$ 在 $x=-2$ 处取得极大值，合乎题意；

⑤当 $a<-\frac{1}{2}$ 时，$\frac{1}{a}>-2$，当 $x<-2$ 时，$f'(x)<0$，此时函数 $f(x)$ 单调递减，

当 $-2<x<\frac{1}{a}$ 时，$f'(x)>0$，此时函数 $f(x)$ 单调递增，

所以，函数 $f(x)$ 在 $x=-2$ 处取得极小值，不合乎题意.

综上所述，$a>-\frac{1}{2}$.

【小问 3 详解】

证明：当 $a\ge 1$ 时，由 $f(x)=e^x(ax^2-x-1)<0$，可得 $\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2a}<x<\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2a}$，

因为 $a\ge 1$，则 $\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2a}+2=\frac{(1+4a)-\sqrt{1+4a}}{2a}=\frac{\sqrt{1+4a}\left(\sqrt{1+4a}-1\right)}{2a}>0$，

所以，$\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2a}>-2$，

所以，只需证当 $\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2a}<x<\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2a}$ 时，$f(x)\ge -e$，

当 $\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2a}<x<\frac{1}{a}$ 时，$f'(x)<0$，此时函数 $f(x)$ 单调递减，

当 $\frac{1}{a}<x<\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2a}$ 时，$f'(x)>0$，此时函数 $f(x)$ 单调递增，

所以，当$\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2a}<x<\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2a}$时，$f(x)\geq f\left(\frac{1}{a}\right)=-\mathrm{e}^{\frac{1}{a}}\geq -\mathrm{e}$，

因此，当$a\geq 1$时，对任意的$x\in\mathbf{R}$，$f(x)\geq -\mathrm{e}$.

【点睛】方法点睛：利用导数证明不等式问题，方法如下：

（1）直接构造函数法：证明不等式$f(x)>g(x)$（或$f(x)<g(x)$）转化为证明$f(x)-g(x)>0$（或$f(x)-g(x)<0$），进而构造辅助函数$h(x)=f(x)-g(x)$；

（2）适当放缩构造法：一是根据已知条件适当放缩；二是利用常见放缩结论；

（3）构造“形似”函数，稍作变形再构造，对原不等式同解变形，根据相似结构构造辅助函数.

23.【答案】（1）$4,1,2,3$、$3,1,2,4$、$2,1,3,4$

（2）证明见解析　（3）证明见解析

【分析】（1）根据数列$T(A)$的定义，得到$n=4$且$a_1>a_2$，$a_2<a_3$，$a_3<a_4$，确定$a_2=1$，按照$a_1=4$或$a_4=4$分别讨论可得答案；

（2）设数列E：$e_1,e_2,\cdots,e_{n-1}$中恰有s项为1，在按照$s=0$、$s=n-1$、$0<s<n-1$三种情况分别讨论可证结论；

（3）按照n的奇偶分类讨论，结合数列$T(A)$的定义可证结论.

【小问1详解】

因为$T(A):0,1,1$，所以$n-1=3$，则$n=4$

因为$t_1=0$，$t_2=1$，$t_3=1$，所以$a_1>a_2$，$a_2<a_3$，$a_3<a_4$，

又$a_i\in\{1,2,3,4\}(i=1,2,3,4)$，

所以$a_2=1$，$a_1=4$或$a_4=4$，

当$a_1=4$时，$a_3=2,a_4=3$，

当$a_4=4$时，$a_1=3,a_3=2$或$a_1=2,a_3=3$，

综上所述：所有具有性质P的数列A为：$4,1,2,3$、$3,1,2,4$、$2,1,3,4$.

【小问2详解】

由于数列E：$e_1,e_2,\cdots,e_{n-1}$，其中$e_i\in\{0,1\}\ (i=1,2,3,\cdots n-1,n\geq 2)$，

不妨设数列E：$e_1,e_2,\cdots,e_{n-1}$中恰有s项为1，

若$s=0$，则$A:n,n-1,\cdots,1$符合题意，

若$s=n-1$，则$A:1,2,\cdots,n$符合题意，

若$0<s<n-1$，则设这s项分别为$e_{k_1},e_{k_2},\cdots,e_{k_s}\ (k_1<k_2<\cdots k_s)$，

构造数列$A:a_1,a_2,\cdots,a_n$，令$a_{k_1+1},a_{k_2+1,\cdots,}a_{k_s+1}$分别为$n-s+1,n-s+2,\cdots,n$，

数列 A 的其余各项 $a_{m_1},a_{m_2},\cdots,a_{m_{n-s}}$ $(m_1<m_2<\cdots<m_{n-s})$ 分别为 $n-s,n-s-1,\cdots,1$，

经检验数列 A 符合题意.

【小问 3 详解】

对于符合题意的数列 $A:a_{1,}a_2,\cdots,a_n(n\ge 5)$，

①当 n 为奇数时，存在数列 $A':a_n,a_{n-1},\cdots,a_1$ 符合题意，

且数列 A 与 A' 不同，$T(A)$ 与 $T(A')$ 相同，

按这样的方式可由数列 A' 构造出数列 A，

所以 n 为奇数时，这样的数列 A 有偶数个，

当 $n=3$ 时，这样的数列 A 也有偶数个，

②当 n 为偶数时，

如果 $n,n-1$ 是数列 A 中不相邻的两项，交换 n 与 $\mathrm{n}-1$ 得到数列 A' 符合题意，

且数列 A 与 A' 不同，$T(A)$ 与 $T(A')$ 相同，

按这样的方式可由数列 A' 构造出数列 A，

所以这样的数列 A 有偶数个，

如果 $n,n-1$ 是数列 A 中相邻的两项，由题设知，必有 $a_{n-1}=n$，$a_n=n-1$，$a_1=n-2$，

除这三项外，$a_2,a_3,\cdots,a_{n-2}$ 是一个 $n-3$ 项的符合题意的数列 A，

由①可知，这样的数列 A 有偶数个，

综上，这样的数列 A 有偶数个.

【点睛】关键点点睛：正确理解数列 $T\left(A\right)$ 的定义，并利用定义求解是解题关键.