2019 北京大兴区高三（上）期末

数　　学（理）

本试卷共 4 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）设集合 $A=\{x\in\mathbf{R}\,|\,x>2\}$， $B=\{x\in\mathbf{R}\,|\,x^2-3x\leqslant 0\}$，则 $A\cap B$ 等于

（A）$[0,+\infty)$　　（B）$(2,+\infty)$

（C）$(2,3]$　　（D）$[0,2)$

（2）已知 $a>b>0$，则下列不等式成立的是

（A）$\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$　　（B）$\sqrt{a}>\sqrt{b}$

（C）$\lg a<\lg b$　　（D）$2^{-a}>2^{-b}$

（3）在复平面内，复数 z 对应的点的坐标为 $(2,-1)$，则 $|z+1|$ 等于

（A）2　　（B）$\sqrt{3}$

（C）$\sqrt{5}$　　（D）$\sqrt{10}$

（4）执行如图所示的程序框图，若输出的 S 的值为 $\dfrac{4}{5}$，

则输入 i 的值为

（A）4

（B）5

（C）6

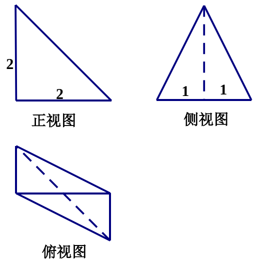
（D）7

（5）已知数列 $\{a_n\}$，则“存在常数 c，对任意的 $m,n\in\mathbf{N}^*$，且 $m\neq n$，都有 $\dfrac{a_n-a_m}{n-m}=c$”是“数列 $\{a_n\}$ 为等差数列”的

（A）充分而不必要条件 （B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件 （D）既不充分也不必要条件

（6）某三棱锥的三视图如图所示，则该三棱锥的体积为



（A）$\frac{2}{3}$

（B）$\frac{4}{3}$

（C）$\frac{8}{3}$

（D）2

（7）已知 $\boldsymbol{i}$， $\boldsymbol{j}$， $\boldsymbol{k}$ 为共面的三个单位向量，且 $\boldsymbol{i}\perp\boldsymbol{j}$，则 $(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k})\cdot(\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$ 的取值范围是

（A）$[-3,3]$ （B）$[-2,2]$

（C）$[\sqrt{2}-1,\sqrt{2}+1]$ （D）$[1-\sqrt{2},1+\sqrt{2}]$

（8）A，B 两种品牌各三种车型 2017 年 7 月的销量环比（与 2017 年 6 月比较）增长率如下表：

A 品牌车型	A_1	A_2	A_3
环比增长率	-7.29%	10.47%	14.70%

B 品牌车型	B_1	B_2	B_3
环比增长率	-8.49%	-28.06%	13.25%

根据此表中的数据，有如下四个结论：

①A_1 车型销量比 B_1 车型销量多；

②A 品牌三种车型总销量环比增长率可能大于 14.70%；

③B 品牌三种车型车总销量环比增长率可能为正；

④A 品牌三种车型总销量环比增长率可能小于 B 品牌三种车型总销量环比增长率.

其中正确的结论个数是

（A）1 （B）2 （C）3 （D）4

第二部分 （非选择题 共 110 分）

二、填空题共 6 小题，每题 5 分，共 30 分。

（9）抛物线 $x^2=y$ 的焦点到准线的距离等于________.

（10）$(x^2+\frac{1}{x})^9$ 展开式中，常数项的值为__________.

（11）在ΔABC中，已知$a^2+b^2=c^2-\sqrt{2}ab$，则$\angle C=$________.

（12）若存在满足$\begin{cases}2x+y-5\leqslant 0,\\ x+2y-2\geqslant 0\end{cases}$的非负实数$x_0,y_0$，使$x_0-y_0+c=0$成立，则$c$的取值范围

是_________.

（13）直线l: $y=kx$ 与圆$C:(x-1)^2+y^2=1$交于A，B两点，当ΔABC的面积最大时，k 的值为_____________.

（14）设函数$f(x)=\begin{cases}2^{x-a}, x\leqslant a,\\ f(2a-x), x>a.\end{cases}$

①若$a=0$，则$f(x)$的最大值为_______；

②若函数$y=f(x)-b$有两个零点，则b的取值范围是________.

三、解答题共6小题，共80分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

（15）（本小题13分）

已知函数$f(x)=4\sin(\pi-x)\sin(\frac{\pi}{3}+x)-1$.

（Ⅰ）求$f(x)$的最小正周期；

（Ⅱ）求$f(x)$在区间$[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{2}]$上的最大值和最小值.

