保密★使用

泉州市 2024 届高中毕业班质量监测（一）

2023.08

数　学

【解答题部分】

本试卷共 22 题，满分 150 分，共 8 页。考试用时 120 分钟。

四、解答题：本题共6小题，共70分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17.（10 分）

数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，且$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{a_n+1}$.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）令$b_n=\dfrac{2^n}{a_n}$，记数列$\{b_n\}$的前n项和为S_n，求S_8.

【命题意图】本小题主要考查等差数列的定义、通项公式与数列求和等基础知识，考查运算求解能力，考查函数与方程、化归与转化等思想，体现基础性，导向对发展数学运算等核心素养的关注.

【试题解析】解法一：

（1）由$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{a_n+1}$，可得$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{1}{a_n}+1$. ……………………1 分

因为$a_1=1$，所以$\dfrac{1}{a_1}=1$. ……………………2 分

所以数列$\{\dfrac{1}{a_n}\}$是首项为1，公差为1的等差数列. ……………………3 分

所以$\dfrac{1}{a_n}=n$，即$a_n=\dfrac{1}{n}$. ……………………4 分

（2）因为$b_n=\dfrac{2^n}{a_n}$，所以$b_n=n\cdot 2^n$. ……………………5 分

又$S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$，

所以$S_8=2^1+2\times 2^2+\cdots+8\times 2^8$ ①. ……………………6 分

①式两边同乘以 2，得$2S_8=2^2+2\times 2^3+\cdots+8\times 2^{8+1}$ ②，……………………7 分

②—①，得$S_8=-(2+2^2+2^3+\cdots+2^8)+8\times 2^9$，……………………8 分

所以$S_8=-\frac{2\times(1-2^8)}{1-2}+8\times2^9=2+7\times2^9=3586$. ……………………………………10 分

解法二：

（1） 由$a_{n+1}=\frac{a_n}{a_n+1}$，可得$a_{n+1}a_n+a_{n+1}=a_n$.

两边同除以$a_{n+1}a_n$，得$1+\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_{n+1}}$，即$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=1$. …………………………… 1分

因为$a_1=1$，所以$\frac{1}{a_1}=1$. ……………………………………………………………… 2 分

所以数列$\{\frac{1}{a_n}\}$是首项为1，公差为 1 的等差数列. ……………………………… 3 分

所以$\frac{1}{a_n}=n$，即$a_n=\frac{1}{n}$. ………………………………………………………… 4 分

（2） 因为$b_n=\frac{2^n}{a_n}$，所以$b_n=n\cdot2^n$. ……………………………………………………5 分

所以$b_1=2,b_2=8,b_3=24,b_4=64,b_5=160,b_6=384,b_7=896,b_8=2048$，……9 分

所以$S_8=b_1+b_2+\cdots+b_8=2+8+24+64+160+384+896+2048=3586$. …… 10 分

18．（12分）

泉州是历史文化名城、东亚文化之都，是联合国认定的“海上丝绸之路”起点．著名的“泉州十八景”是游客的争相打卡点，泉州文旅局调查打卡十八景游客，发现90%的人至少打卡两个景点．为提升城市形象，泉州文旅局为大家准备了4种礼物，分别是世遗泉州金属书签、闽南古厝徽章、开元寺祈福香包、小关公陶瓷摆件．若打卡十八景游客至少打卡两个景点，则有两次抽奖机会；若只打卡一个景点，则有一次抽奖机会．每次抽奖可随机获得4种礼物中的1种礼物．假设打卡十八景游客打卡景点情况相互独立．

（1）从全体打卡十八景游客中随机抽取3人，求3人抽奖总次数不低于4次的概率；

（2）任选一位打卡十八景游客，求此游客抽中开元寺祈福香包的概率．

【命题意图】本小题主要考查离散型随机变量的分布列、条件概率、全概率公式等基础知识；考查运算求解、推理论证能力等；考查化归与转化思想等．体现基础性、应用性和综合性，导向对发展数学运算、数学抽象等核心素养的关注．

【试题解析】解法一：

（1） 设3人抽奖总次数为X，则X的可能取值为$3,4,5,6$．……………………… 1分

由题意知，每位打卡十八景游客至少打卡两个景点的概率为$\frac{9}{10}$，

只打卡一个景点的概率为$\frac{1}{10}$．……………………………………………………… 2分

依题可得$P(X=4)=C_3^1\times\frac{9}{10}\times(\frac{1}{10})^2=\frac{27}{1000}$，……………………………… 3分

