

# 绵阳市高中 2021 级第一次诊断性考试

## 理科数学参考答案及评分意见

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.

BCDAC ADBBD CC

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 7

14.  $2\sqrt{2}$

15. 9

16. -1

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分.

17. 解：(1) 由  $a_1, a_2, a_4$  成等比数列，则  $a_2^2 = a_1 \cdot a_4$ ，.....2 分

$$\therefore (a_1 + 2)^2 = a_1 \cdot (a_1 + 6),$$

可解得  $a_1 = 2$ ，.....3 分

$\therefore$  数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n = n \cdot a_1 + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot d = n^2 + n$ ；.....5 分

$$(2) b_n + b_{n+1} = (\sqrt{2})^{a_n} = (\sqrt{2})^{2n} = 2^n \quad ①, \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

当  $n=1$  时， $b_1 + b_2 = 2$ ，可得  $b_2 = 1$ ，.....7 分

可得  $b_{n+1} + b_{n+2} = 2^{n+1}$  ②，.....8 分

由②式-①式，得  $b_{n+2} - b_n = 2^{n+1} - 2^n = 2^n$ ，.....9 分

$$\therefore b_{2n} = (b_{2n} - b_{2n-2}) + (b_{2n-2} - b_{2n-4}) + \dots + (b_4 - b_2) + b_2$$

$$= 2^{2n-2} + 2^{2n-4} + \dots + 2^2 + 1 \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$= \frac{4(1-4^{n-1})}{1-4} + 1$$

$$= \frac{4^n - 1}{3} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

18. 解：(1)  $\because T = \frac{\pi}{\omega} = \frac{8\pi}{3}$ ，则  $\omega = \frac{3}{8}$ ，.....1 分

$$\text{又 } f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{8} + \varphi\right) = 1, |\varphi| < \frac{\pi}{2}, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\therefore \varphi = \frac{\pi}{8}, \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\therefore f(x) = \tan\left(\frac{3}{8}x + \frac{\pi}{8}\right); \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 由题意, } g(x) = \tan\left(\frac{3}{8}x + \frac{3}{8}\lambda + \frac{\pi}{8}\right), \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\therefore -f(0) = -\tan\frac{\pi}{8} = \tan\left(-\frac{\pi}{8}\right) \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\therefore \text{由 } g\left(\frac{\pi}{4}\right) = -f(0), \text{ 得 } \tan\left(\frac{3\pi}{32} + \frac{3}{8}\lambda + \frac{\pi}{8}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{8}\right) \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\therefore \frac{3}{8}\lambda + \frac{7\pi}{32} = -\frac{\pi}{8} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\therefore \lambda = -\frac{11}{12}\pi + \frac{8k\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}, \text{ 又 } \lambda > 0, \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\therefore \lambda \text{ 的最小值为 } \frac{7\pi}{4}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

19. 解: (1)  $\because f(x) = (2x^2 + m)(x - m + 2) = 2x^3 - 2(m-2)x^2 + mx - m(m-2)$  为奇函数,

$$\therefore \begin{cases} -2(m-2) = 0 \\ -m(m-2) = 0 \end{cases}, \text{ 解得: } m=2. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

(2) 当  $m > 0$  时,  $2x^2 + m > 0$ ,

$\therefore$  函数  $f(x) = (2x^2 + m)(x - m + 2)$  不可能有两个零点.  $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

当  $m < 0$  时, 由  $f(x) = 0$ , 解得:  $x = \pm\sqrt{-\frac{m}{2}}$  或  $m-2$ ,  $\dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

要使得  $f(x)$  仅有两个零点, 则  $m-2 = -\sqrt{-\frac{m}{2}}$ ,  $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

即  $2m^2 - 7m + 8 = 0$ , 此方程无解.

故  $m=0$ , 即  $f(x) = 2x^3 + 4x^2$ ,  $\dots\dots\dots 9 \text{ 分}$

令  $h(x) = f(x) - 3 = 2x^3 + 4x^2 - 3$ , 则  $h'(x) = 6x^2 + 8x = 2x(3x + 4)$ ,

$h'(x) > 0$ , 解得:  $x > 0$  或  $x < -\frac{4}{3}$ ,  $h'(x) < 0$  解得:  $-\frac{4}{3} < x < 0$ ,

故  $h(x)$  在  $(-\infty, -\frac{4}{3})$ ,  $(0, +\infty)$  上递增, 在  $(-\frac{4}{3}, 0)$  上递减,  $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