（16）（本小题13分）

自由购是通过自助结算方式购物的一种形式. 某大型超市为调查顾客使用自由购的情况，随机抽取了100人，统计结果整理如下：

	20以下	[20, 30)	[30, 40)	[40, 50)	[50, 60)	[60, 70]	70以上
使用人数	3	12	17	6	4	2	0
未使用人数	0	0	3	14	36	3	0

（Ⅰ）现随机抽取1名顾客，试估计该顾客年龄在$[30,50)$且未使用自由购的概率；

（Ⅱ）从被抽取的年龄在$[50,70]$使用自由购的顾客中，随机抽取3人进一步了解情况，用X表示这3人中年龄在$[50,60)$的人数，求随机变量X的分布列及数学期望；

（Ⅲ）为鼓励顾客使用自由购，该超市拟对使用自由购的顾客赠送1个环保购物袋. 若某日

该超市预计有5000人购物，试估计该超市当天至少应准备多少个环保购物袋.

（17）（本小题14分）

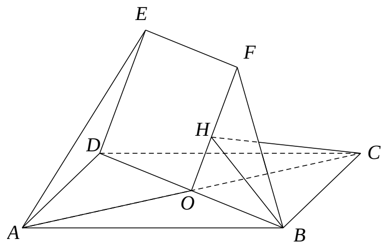
如图，边长为$\sqrt{2}$的正方形$ABCD$和高为1的等腰梯形$BDEF$所在的平面互相垂直，$EF\,//\,BD$，$EF=\frac{1}{2}BD$，AC与BD交于点O，点H为线段OF上任意一点.

（Ⅰ）求证： OF // 平面 ADE；

（Ⅱ）求 BF 与平面 ADE 所成角的正弦值；

（Ⅲ）是否存在点 H 使平面 BCH 与平面 ADE 垂直，

若存在，求出 $\dfrac{OH}{OF}$ 的值，若不存在，说明理由.



（18）（本小题 13 分）

已知函数 $f(x)=\sqrt{x}-a\ln x$.

（Ⅰ）若曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $x-2y+1=0$，求 a 的值；

（Ⅱ）求函数 $y=f(x)$ 在区间 $[1,4]$ 上的极值.

（19）（本小题 14 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{1}{2}$，左顶点为 $A(-2,0)$，过椭圆 C 的右焦点 F 作互相垂直的两条直线 l_1,l_2 分别交直线 $l:x=4$ 于 M,N 两点， AM 交椭圆 C 于另一点 P.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）求证：直线 PN 恒过定点，并求出定点坐标.

（20）（本小题 13 分）

设有限数列 $A:a_1,a_2,\cdots,a_n(n\in\mathbf{N}^*)$，定义集合 $M=\{a_i+a_j\mid 1\leqslant i<j\leqslant n\}$ 为数列 A 的伴随集合.

（Ⅰ）已知有限数列 $P:-1,0,1,2$ 和数列 $Q:1,3,9,27$. 分别写出 P 和 Q 的伴随集合；

（Ⅱ）已知有限等比数列 $A:2,2^2,\cdots,2^n(n\in\mathbf{N}^*)$，求 A 的伴随集合 M 中各元素之和 S；

（Ⅲ）已知有限等差数列 $A:a_1,a_2,\cdots,a_{2019}$，判断 $0,\dfrac{50}{3},\dfrac{7}{100}$ 是否能同时属于 A 的伴随集合 M，并说明理由.

数学试题答案

一、选择题（共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	B	D	B	C	A	D	B

二、填空题（共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）

（9）$\frac{1}{2}$　　（10）84　　（11）$\frac{3\pi}{4}$　　（12）$[-\frac{5}{2},5]$

（13）$\pm\frac{\sqrt{7}}{7}$（只写一个且正确得 3 分）　　（14）1；$(0,1)$（第一个空 3 分，第二个空 2 分）

三、解答题（共 6 小题，共 80 分）

（15）（共 13 分）

解：（Ⅰ）$f(x)=4\sin(\pi-x)\sin(\frac{\pi}{3}+x)-1$

$=4\sin x(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x)-1$　　……3 分

$=2\sqrt{3}\sin x\cos x+2\sin^2 x-1$

$=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x$　　……5 分

$=2\sin(2x-\frac{\pi}{6})$，　　……6 分

所以 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$．　　……7 分

（Ⅱ）因为 $x\in[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{2}]$，所以 $2x-\frac{\pi}{6}\in[0,\frac{5\pi}{6}]$．　　……2 分

所以当 $2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{\pi}{3}$ 时，$f(x)$ 取得最大值为 2；　　……4 分