$P(X=5)=C_3^2\times(\frac{9}{10})^2\times\frac{1}{10}=\frac{243}{1000}$，……………………………… 4分

$P(X=6)=(\frac{9}{10})^3=\frac{729}{1000}$，……………………………………………… 5分

所以$P(X\geq4)=P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)=\frac{27+243+729}{1000}=0.999$．

……………………………………………………………………………………6分

（2） 记事件A=“每位打卡十八景游客至少打卡两个景点”，

则$\overline{A}$=“每位打卡十八景游客只打卡一个景点”，

事件B=“一位打卡十八景游客抽中开元寺祈福香包”，……………………… 7分

则$P(A)=\frac{9}{10}$，$P(\overline{A})=\frac{1}{10}$，$P(B|A)=1-(\frac{3}{4})^2=\frac{7}{16}$，$P(B|\overline{A})=\frac{1}{4}$，………… 9分

则 $P(B)=P(AB+\overline{A}B)=P(AB)+P(\overline{A}B)$

$=P(A)P(B\mid A)+P(\overline{A})P(B\mid\overline{A})$

$=\dfrac{9}{10}\times\dfrac{7}{16}+\dfrac{1}{10}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{67}{160}$. ……………………………………………………12 分

解法二：

（1）设3人抽奖总次数为X，则X的可能取值为$3,4,5,6$. ……………………………1 分

由题意知，每位打卡十八景游客至少打卡两个景点的概率为$\dfrac{9}{10}$，

只打卡一个景点的概率为$\dfrac{1}{10}$. ……………………………………………………2 分

依题可得$P(X=3)=C_3^0\times(\dfrac{9}{10})^0\times(\dfrac{1}{10})^3=\dfrac{1}{1000}$，……………………………………5 分

所以$P(X\geqslant 4)=1-P(X=3)=1-(\dfrac{1}{10})^3=\dfrac{999}{1000}=0.999$. ……………………………6 分

（2） 同解法一. ……………………………………………………………………12 分

解法三:

（1）设3人抽奖总次数为X，设抽取的3位打卡十八景游客中至少打卡两个景点的人数为Y，则$X=2Y+(3-Y)=3+Y$，……………………………………………1 分

由题可知，$Y\sim B(3,0.9)$，……………………………………………………………4 分

故$P(X\geq 4)=P(3+Y\geq 4)=P(Y\geq 1)=1-P(Y=0)=1-(\dfrac{1}{10})^3=0.999$. ……6 分

（2） 同解法一. ……………………………………………………………………12 分

19.（12 分）

$\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，且满足 $c\cos B+(b+2a)\cos C=0$.

（1）求 C；

（2）若 CD 平分 $\angle ACB$，且 $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{DB}$，$CD=2$，求 $\triangle ABC$ 的面积.

【命题意图】本小题主要考查解三角形、三角恒等变换等基础知识，考查推理论证、运算求解等能力，考查数形结合和化归与转化等思想，体现综合性与应用性，导向对发展直观想象、逻辑推理及数学运算等核心素养的关注.

【试题解析】解法一：

（1）因为 $c\cos B+(b+2a)\cos C=0$，

所以由正弦定理，可得 $\sin C\cos B+(\sin B+2\sin A)\cos C=0$，……………… 1 分

即 $\sin C\cos B+\sin B\cos C+2\sin A\cos C=0$，$\sin(B+C)+2\sin A\cos C=0$，…2 分

所以 $\sin A+2\sin A\cos C=0$，…………………………………………………… 3 分

又 $\sin A>0$，所以 $\cos C=-\dfrac{1}{2}$，……………………………………………… 4 分

因为 $C\in(0,\pi)$，所以 $C=\dfrac{2}{3}\pi$. ………………………………………………… 5 分

（2）因为 $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{DB}$，所以 $\overrightarrow{CD}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{CB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{CA}$，……………………………………6 分

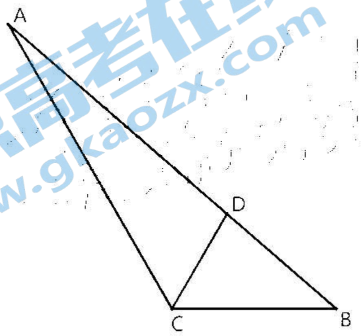
两边平方，得 $\overrightarrow{CD}^2=\dfrac{4}{9}\overrightarrow{CB}^2+\dfrac{1}{9}\overrightarrow{CA}^2+\dfrac{4}{9}\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}$，………………………… 7 分

