2022 北京昌平二中高二（上）期中
数　　学

2022.11

本试卷共 4 页，共 150 分。 考试时长 120 分钟。 考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将答题卡交回。

第一部分（选择题　共 50 分）

一、选择题：（本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分. 在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。）

(1)已知直线 $l:\sqrt{3}x-y-4=0$，则直线 l 的倾斜角为

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{2\pi}{3}$　　D. $\frac{5\pi}{6}$

(2) 已知 $A(1,1,1),B(-3,1,5)$，则 $|\overrightarrow{AB}|$ 的值为(　　)

A. $5\sqrt{2}$　　B. 5　　C. $4\sqrt{2}$　　D. 4

(3) 已知直线 $l:x+y+1=0$，则下列结论正确的个数是(　　)

①直线 l 的截距为1

②向量 $\vec{v}=(1,1)$ 是直线 l 的一个法向量

③过点 $(1,3)$ 与直线 l 平行的直线方程为 $x+y-4=0$

④若直线 $m:x-y+1=0$，则 $l\perp m$

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

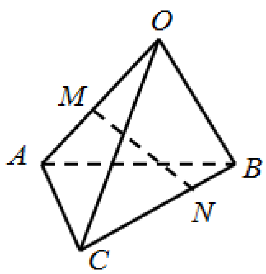
(4) 圆 $x^2+y^2-2x+4y+1=0$ 与圆 $(x-4)^2+(y-2)^2=16$ 的位置关系为(　　)

A. 相离　　B. 外切　　C. 相交　　D. 内切

(5) 如图，空间四边形 $OABC$ 中，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$，点 M 是 OA 的中点，点 N 在 BC 上，且 $\overrightarrow{CN}=2\overrightarrow{NB}$，设 $\overrightarrow{MN}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$，则 x，y，z 的值为(　　)

A. $-\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{1}{3}$　　B. $-\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3}$

C. $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3}$　　D. $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{1}{3}$



(6) 已知直线 $l:x+2y-3=0$ 与圆 $(x-2)^2+y^2=4$ 交于 A，B 两点，求线段 AB 的中垂线方程(　　)

A. $2x-y-4=0$　　B. $2x-y-2=0$

C. $2\sqrt{5}x-\sqrt{5}y-1=0$　　D. $2\sqrt{5}x-\sqrt{5}y-\sqrt{19}=0$

(7)已知空间中三点 $A(0,0,2),B(1,0,2),C(0,2,0)$，则点 A 到直线 BC 的距离为(　　)

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. $2\sqrt{2}$　　D. $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

(8) 已知 P 为椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上的点，点 P 到椭圆焦点的距离的最小值为 2，最大值为 18，则椭圆的离心率为(　　)

A. $\dfrac{3}{5}$　　B. $\dfrac{4}{5}$　　C. $\dfrac{5}{4}$　　D. $\dfrac{5}{3}$

(9) “方程 $\dfrac{x^2}{5-m}+\dfrac{y^2}{m+3}=1$ 表示椭圆”是“$-3<m<5$”的(　　)

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分条件又不必要条件

(10)设 F_1,F_2 分别是椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 的左、右焦点, 点 P 为椭圆上任意一点，则使得 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=1$ 成立的点 P 的个数为（　　）

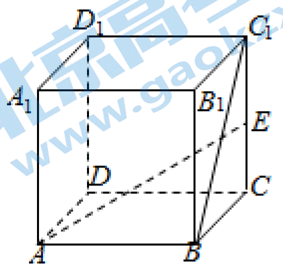
A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

第二部分（非选择题　共 100 分）

二、填空题：（本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．请把答案填在答题纸的相应位置）

(11)已知 $\vec{a}=(2,-1,3)$，$\vec{b}=(-3,y,4)$，若 $\vec{a}\perp\vec{b}$，则 $y=$______．

(12) 长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中 $AB=AA_1=2$，$AD=1$，E 为 CC_1 的中点，则异面直线 BC_1 与 AE 所成角的余弦值为________．



(13)直线 $y=mx+2m-1$ 经过一定点 C，则点 C 的坐标为________，以点 C 为圆心且过原点的圆的方程为________________．

(14) 设 F_1,F_2 分别是椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$ 的左、右焦点，点 P 在椭圆上，则 ΔPF_1F_2 的周长为______，若 $\angle F_1PF_2=60^0$，则 ΔPF_1F_2 的面积为_________．