当 $2x-\frac{\pi}{6}=0$，即 $x=\frac{\pi}{12}$ 时，$f(x)$ 取得最小值为 0．　　……6 分

（16）（共 13 分）

解：（Ⅰ）在随机抽取的 100 名顾客中，

年龄在[30，50)且未使用自由购的共有 3+14=17 人，　　……1 分

所以，随机抽取 1 名顾客，估计该顾客年龄在[30，50)且未使用自由购的概率为

$P=\frac{17}{100}$.　　　　……4 分

（Ⅱ） X 所有的可能取值为 1, 2, 3，　　　　……1 分

$P(X=1)=\frac{C_4^1C_2^2}{C_6^3}=\frac{1}{5}$，　　　　…… 2 分

$P(X=2)=\frac{C_4^2C_2^1}{C_6^3}=\frac{3}{5}$，　　　　…… 3 分

$P(X=3)=\frac{C_4^3C_2^0}{C_6^3}=\frac{1}{5}$.　　　　…… 4 分

所以 X 的分布　　　　列为

X	1	2	3
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

…… 5 分

所以 X 的数学期望为

$EX=1\times\frac{1}{5}+2\times\frac{3}{5}+3\times\frac{1}{5}=2$.　　　　…… 6 分

（Ⅲ）在随机抽取的 100 名顾客中，

使用自由购的共有 $3+12+17+6+4+2=44$ 人，　　　　…… 1 分

所以该超市当天至少应准备环保购物袋的个数估计为

$\frac{44}{100}\times 5000=2200$.　　　　…… 3 分

（17）（共 14 分）

证明：（Ⅰ）因为正方形 $ABCD$ 中，AC 与 BD 交于点 O，

所以 $DO=\frac{1}{2}BD$.

因为 $EF=\frac{1}{2}BD$，EF // BD

所以 EF // DO 且 $EF=DO$　　　　……1 分

所以 $EFOD$ 为平行四边形.　　……2 分

所以 $OF \parallel ED$.　　……3 分

又因为 $OF \not\subset$ 平面 ADE， $ED \subset$ 平面 ADE，

所以 $OF \parallel$ 平面 ADE.　　……4 分

解：（II）取 EF 中点 M， 连结 MO， 因为梯形 $BDEF$ 为等腰梯形，所以 $MO \perp BD$.

又因为平面 $ABCD \perp$ 平面 $BDEF$，

$MO \subset$ 平面 $BDEF$，

平面 $ABCD \cap$ 平面 $BDEF=BD$,

所以 $MO \perp$ 平面 $ABCD$.　　……1 分

又因为 $OA \perp OB$,

所以 OA、OB、OM 两两垂直.

如图，建立空间直角坐标系 $O\text{-}xyz$，　　…… 2 分

则 $A(1,0,0)$，$B(0,1,0)$，$C(-1,0,0)$，$D(0,-1,0)$， $E(0,-\frac{1}{2},1)$，$F(0,\frac{1}{2},1)$

$\overrightarrow{BF}=(0,-\frac{1}{2},1)$， $\overrightarrow{DA}=(1,1,0)$， $\overrightarrow{DE}=(0,\frac{1}{2},1)$，

设平面 ADE 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{DA}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{DE}\cdot\vec{n}=0\end{cases}$， 即 $\begin{cases}x+y=0\\ \frac{1}{2}y+z=0\end{cases}$，

令 $x=1$， 则 $y=-1, z=\frac{1}{2}$， 所以 $\vec{n}=(1, -1,\frac{1}{2})$.　　…… 4 分

设直线 BF 与平面 ADE 所成角为 θ，

$$\sin\theta=|\cos<\overrightarrow{BF},\vec{n}>|=\left|\frac{\overrightarrow{BF}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{BF}|\cdot|\vec{n}|}\right|=\left|\frac{0+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{3}{2}}\right|=\frac{4\sqrt{5}}{15},$$

所以直线 BF 与平面 ADE 所成角的正弦值为 $\frac{4\sqrt{5}}{15}$.　　…… 6 分

（III）设 $\overrightarrow{OH}=\lambda\overrightarrow{OF}$，　　…… 1 分

则 $\overrightarrow{OH}=(0,\frac{1}{2}\lambda,\lambda)$，$\overrightarrow{CH}=(1,\frac{1}{2}\lambda,\lambda)$，$\overrightarrow{CB}=(1,1,0)$

设平面 BCH 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{CH}\cdot\vec{m}=0\\ \overrightarrow{CB}\cdot\vec{m}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}x+\frac{1}{2}\lambda y+\lambda z=0\\ x+y=0\end{cases}$，

令 $x=1$，则 $y=-1$，$z=\frac{\lambda-2}{2\lambda}$.