即 $4a^2+b^2-2ab=36$①. ……………………………………………………………… 8 分

又因为 CD 平分 $\angle ACB$，所以 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{AD}{DB}=2$，即 $b=2a$②. ……………………9 分

由①②，解得 $a=3,b=6$. …………………………………………………………… 10 分

所以 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=9\sin\dfrac{2}{3}\pi=\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$. ………………………………… 12 分



解法二：

（1）在$\triangle ABC$中，由余弦定理，得$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，

……1分

又因为$c\cos B+(b+2a)\cos C=0$，

所以$\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2a}+\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2a}+\dfrac{a^2+b^2-c^2}{b}=0$，……2分

即$a^2+b^2-c^2=-ab$，……3分

所以$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=-\dfrac{1}{2}$，……4分

因为$C\in(0,\pi)$，所以$C=\dfrac{2}{3}\pi$．……5分

（2）在$\triangle ABC$中，$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{DB}$，所以$\dfrac{AD}{DB}=2$，……6分

又因为CD平分$\angle ACB$，所以$\dfrac{b}{a}=\dfrac{AD}{DB}=2$，即$b=2a$①．……7分

在$\triangle ACD$中，由余弦定理，得$CA^2+CD^2-AD^2=2CA\cdot CD\cos\angle ACD$，

即$b^2+4-\dfrac{4}{9}c^2=2b$②．……8分

在$\triangle BCD$中，由余弦定理，得$CD^2+CB^2-BD^2=2CD\cdot CB\cos\angle DCB$，

即$a^2+4-\dfrac{1}{9}c^2=2a$③．……9分

由①②③解得$a=3$，$b=6$．……10分

所以$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=9\sin\dfrac{2}{3}\pi=\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$．……12分

解法三：（1）同解法一．……5分

（2）过D点作$DE/\!/AC$交CB于点E．……6分

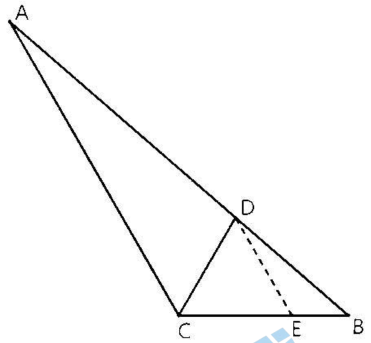
因为$\angle ACB=120°$，且CD平分$\angle ACB$，

所以$\angle ACD=\angle CDE=\angle DCE=60°$，……7分

所以$\triangle CDE$为等边三角形，所以$CD=CE=DE=2$．……8分

又因为$\dfrac{DE}{AC}=\dfrac{BE}{BC}=\dfrac{BD}{BA}=\dfrac{1}{3}$，所以$BC=3$，$AC=6$．……10分

所以$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=9\sin\dfrac{2}{3}\pi=\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$．……12分



解法四：（1）同解法一．……………………………………………………………5 分

（2）在$\triangle ABC$中，$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{DB}$，所以$\dfrac{AD}{DB}=2$．……………………………………6 分

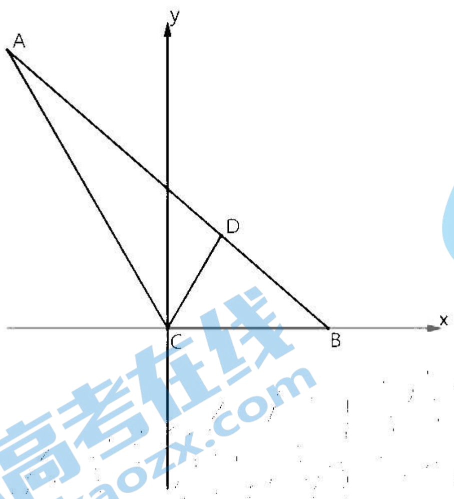
又因为CD平分$\angle ACB$，所以$\dfrac{b}{a}=\dfrac{AD}{DB}=2$．……………………………………7 分

如图，以C为原点建系：$C(0,0)$，$B(a,0)$，$A(-a,\sqrt{3}a)$，$D(\dfrac{1}{3}a,\dfrac{\sqrt{3}}{3}a)$．…8 分

由$CD=2$，所以$(\dfrac{1}{3}a)^2+(\dfrac{\sqrt{3}}{3}a)^2=4$，所以$a=3$，……………………………9 分

则$b=6$．………………………………………………………………………10 分

所以$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=9\sin\dfrac{2}{3}\pi=\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$．……………………………………12 分



20．（12 分）

已知函数 $f(x)=(x-2)(ae^{x}-x)$.