(15) 如果实数 x，y 满足等式 $(x-2)^2+y^2=1$，那么 $\dfrac{y+3}{x-1}$ 的取值范围是______ ．

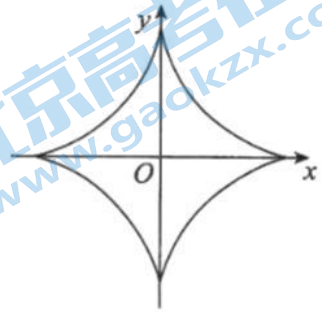
(16) 星形线又称为四尖瓣线，是数学中的瑰宝，在生产和生活中有很大应用，$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$便是它的一种表达式，

①星形线关于 $y=x$ 对称

②星形线图象围成的面积小于 2

③星形线上的点到x轴，y轴距离乘积的最大值为$\frac{1}{4}$

④星形线上的点到原点距离的最小值为$\frac{1}{2}$



上述说法正确的是有_________.

三、解答题：本大题共 5 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

(17) 本小题满分 14 分

在平面直角坐标系中，已知ΔABC三个顶点的坐标分别为$A(-2,1),B(2,1),C(4,-3)$

(Ⅰ)设 AC 的中点为D，求 AC 边上的中线BD所在的直线方程；

(Ⅱ)求 BC 边上的高所在的直线方程；

(Ⅲ)求ΔABC的面积.

(18) 本小题满分 14 分

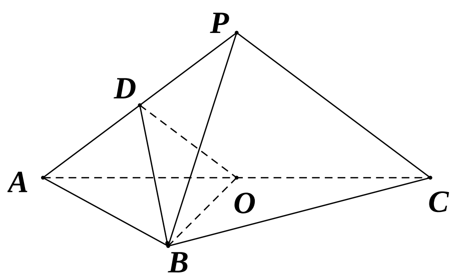
已知点 $A(1,4)$，$B(3,-2)$，以 AB 为直径的圆记为圆C .

(Ⅰ)求圆C的方程；

(Ⅱ)若过点$P(0,-2)$的直线l与圆C交于M，N两点，且$|MN|=2\sqrt{6}$，求直线l的方程.

(19) 本小题满分 14 分

如图，平面$PAC\perp$平面ABC，$AB\perp BC$，$AB=BC$，D，O分别为PA，AC的中点，$AC=8$，$PA=PC=5$.



(Ⅰ)设平面$PBC\cap$平面$BOD=l$，判断直线l与PC的位置关系，并证明；

（Ⅱ）求直线 PB 与平面 BOD 所成角的正弦值.

(20) 本小题满分 14 分

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的一个顶点为 $P(0,1)$，且离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）直线 $l:y=x+m$ 与椭圆 C 交于 A,B 两点，且 $|PA|=|PB|$，求 m 的值.

(21) 本小题满分 14 分

已知集合 $S_n=\left\{X\,\middle|\,X=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right),x_i\in N^*,i=1,2,\cdots,n\right\}(n\geq 2)$. 对于 $A=\left(a_1,a_2,\cdots,a_n\right)$，$B=\left(b_1,b_2,\cdots,b_n\right)\in S_n$，定义 $\overrightarrow{AB}=\left(b_1-a_1,b_2-a_2,\cdots,b_n-a_n\right)$；$\lambda\left(a_1,a_2,\cdots,a_n\right)=\left(\lambda a_1,\lambda a_2,\cdots,\lambda a_n\right)$ $(\lambda\in R)$；A 与 B 之间的距离 $d(A,B)=\sum\limits_{i=1}^{n}\left|a_i-b_i\right|$.

（Ⅰ）当 $n=5$ 时，设 $A=(1,2,1,2,5)$，$B=(2,4,2,1,3)$，求 $d(A,B)$；

（Ⅱ）证明：若 $A,B,C\in S_n$，且 $\exists\lambda>0$，使 $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{BC}$，则 $d(A,B)+d(B,C)=d(A,C)$；

（Ⅲ）记 $I=(1,1,\cdots,1)\in S_{20}$. 若 $A,B\in S_{20}$，且 $d(I,A)=d(I,B)=13$，求 $d(A,B)$ 的最大值.

参考答案

第一部分（选择题　共 50 分）

一、选择题：（本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。）

(1) B.
(2) C.

(3) B.

(4) C.

(5) A.

(6) A.

(7)D.

(8) B.

(9) A.

(10)D.