又  $h(-\frac{4}{3}) = -\frac{17}{27} < 0$ ,

故函数  $y = f(x) - 3$  仅有一个零点. ....12 分

20. 解: (1)  $\because \cos(C-B)\sin A = \cos(C-A)\sin B$

$$\therefore (\cos C \cos B + \sin C \sin B) \sin A = (\cos C \cos A + \sin C \sin A) \sin B \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\therefore \cos C \cos B \sin A = \cos C \cos A \sin B \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

又  $\because \triangle ABC$  为斜三角形, 则  $\cos C \neq 0$ ,

$$\therefore \cos B \sin A = \cos A \sin B, \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$\therefore \sin(A-B) = 0$ , 又  $A, B$  为  $\triangle ABC$  的内角,

$$\therefore A = B; \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

(2) 由  $\triangle ABC$  的面积  $S = \frac{a}{2}$ ,

$$\therefore S = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{a}{2}, \text{ 则 } b \sin C = 1, \text{ 即 } \frac{1}{b} = \sin C, \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{由 } S = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{a}{2}, \text{ 则 } c \sin B = 1, \text{ 即 } \frac{1}{c} = \sin B, \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

由 (1) 知  $A = B$  则  $a = b$ ,

$$\therefore \frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2} = \sin^2 B - \sin^2 C, \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

又  $\sin C = \sin(A+B) = \sin 2B$ ,

$$\therefore \frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2} = \sin^2 B - \sin^2 2B = \sin^2 B - 4 \cos^2 B \sin^2 B = \sin^2 B - 4(1 - \sin^2 B) \sin^2 B \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

令  $\sin^2 B = t$ , 令  $f(t) = t - 4(1-t)t = 4t^2 - 3t$ ,

又因为  $0 < \sin^2 B < 1$ , 即  $0 < t < 1$ ,

$$\therefore \text{当 } t = \frac{3}{8} \text{ 时, } f(t) \text{ 取最小值, 且 } f(t)_{\min} = -\frac{9}{16}, \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

综上所述:  $\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}$  的最小值为  $-\frac{9}{16}$ . ....12 分

21. 解: (1) 当  $a = 2$  时,  $f(x) = (\ln x - 2x + 2) \ln x$ ,

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x} - 2\right) \ln x + \frac{\ln x - 2x + 2}{x} = \frac{-2(x-1)(\ln x + 1)}{x}, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

令  $f'(x) > 0$  得:  $\frac{1}{e} < x < 1$ ; 令  $f'(x) < 0$  得:  $0 < x < \frac{1}{e}$  或  $x > 1$ , ....3 分

$\therefore f(x)$  的单调递减区间为:  $(0, \frac{1}{e})$  和  $(1, +\infty)$ ; 单调递增区间为:  $(\frac{1}{e}, 1)$ . .....5 分

(2)  $f(x) \leq \frac{e^x}{x} - x^2 + ax - a$  等价于  $e^{x-\ln x} - (x-\ln x)^2 + a(x-\ln x-1) \geq 0$  (\*) .....6 分

令  $t = g(x) = x - \ln x$ , 则  $g'(x) = \frac{x-1}{x}$ ,

$\therefore g(x)$  在  $(0, 1)$  上递减, 在  $(1, +\infty)$  上递增。

$\therefore g(x)$  的最小值为  $g(1)=1$ , 即:  $t \geq 1$ , .....8 分

(\*) 式化为:  $e^t - t^2 + a(t-1) \geq 0$ , 当  $t=1$  时, 显然成立.

当  $t > 1$  时,  $a \geq \frac{t^2 - e^t}{t-1}$ , 令  $h(t) = \frac{t^2 - e^t}{t-1} (t > 1)$ , 则  $a \geq h_{\max}(t)$ , .....9 分

$h'(t) = \frac{-(t-2)(e^t - t)}{(t-1)^2}$ , 当  $t > 1$  时, 易知  $e^t - t > 0$ ,

故易得:  $h(t)$  在  $(1, 2)$  上单调递增, 在  $(2, +\infty)$  上单调递减, .....10 分

$\therefore h(t)_{\max} = h(2) = 4 - e^2$ , .....11 分

$\therefore$  实数  $a$  的取值范围为:  $a \geq 4 - e^2$ . .....12 分

22. 解: (1) 曲线  $C_1$  的参数方程为  $C_1: \begin{cases} x = t + \frac{1}{t} \text{ ①} \\ y = t - \frac{1}{t} \text{ ②} \end{cases} (t \text{ 为参数}),$