（1）当 $a=4$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

（2）讨论 $f(x)$ 的单调性.

【命题意图】本小题主要考查运用导数求切线方程，判断函数的单调性等基础知识；考查推理论证、运算求解等能力；考查化归与转化、数形结合等数学思想；体现综合性、应用性与创新性，导向对发展逻辑推理、数学运算、直观想象等核心素养的关注.

【试题解析】

（1） 由已知 $f(x)=(x-2)(ae^{x}-x)$，

则 $f'(x)=ae^{x}-x+ae^{x}(x-2)-(x-2)=(x-1)(ae^{x}-2)$， ……………………………1分

当 $a=4$ 时， $f(0)=-8$， $f'(0)=-2$， ……………………………………………… 3分

则曲线 $y=f(x)$ 在 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y+8=-2x$， 即 $2x+y+8=0$． · 4 分

（2） 由（1）知， $f'(x)=(x-1)(ae^{x}-2)$，

①当 $a\leqslant 0$ 时， $ae^{x}-2<0$，

当 $x\in(-\infty,1)$ 时， $f'(x)>0$， $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 单调递增； ………………………… 5 分

当 $x\in(1,+\infty)$ 时， $f'(x)<0$， $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递减； ………………………… 6 分

②当 $a>0$ 时，由 $f'(x)=(x-1)(ae^{x}-2)=0$， 得 $x_1=1$， $x_2=\ln\frac{2}{a}$， ………… 7 分

（i）当 $0<a<\frac{2}{e}$ 时， $x_1<x_2$，

当 $x\in(-\infty,1)\cup(\ln\frac{2}{a},+\infty)$ 时， $f'(x)>0$， $f(x)$ 在 $(-\infty,1),(\ln\frac{2}{a},+\infty)$ 单调递增；

……………………………………………………………………………………………8 分

当 $x\in(1,\ln\frac{2}{a})$ 时， $f'(x)<0$， $f(x)$ 在 $(1,\ln\frac{2}{a})$ 单调递减； ……………………… 9 分

（ii）当 $a=\frac{2}{e}$ 时， $x_1=x_2=1$， $f'(x)\geqslant 0$， $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 单调递增； ……………10 分

（iii）当 $a>\frac{2}{e}$ 时， $x_1>x_2$，

当 $x\in(-\infty,\ln\frac{2}{a})\cup(1,+\infty)$ 时， $f'(x)>0$， $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln\frac{2}{a}),(1,+\infty)$ 单调递增；

…………………………………………………………………………………………… 11 分

当 $x\in(\ln\frac{2}{a},1)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $(\ln\frac{2}{a},1)$ 单调递减；

综上可得：①当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 单调递增，在 $(1,+\infty)$ 单调递减；

②当 $0<a<\frac{2}{\mathrm{e}}$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,1),(\ln\frac{2}{a},+\infty)$ 单调递增，在 $(1,\ln\frac{2}{a})$ 单调递减；

③当 $a=\frac{2}{\mathrm{e}}$ 时，$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 单调递增；

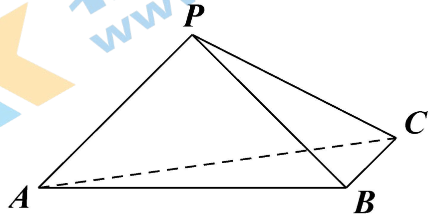
④当 $a>\frac{2}{\mathrm{e}}$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,\ln\frac{2}{a}),(1,+\infty)$ 单调递增，在 $(\ln\frac{2}{a},1)$ 单调递减. … 12 分

21．（12 分）

如图，三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA\perp PB$，$PA=PB$，$AB=2BC=2$，平面 $PAB\perp$ 平面 ABC．

（1）求三棱锥 $P-ABC$ 的体积的最大值；

（2）求二面角 $P-AC-B$ 的正弦值的最小值.



【命题意图】本小题主要考查线面垂直的判定定理，面面垂直的性质定理，三棱锥体积，二面角，三角形面积等基础知识；考查空间想象能力、推理论证及运算求解能力；考查数形结合思想、化归与转化思想等；体现基础性、综合性与应用性，导向对发展逻辑推理、数学运算、直观想象等核心素养的关注.