第二部分（非选择题　共 100 分）

二、填空题：（本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．请把答案填在答题纸的相应位置）

(11) 6

(12) $\dfrac{\sqrt{30}}{10}$

(13) $(-2,-1)$，$(x+2)^2+(y+1)^2=5$

(14) 10，$\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$

(15) $\left[\dfrac{4}{3},+\infty\right)$

(16)①②④

三、解答题：本大题共 4 小题，共 60 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

(17) 解:(Ⅰ) $D(1,-1)$ ························2 分

$k_{BD}=\dfrac{1-(-1)}{2-1}=2$ ························2 分

所以 AC 边上的中线 BD 所在的直线方程为 $y-1=2(x-2)$ 即: $2x-y-3=0$ ·········1 分

(Ⅱ) 设 $AH\perp BC$，交 BC 与点 H

$k_{BC}=\dfrac{1-(-3)}{2-4}=-2$ ························1 分

所以 $k_{AH}k_{BC}=-1$ ························1 分

所以 $k_{AH}=\frac{1}{2}$ ……………………………1 分

所以 AC 边上的高所在的直线方程为 $y-1=\frac{1}{2}\left[x-(-2)\right]$ 即：$x-2y+4=0$ ……………………1 分

(III) 由(II)知 $k_{BC}=-2$，

所以直线 BC 的方程为 $y-1=-2(x-2)$ 即：$2x+y-5=0$ ……………………1 分

所以点 A 到直线 BC 的距离 $d=\frac{|-4+1-5|}{\sqrt{5}}=\frac{8\sqrt{5}}{5}$ ……………………2 分

$|BC|=\sqrt{[(4-2]^2+(-3-1)^2}=2\sqrt{5}$ ……………………………1 分

所以 ΔABC 的面积为：$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}|BC|\cdot d=\frac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times\frac{8\sqrt{5}}{5}=8$ ………………1 分

(18)解：(Ⅰ)由 $A(1,4)$，$B(3,-2)$，得 AB 的中点坐标为 $(2,1)$，即圆心坐标为 $(2,1)$，……………………2 分

半径 $r=\frac{1}{2}|AB|=\sqrt{10}$， ……………………2 分

故圆 C 的方程为 $(x-2)^2+(y-1)^2=10$. ……………………2 分

(Ⅱ)由 $|MN|=2\sqrt{6}$，

可得弦心距为 $d=\sqrt{10-\left(\sqrt{6}\right)^2}=2$， ……………………2 分

(i)当直线的斜率不存在时，直线 l 的方程为 $x=0$，

圆心到直线 l 的距离为 2，所以满足题意； ……………………2 分

(ii)当直线 l 的斜率存在时，设直线方程为 $y+2=kx$，即 $kx-y-2=0$.

圆心 C 到直线 l 的距离 $d=\frac{|2k-3|}{\sqrt{1+k^2}}=2$，解得 $k=\frac{5}{12}$， ……………………2 分

直线 l 的方程为 $5x-12y-24=0$， ……………………2 分

故直线 l 的方程为 $x=0$ 或 $5x-12y-24=0$.

(19)解：(Ⅰ) 直线 $l\,//\,PC$，证明如下：

因为 D，O 分别为 PA，AC 中点，

所以 $DO\,//\,PC$. ………………1 分

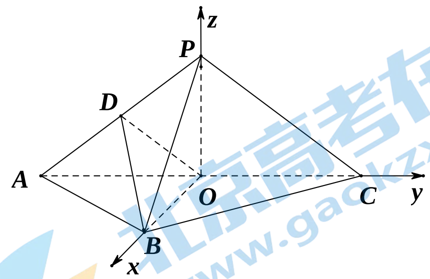
又因为 $DO\subset$ 平面 BOD，$PC\not\subset$ 平面 BOD，………………1 分

所以 $PC\,//$ 平面 BOD. ………………1 分

因为 $PC\subset$ 平面 PBC，平面 $PBC\cap$ 平面 $BOD=l$，………………1 分

所以 $l \mathbin{/\mkern-6mu/} PC$.　　　　　　..................1 分

（Ⅱ）连结 PO.



因为 $PA=PC$， O 为 AC 中点，

所以 $PO\perp AC$.　　　　　　..................1 分

因为平面 $PAC\perp$ 平面 ABC，

平面 $PAC\cap$ 平面 $ABC=AC$，　$PO\subset$ 平面 ABC

所以 $PO\perp$ 平面 ABC.　　　　　　..................1 分

所以 $PO\perp OB$.　　　　　　..................1 分

因为 $AB=BC$，所以 $OB\perp AC$.　　　..................1 分

如图，建立空间直角坐标系 $O-xyz$，

则 $O(0,0,0)$， $A(0,-4,0)$， $B(4,0,0)$，　$P(0,0,3)$.

因为点 D 为 PA 中点，所以 $D(0,-2,\frac{3}{2})$.

所以 $\overrightarrow{OD}=(0,-2,\frac{3}{2})$， $\overrightarrow{OB}=(4,0,0)$.