由 ①<sup>2</sup> - ②<sup>2</sup> 得  $C_1$  的普通方程为:  $x^2 - y^2 = 4$ ; .....2 分

曲线  $C_2$  的参数方程为  $C_2: \begin{cases} x = 2 + 2\cos\alpha \\ y = 2\sin\alpha \end{cases} (\alpha \text{ 为参数}),$

所以  $C_2$  的普通方程为:  $(x-2)^2 + y^2 = 4$ ; .....4 分

(2) 曲线  $C_1$  的极坐标方程为:  $\rho^2 \cos^2 \theta - \rho^2 \sin^2 \theta = 4 (\theta \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2})$ , .....5 分

$\therefore \rho^2 = \frac{4}{\cos 2\theta}$ , .....6 分

由  $\begin{cases} \theta = \frac{\pi}{6} \\ \rho^2 = \frac{4}{\cos 2\theta} \end{cases}$  得:  $\rho_A = 2\sqrt{2}$ ,

∴射线:  $\theta = \frac{\pi}{6} (\rho > 0)$  与曲线  $C_1$  交于  $A(2\sqrt{2}, \frac{\pi}{6})$ , ..... 7 分

曲线  $C_2$  的极坐标方程为  $\rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta - 4\rho \cos \theta = 0 \Rightarrow \rho = 4 \cos \theta$ ,

$$\text{由 } \begin{cases} \theta = \frac{\pi}{6}, \\ \rho = 4 \cos \theta, \end{cases} \text{ 得: } \rho_B = 2\sqrt{3},$$

∴射线:  $\theta = \frac{\pi}{6} (\rho > 0)$  与曲线  $C_2$  交于  $B(2\sqrt{3}, \frac{\pi}{6})$ , ..... 9 分

$$\text{则 } S_{\triangle PAB} = S_{\triangle POB} - S_{\triangle POA} = \frac{1}{2} \times |OP| \times (\rho_B - \rho_A) \sin \frac{\pi}{6} = \sqrt{3} - \sqrt{2}. \text{ ..... 10 分}$$

$$23. \text{ 解: (1) } f(x) = |3x+3| - |x-5| = \begin{cases} 2x+8, & x \geq 5, \\ 4x-2, & -1 < x < 5, \\ -2x-8, & x \leq -1, \end{cases} \text{ ..... 1 分}$$

$$\therefore f(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ 2x+8 > 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} -1 < x < 5 \\ 4x-2 > 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x \leq -1 \\ -2x-8 > 0 \end{cases}, \text{ ..... 2 分}$$

$$\text{解得 } x \geq 5 \text{ 或 } \frac{1}{2} < x < 5 \text{ 或 } x < -4, \text{ ..... 4 分}$$

$$\therefore \text{不等式的解集为 } (-\infty, -4) \cup (\frac{1}{2}, +\infty); \text{ ..... 5 分}$$

$$(2) \text{ 证明: 由 } f(x) = \begin{cases} 2x+8, & x \geq 5 \\ 4x-2, & -1 < x < 5 \\ -2x-8, & x \leq -1 \end{cases} \text{ 可得 } f(x) \text{ 的最小值为 } -6, \text{ ..... 6 分}$$

$$\text{则 } m = -6, \quad a+b+c = 6,$$

$$\therefore \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = \frac{1}{12} [(a+b) + (b+c) + (c+a)] \left( \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right)$$

$$= \frac{1}{12} \left( 3 + \frac{b+c}{a+b} + \frac{c+a}{a+b} + \frac{a+b}{b+c} + \frac{c+a}{b+c} + \frac{a+b}{c+a} + \frac{b+c}{c+a} \right) \text{ ..... 7 分}$$

$$\geq \frac{1}{12} (3 + 2\sqrt{\frac{b+c}{a+b} \cdot \frac{a+b}{b+c}} + 2\sqrt{\frac{c+a}{a+b} \cdot \frac{a+b}{c+a}} + 2\sqrt{\frac{c+a}{b+c} \cdot \frac{b+c}{c+a}}) \text{ ..... 8 分}$$

$$= \frac{1}{12} (3 + 2 + 2 + 2) = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}, \text{ 当且仅当 } a=b=c=2 \text{ 时, 等号成立, ..... 9 分}$$

$$\therefore \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{3}{4}. \text{ ..... 10 分}$$