【试题解析】解法一：（1）取 AB 的中点 O，连接 PO．

因为 $PA=PB$，所以 $PO\perp AB$． ……………………………………………………1 分

又因为平面 $PAB\perp$ 平面 ABC，平面 $PAB\cap$ 平面 $ABC=AB$，$PO\subset$ 平面 PAB，

所以 $PO\perp$ 平面 ABC． ………………………………………………………………… 2 分

因为 $PA\perp PB$，$PA=PB$，$AB=2BC=2$，

所以 $PO=1$，$BC=1$． ……………………………………………………………………3 分

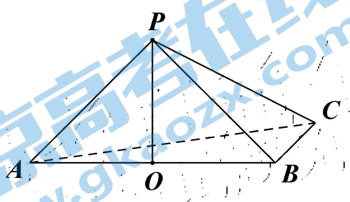
所以三棱锥 $P-ABC$ 的体积为

$$V_{P-ABC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot PO=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin\angle ABC\right)\cdot PO=\frac{1}{3}\cdot\sin\angle ABC，$$ ………4 分

因为 $\angle ABC\in(0,\pi)$，所以 $0<\sin\angle ABC\leqslant 1$，$V_{P-ABC}\leqslant\frac{1}{3}$，

当且仅当 $\sin\angle ABC=1$，即 $\angle ABC=\frac{\pi}{2}$ 时，等号成立.

故三棱锥 $P-ABC$ 的体积的最大值为 $\frac{1}{3}$． ……………………………………………5分



（2）由（1）可知 $PO\perp$ 平面 ABC，所以 $PO\perp AC$． ……………………………6 分

过 O 作 $OD\perp AC$ 于 D，连结 PD．

因为 $PO \cap OD = O$，所以 $AC \perp$ 平面 POD， ······························ 7 分

又 $PD \subset$ 平面 POD，所以 $PD \perp AC$，

所以 $\angle PDO$ 为二面角 $P-AC-B$ 的平面角. ···································· 8 分

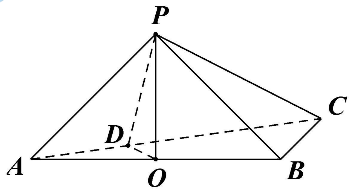
在 $\mathrm{Rt}\triangle PDO$ 中， $\tan\angle PDO = \dfrac{PO}{OD} = \dfrac{1}{OD}$， ······································9 分

因为 $0 < OD \leqslant \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{1}{2}$，当且仅当 $BC \perp AC$ 时等号成立. ······················ 10 分

所以 $\tan\angle PDO$ 的最小值为 2. ··· 11 分

此时 $\sin\angle PDO$ 取得最小值 $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

故二面角 $P-AC-B$ 的正弦值的最小值为 $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. ································ 12 分



解法二：（1）同解法一. ··· 5 分

（2）由（1）可知 $PO \perp$ 平面 ABC，

以 O 为坐标原点，向量 $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OP}$ 为 x 轴， z 轴正方向，建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$. 则 $P(0,0,1)$， $A(-1,0,0)$， $B(1,0,0)$， $\overrightarrow{AP} = (1,0,1)$.

设 $C(x_0, y_0, 0)(0 < x_0 < 2, y_0 \neq 0)$，则 $\overrightarrow{AC} = (x_0 + 1, y_0, 0)$. ································ 6 分

设平面 PAC 的法向量为 $\boldsymbol{m} = (x, y, z)$.

则 $\begin{cases} \boldsymbol{m} \cdot \overrightarrow{AP} = 0, \\ \boldsymbol{m} \cdot \overrightarrow{AC} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x + z = 0, \\ (x_0 + 1)x + y_0 y = 0, \end{cases}$ 取 $x = -1$，则 $\boldsymbol{m} = (-1, \dfrac{x_0 + 1}{y_0}, 1)$. ······· 7 分

又平面 ABC 的法向量为 $\boldsymbol{n} = (0,0,1)$. ··· 8 分

设二面角 $P-AC-B$ 的大小为 θ， $\theta \in (0, \pi)$.