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 为平面 BOD 的法向量，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{OB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{OD}=0,\end{cases}$　即 $\begin{cases}4x=0,\\ -2y+\frac{3}{2}z=0.\end{cases}$

令 $z=4$，则 $x=0$， $y=3$，可得 $\boldsymbol{n}=(0,3,4)$.　　　　..................2 分

设直线 PB 与平面 BOD 所成角为 α，

因为 $\overrightarrow{PB}=(4,0,-3)$，　　　　　　..................1 分

所以 $\sin\alpha=\left|\cos<\overrightarrow{PB},\boldsymbol{n}>\right|=\frac{\left|\overrightarrow{PB}\cdot\boldsymbol{n}\right|}{\left|\overrightarrow{PB}\right|\cdot\left|\boldsymbol{n}\right|}=\frac{12}{25}$.　　　..................2 分

所以直线 PB 与平面 BOD 所成角的正弦值为 $\frac{12}{25}$.

(20)解：（Ⅰ）设椭圆的半焦距为 c.

由题意得 $\begin{cases}b=1,\\ \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2},\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$　　　　　.........3 分

解得 $a=2$.　　　　　　　　.........1 分

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.　　　　　.........1 分

（Ⅱ）由 $\begin{cases} y = x + m, \\ \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases}$ 得 $5x^2 + 8mx + 4(m^2 - 1) = 0$． ………2 分

由 $\varDelta = (8m)^2 - 4\times5\times4(m^2-1) > 0$，解得 $-\sqrt{5} < m < \sqrt{5}$． ………1 分

设 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，则 $x_1 + x_2 = -\dfrac{8m}{5}$． ………1 分

设线段 AB 的中点为 D，

则 $x_D = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = -\dfrac{4m}{5}$，$y_D = x_D + m = \dfrac{m}{5}$． ………2 分

“$|PA| = |PB|$” 等价于 “$PD \perp AB$”． ………1 分

所以 $\dfrac{1 - \dfrac{m}{5}}{\dfrac{4m}{5}} = -1$． ………1 分

解得 $m = -\dfrac{5}{3}$，符合题意． ………1 分

所以 $m = -\dfrac{5}{3}$．

(21)(Ⅰ)解：当 $n = 5$ 时，由 $d(A,B) = \sum_{i=1}^{5} |a_i - b_i|$，

得 $d(A,B) = |1-2| + |2-4| + |1-2| + |2-1| + |5-3|$ ………2 分

$= 7$ ………1 分

(Ⅱ)证明：设 $A = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$，$B = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$，$C = (c_1, c_2, \cdots, c_n)$，

所以 $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, \cdots, b_n - a_n)$，$\overrightarrow{BC} = (c_1 - b_1, c_2 - b_2, \cdots c_n - b_n)$ ………2 分

因为 $\exists\lambda > 0$，使 $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{BC}$，

所以 $\exists\lambda > 0$，使 $(b_1 - a_1, b_2 - a_2, \cdots, b_n - a_n) = \lambda(c_1 - b_1, c_2 - b_2, \cdots c_n - b_n)$， ………1 分

即 $\exists\lambda > 0$，使 $b_i - a_i = \lambda(c_i - b_i)$，其中 $i = 1, 2, \cdots, n$

所以 $b_i - a_i$ 与 $c_i - b_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 同为非负数或同为负数． ………1 分

所以 $d(A,B) + d(B,C) = \sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i| + \sum_{i=1}^{n} |b_i - c_i|$

$= \sum_{i=1}^{n} (|a_i - b_i| + |b_i - c_i|)$ ………1 分

$= \sum_{i=1}^{n} |a_i - c_i| = d(A,C)$ ………1 分

(Ⅲ) 解：设 $A = (a_1, a_2, \cdots, a_{20})$，$B = (b_1, b_2, \cdots, b_{20})$，

因为 $I=(1,1,\cdots,1)\in S_{20}$

所以 $d(I,A)=\sum_{i=1}^{20}|1-a_i|=\sum_{i=1}^{20}|a_i-1|=13$，$d(I,B)=\sum_{i=1}^{20}|1-b_i|=13$ ………1 分

因为 $d(A,B)=\sum_{i=1}^{20}|a_i-b_i|$

$=\sum_{i=1}^{20}|(a_i-1)+(1-b_i)|$ ………1 分

$\le\sum_{i=1}^{20}(|a_i-1|+|i-b_i|)$ ………1 分

$=\sum_{i=1}^{20}|a_i-1|+\sum_{i=1}^{20}|1-b_i|=13+13=26$ ………1 分

当 $A=(1,1,\cdots,14)$，$B=(14,1,\cdots,1)$ 时，等号成立 ………1 分

所以 $d(A,B)$ 的最大值为 26

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 " 精益求精、专业严谨 " 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。