所以 $\vec{m}=(1,-1,\frac{\lambda-2}{2\lambda})$.　　　　……2 分

若平面 BCH 与平面 ADE 垂直，则 $\vec{m}\cdot\vec{n}=0$.　　　　……3 分

由 $1+1+\frac{\lambda-2}{4\lambda}=0$，得 $\lambda=\frac{2}{9}$.

所以线段 OF 上存在点 H 使平面 BCH 与平面 ADE 垂直，

$\frac{OH}{OF}$ 的值为 $\frac{2}{9}$.　……4 分

（18）（共 13 分）

解：（Ⅰ）因为 $f(x)=\sqrt{x}-a\ln x$，

所以 $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{a}{x}$，

所以 $f'(1)=\frac{1}{2}-a$.　　　　……2 分

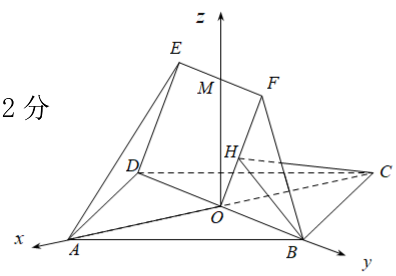
因为 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $x-2y+1=0$.

所以 $\frac{1}{2}-a=\frac{1}{2}$，　　　　……3 分

解得 $a=0$.　　　　……4 分

（Ⅱ）因为 $f(x)=\sqrt{x}-a\ln x$，$x\in[1,4]$，

所以 $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{a}{x}=\frac{\sqrt{x}-2a}{2x}$，　　　　……2 分



①当 $2a\leqslant 1$，即 $a\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$f'(x)\geqslant 0$ 在 $[1,4]$ 恒成立，

所以 $y=f(x)$ 在 $[1,4]$ 单调递增；

所以 $y=f(x)$ 在 $[1,4]$ 无极值；　　　　……4 分

②当 $2a\geqslant 2$，即 $a\geqslant 1$ 时，$f'(x)\leqslant 0$ 在 $[1,4]$ 恒成立，

所以 $y=f(x)$ 在 $[1,4]$ 单调递减，

所以 $y=f(x)$ 在 $[1,4]$ 无极值；　　　　……6 分

③当$1<2a<2$，即$\frac{1}{2}<a<1$时，　……7 分

$x, f'(x), f(x)$变化如下表：

x	$(1,4a^2)$	$4a^2$	$(4a^2,4)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	单调递减↘	极小值	单调递增↗

……8 分

因此，$f(x)$的减区间为$(1,4a^2)$，增区间为$(4a^2,4)$.

所以当$x=4a^2$时，$f(x)$有极小值为$2a-2a\ln(2a)$，无极大值.

……9 分

（19）（共 14 分）

解：（Ⅰ）由题意$a=2$，　……1 分

离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，所以$c=1$.　……2 分

所以$b^2=a^2-c^2=3$，　……3 分

所以椭圆C的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.　……4 分

（Ⅱ）由题意，设$l_1: y=k(x-1)$，$l_2: y=-\frac{1}{k}(x-1)$.　……1 分

令$x=4$，得$M(4,3k)$，$N(4,-\frac{3}{k})$，　……3 分

又$A(-2,0)$，所以直线AM的方程为$y=\frac{k}{2}(x+2)$.　……4 分

由$\begin{cases} y=\frac{k}{2}(x+2) \\ 3x^2+4y^2=12 \end{cases}$，消元，得$3x^2+k^2(x+2)^2=12$，

即$(3+k^2)x^2+4k^2x+4k^2-12=0$，　……5 分

设$P(x_P,y_P)$，则$-2x_p=\frac{4k^2-12}{3+k^2}$，所以$x_p=\frac{6-2k^2}{3+k^2}$.　……6 分

所以$P(\frac{6-2k^2}{3+k^2},\frac{6k}{3+k^2})$，　……7 分

又$N(4,-\frac{3}{k})$，

所以直线 PN 的斜率为

$$k_{PN}=\frac{\frac{6k}{3+k^2}-(-\frac{3}{k})}{\frac{6-2k^2}{3+k^2}-4}=\frac{6k^2+3(3+k^2)}{k(-6-6k^2)}=\frac{3}{-2k},$$ ……8 分