所以 $\cos\theta = \dfrac{|\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}| \cdot |\boldsymbol{n}|} = \dfrac{1}{\sqrt{2 + \left(\dfrac{x_0 + 1}{y_0}\right)^2}}$. ··9 分

因为 $BC = 1$，所以 $(x_0 - 1)^2 + y_0^{\ 2} = 1$， ··10分

令 $t=\left(\frac{x_0+1}{y_0}\right)^2\ (t>0)$，则 $t=\frac{(x_0+1)^2}{1-(x_0-1)^2}$，

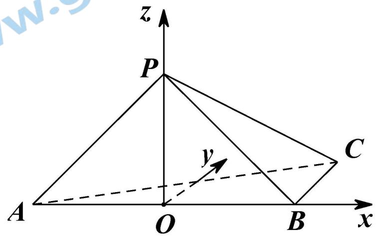
整理可得 $(t+1)x_0^2+(2-2t)x_0+1=0$，

所以 $\Delta=(2-2t)^2-4(t+1)\geqslant 0$，解得 $t\geqslant 3$. ……………………………………………… 11分

所以当 $t=3$，即 $x_0=\frac{1}{2}$，$y_0=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时，$\cos\theta$ 取得最大值 $\frac{\sqrt{5}}{5}$，

此时 $\sin\theta$ 取得最小值 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

故二面角 $P-AC-B$ 的正弦值的最小值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. ……………………………… 12分



解法三：（1）同解法一. ……………………………………………………………………5 分

（2）由（1）可知 $PO\perp$ 平面 ABC，

以 B 为坐标原点，向量 $\overrightarrow{BA}$ 为 y 轴正方向，建立如图所示的空间直角坐标系…

$O-xyz$. 则 $P(0,1,1)$，$A(0,2,0)$，$B(0,0,0)$，$\overrightarrow{AP}=(0,-1,1)$.

设 $C(x_0,y_0,0)(-1<x_0<1,y_0\neq 0)$，则 $\overrightarrow{AC}=(x_0,y_0-2,0)$. ……………………6 分

设平面 PAC 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$.

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AP}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-y+z=0,\\ x_0x+(y_0-2)y=0,\end{cases}$ 取 $y=1$，则 $\boldsymbol{m}=(1,\frac{2-y_0}{x_0},1)$. ………7 分

又平面 ABC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(0,0,1)$. ……………………………………………… 8 分

设二面角 $P-AC-B$ 的大小为 θ，$\theta\in(0,\pi)$.

所以 $\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{1}{\sqrt{2+\left(\frac{2-y_0}{x_0}\right)^2}}$. ……………………………………………9 分

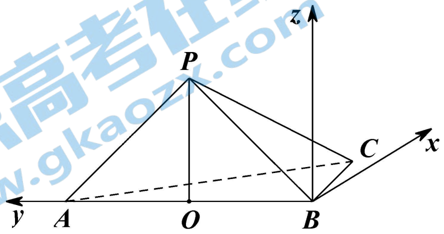
因为 $BC=1$，所以 $x_0^2+y_0^2=1$，……………………………………………………………10分

令 $t=\dfrac{y_0-2}{x_0}$，表示圆 $x_0{}^2+y_0{}^2=1$ 上的点与点 $(0,2)$ 的斜率，

所以 $t\leqslant -\sqrt{3}$ 或 $t\geqslant\sqrt{3}$，所以 $(\dfrac{y_0-2}{x_0})^2\geqslant 3$，

即 $x_0=\dfrac{1}{2},y_0=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 时，$\cos\theta$ 取得最大值 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，此时 $\sin\theta$ 取得最小值 $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

故二面角 $P-AC-B$ 的正弦值的最小值为 $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. ································ 12分



22.（12 分）

已知椭圆$E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率是$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，上、下顶点分别为$A,B$．圆$O:x^2+y^2=2$与$x$轴正半轴的交点为$P$，且$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=-1$．

（1）求E的方程；

（2）直线l与圆O相切且与E相交于M,N两点，证明：以MN为直径的圆恒过定点．

【命题意图】本小题主要考查椭圆的标准方程，直线与圆的位置关系等基础知识；考查运算求解、逻辑推理和创新能力等；考查数形结合、函数与方程等思想；体现基础性、综合性与创新性，导向对直观想象、逻辑推理、数学运算等核心素养的关注．

【试题解析】解法一：（1）由已知得$A(0,b)$，$B(0,-b)$，$P(\sqrt{2},0)$．……………………… 1分

则$\overrightarrow{PA}=(-\sqrt{2},b)$，$\overrightarrow{PB}=(-\sqrt{2},-b)$，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=2-b^2=-1$，所以$b^2=3$．……3 分

因为$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，又$b^2+c^2=a^2$，所以$c^2=3$，$a^2=6$．

故E的方程为$\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}=1$．……………………………………………………4 分

（2）当直线l的斜率存在时，设l的方程为$y=kx+m$，即$kx-y+m=0$．… 5 分

因为直线l与圆O相切，所以$\dfrac{|m|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{2}$，即$m^2=2k^2+2$．………………6 分

设$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则$y_1=kx_1+m$，$y_2=kx_2+m$．

由$\begin{cases}y=kx+m,\\ \dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}=1,\end{cases}$

化简，得$(2k^2+1)x^2+4kmx+2m^2-6=0$，………………………………7 分

由韦达定理，得$\begin{cases}x_1+x_2=-\dfrac{4km}{2k^2+1},\\ x_1x_2=\dfrac{2m^2-6}{2k^2+1},\end{cases}$ …………………………………………8 分

所以$y_1y_2=(kx_1+m)(kx_2+m)$

$=k^2x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2$

$=k^2\cdot\dfrac{2m^2-6}{2k^2+1}-km\cdot\dfrac{4km}{2k^2+1}+m^2$

$=\dfrac{m^2-6k^2}{2k^2+1}$， …………………………………………………………9 分

所以 $x_1x_2+y_1y_2=\dfrac{2m^2-6}{2k^2+1}+\dfrac{m^2-6k^2}{2k^2+1}=\dfrac{3(m^2-2k^2-2)}{2k^2+1}=0$， ………………10 分

故 $OM\perp ON$，即以 MN 为直径的圆过原点 O. ………………………………… 11 分

当直线 l 的斜率不存在时，l 的方程为 $x=\sqrt{2}$ 或 $x=-\sqrt{2}$.

这时 $M(\sqrt{2},\sqrt{2})$，$N(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ 或 $M(-\sqrt{2},\sqrt{2})$，$N(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$.

显然，以 MN 为直径的圆也过原点 O.

综上，以 MN 为直径的圆恒过原点 O. ………………………………………… 12分

解法二：（1）同解法一. …………………………………………………………………… 4分

（2）设直线 l 与圆 O 相切于点 $Q(x_0,y_0)$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$. …………… 5 分

当 $x_0\cdot y_0\neq 0$ 时，则 $k_{OQ}=\dfrac{y_0}{x_0}$.

因为直线 l 与圆 O 相切，所以 $l\perp OQ$，所以 $k_l=-\dfrac{x_0}{y_0}$. ……………………… 6 分

则直线 l 的方程为 $y-y_0=-\dfrac{x_0}{y_0}(x-x_0)$，

因为 $x_0{}^2+y_0{}^2=2$，故 l 的方程可化为 $x_0x+y_0y=2$. ………………………… 7 分

由 $\begin{cases}x_0x+y_0y=2,\\ \dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}=1,\end{cases}$

化简，得 $(2x_0{}^2+y_0{}^2)y^2-4y_0y+4-6x_0{}^2=0$，$(2x_0{}^2+y_0{}^2)x^2-8x_0x+8-6y_0{}^2=0$.

……………………………………………………………………………………8 分

所以 $y_1y_2=\dfrac{4-6x_0{}^2}{2x_0{}^2+y_0{}^2}$，$x_1x_2=\dfrac{8-6y_0{}^2}{2x_0{}^2+y_0{}^2}$. …………………………… 9 分

所以 $x_1x_2+y_1y_2=\dfrac{8-6y_0{}^2}{2x_0{}^2+y_0{}^2}+\dfrac{4-6x_0{}^2}{2x_0{}^2+y_0{}^2}=\dfrac{12-6y_0{}^2-6x_0{}^2}{2x_0{}^2+y_0{}^2}=0$， …………10 分

故 $OM\perp ON$，即以 MN 为直径的圆过原点 O. ………………………………… 11 分

当 $x_0\cdot y_0=0$ 时，则 $Q(\pm\sqrt{2},0)$ 或 $Q(0,\pm\sqrt{2})$，

这时 $M(\sqrt{2},\sqrt{2})$，$N(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ 或 $M(-\sqrt{2},\sqrt{2})$，$N(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$.

显然，以 MN 为直径的圆也过原点 O.

综上，以 MN 为直径的圆恒过原点 O. ………………………………………… 12分