所以直线 PN 的方程为 $y-(-\frac{3}{k})=-\frac{3}{2k}(x-4)$，

即 $y=-\frac{3}{2k}(x-2)$， ……9 分

直线 PN 恒过定点 $(2,0)$． ……10 分

（20）（共 13 分）

解：（Ⅰ）数列 P 的伴随集合为 $\{-1,0,1,2,3\}$，

数列 Q 的伴随集合为 $\{4,10,12,28,30,36\}$． ……3 分

（两个集合都对 3 分，只写对一个集合给 2 分．）

（Ⅱ）先证明对任意 $i\neq k$ 或 $j\neq l$，则 $a_i+a_j\neq a_k+a_l(1\leqslant i<j\leqslant n,1\leqslant k<l\leqslant n)$．

假设 $a_i+a_j=a_k+a_l\left(1\leqslant i<j\leqslant n,1\leqslant k<l\leqslant n\right)$．

当 $i=k$ 且 $j\neq l$，因为 $a_i+a_j=a_k+a_l$，则 $a_j=a_l$，即 $2^j=2^l$，

所以 $j=l$，与 $j\neq l$ 矛盾．

同理，当 $i\neq k$ 且 $j=l$ 时，也不成立． ……1 分

当 $i\neq k$ 且 $j\neq l$ 时，不妨设 $i<k$，因为 $a_i+a_j=a_k+a_l$，则 $2^i+2^j=2^k+2^l$，

所以 $1+2^{j-i}=2^{k-i}+2^{l-i}$， ……2 分

左边为奇数，右边为偶数，所以 $1+2^{j-i}\neq 2^{k-i}+2^{l-i}$， ……3 分

综上，对任意 $i\neq k$ 或 $j\neq l$，则 $a_i+a_j\neq a_k+a_l(1\leqslant i<j\leqslant n,1\leqslant k<l\leqslant n)$

所以求集合 M 中各元素之和时，每个 $a_i\left(1\leq i\leq n\right)$ 均出现 $n-1$ 次，……4 分

所以 $S=(n-1)(2+2^2+\cdots+2^n)$．

$=(n-1)\dfrac{2(1-2^n)}{1-2}=(n-1)(2^{n+1}-2)$ ……5 分

（III）假设 $0,\dfrac{50}{3},\dfrac{7}{100}$ 同时属于数列 A 的伴随集合 M .

设数列 A 的公差为 $d(d\neq 0)$，则

$$\begin{cases} a_{i_1}+a_{j_1}=0, \\ a_{i_2}+a_{j_2}=\dfrac{50}{3}, \\ a_{i_3}+a_{j_3}=\dfrac{7}{100}, \end{cases} \text{即} \begin{cases} 2a_1+\left(i_1+j_1-2\right)d=0, ① \\ 2a_1+\left(i_2+j_2-2\right)d=\dfrac{50}{3}, ② \\ 2a_1+\left(i_3+j_3-2\right)d=\dfrac{7}{100}, ③ \end{cases}$$ ……1 分

②-①得，$\left((i_2+j_2)-(i_1+j_1)\right)d=\dfrac{50}{3}$，

③-①得，$\left((i_3+j_3)-(i_1+j_1)\right)d=\dfrac{7}{100}$，

两式相除得，$\dfrac{(i_2+j_2)-(i_1+j_1)}{(i_3+j_3)-(i_1+j_1)}=\dfrac{5000}{21}$， ……2 分

因为 $i_1,j_1,i_2,j_2,i_3,j_3\in\mathbf{N}^*$，

所以 $\left(i_2+j_2\right)-\left(i_1+j_1\right)=5000k$，

$\left(i_3+j_3\right)-\left(i_1+j_1\right)=21k\left(k\in\mathbf{Z},k\neq 0\right)$， ……3 分

所以 $\left|\left(i_2+j_2\right)-\left(i_1+j_1\right)\right|\geq 5000$.

又因为 $1\leq i_1,j_1,i_2,j_2\leqslant 2019$，

所以 $\left(i_2+j_2\right)-\left(i_1+j_1\right)\leq\left(2019+2018\right)-\left(2+1\right)=4034$，

$\left(i_2+j_2\right)-\left(i_1+j_1\right)\geq\left(1+2\right)-\left(2018+2019\right)=-4034$， ……4 分

所以 $\left|\left(i_2+j_2\right)-\left(i_1+j_1\right)\right|\leq 4034$，与 $\left|\left(i_2+j_2\right)-\left(i_1+j_1\right)\right|\geq 5000$ 矛盾，

所以 $0,\dfrac{50}{3},\dfrac{7}{100}$ 不能同时属于数列 A 的伴随集合 M . ……5 分