丰台区 2023～2024 学年度第一学期期末练习

高二数学

2024.01

考生须知	
考生须知	1. 答题前，考生务必先将答题卡上的学校、班级、姓名、教育 ID 号用黑色字迹签字笔填写清楚，并认真核对条形码上的教育 ID 号、姓名，在答题卡的"条形码粘贴区"贴好条形码。 2. 本次练习所有答题均在答题卡上完成。选择题必须使用 2B 铅笔以正确填涂方式将各小题对应选项涂黑，如需改动，用橡皮擦除干净后再选涂其它选项。非选择题必须使用标准黑色字迹签字笔书写，要求字体工整、字迹清楚。 3. 请严格按照答题卡上题号在相应答题区内作答，超出答题区域书写的答案无效，在练习卷、草稿纸上答题无效。 4. 本练习卷满分共 150 分，作答时长 120 分钟。

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1．已知直线 l 经过 $A(-1,0),B(0,\sqrt{3})$ 两点，则直线 l 的倾斜角为

（A）30°　（B）60°　（C）120°　（D）150°

2．已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $a_{n+1}=-3a_n$，$S_3=7$，则 $a_1=$

（A）-3　（B）-1　（C）1　（D）3

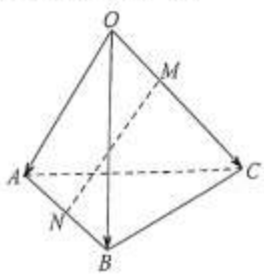
3．已知抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点为 F，点 $P(m,n)$ 在抛物线 C 上．若 $|PF|=3$，则 $m=$

（A）2　（B）3　（C）4　（D）5

4．已知椭圆 $\dfrac{x^2}{m-3}+\dfrac{y^2}{7-m}=1$ 的焦点在 x 轴上，则 m 的取值范围是

（A）$3<m<7$　（B）$3<m<5$　（C）$5<m<7$　（D）$m>3$

5．如图，在四面体 $OABC$ 中，$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$．点 M 在 OC 上，且 $OM=\dfrac{1}{2}MC$，N 为 AB 的中点，则 $\overrightarrow{MN}=$



（A）$-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}+\dfrac{1}{3}\boldsymbol{c}$　（B）$-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}-\dfrac{1}{3}\boldsymbol{c}$

（C）$\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}+\dfrac{1}{3}\boldsymbol{c}$　（D）$\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}-\dfrac{1}{3}\boldsymbol{c}$

6. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，点 P 在椭圆 C 上. 若 $\angle F_1PF_2=90^\circ$，则 $\triangle F_1PF_2$ 的面积为

（A）2　　（B）4　　（C）8　　（D）9

7. 月相是指天文学中对于地球上看到的月球被太阳照亮部分的称呼. 1854 年，爱尔兰学者在大英博物馆所藏的一块巴比伦泥板上发现了一个记录连续 15 天月相变化的数列，记为 $\{a_n\}$，其将满月等分成 240 份，$a_i(1\leqslant i\leqslant 15$ 且 $i\in\mathbf{N}^*)$ 表示第 i 天月球被太阳照亮部分所占满月的份数. 例如，第 1 天月球被太阳照亮部分占满月的 $\frac{5}{240}$，即 $a_1=5$；第 15 天为满月，即 $a_{15}=240$. 已知 $\{a_n\}$ 的第 1 项到第 5 项是公比为 q 的等比数列，第 5 项到第 15 项是公差为 d 的等差数列，且 q,d 均为正整数，则 $a_5=$

（A）40　　（B）80　　（C）96　　（D）112

8. 已知点 P 在由直线 $y=x+3$，$y=5$ 和 $x=-1$ 所围成的区域内（含边界）运动，点 Q 在 x 轴上运动. 设点 $T(4,1)$，则 $|QP|+|QT|$ 的最小值为

（A）$\sqrt{30}$　　（B）$4\sqrt{2}$　　（C）$\sqrt{34}$　　（D）$2\sqrt{10}$

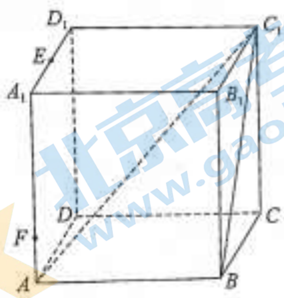
9. 如图，在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为棱 A_1D_1 的中点，F 为棱 AA_1 上一动点. 给出下列四个结论：

①存在点 F，使得 EF // 平面 ABC_1；

②直线 EF 与 BC_1 所成角的最大值为 $\frac{\pi}{2}$；

③点 A_1 到平面 ABC_1 的距离为 $\sqrt{2}$；

④点 A_1 到直线 AC_1 的距离为 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$.



其中所有正确结论的个数为

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

10. 过双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的右焦点 F 引圆 $x^2+y^2=a^2$ 的切线，切点为 P，延长 FP 交双曲线 C 的左支于点 Q. 若 $\overrightarrow{QP}=2\overrightarrow{PF}$，则双曲线 C 的离心率为

（A）$\frac{\sqrt{41}}{5}$　　（B）$\frac{\sqrt{13}}{3}$　　（C）$\frac{5}{3}$　　（D）$\frac{\sqrt{13}}{2}$

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

11. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,2,-3)$，$\boldsymbol{b}=(-2,\lambda,6)$，若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，则 $\lambda=$____.

12. 双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$ 的渐近线方程为____.

13. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，能够说明“对 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，若 $a_{n+1}<a_n$，则 $S_2<S_1$”是假命题的 $\{a_n\}$ 的一个通项公式为 $a_n=$____.

14. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $P(2,0)$，点 Q 在圆 $x^2+y^2=8$ 上运动，当 $\angle OQP$ 取最大值时，PQ 的长为____.

15. 已知 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的无穷数列，其前 n 项和为 S_n，且 $\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{S_n}=1\ (n\in\mathbf{N}^*)$

给出下列四个结论：

①$a_2<a_1$；

②$\{a_n\}$ 各项中的最大值为 2；

③$\exists k\in\mathbf{N}^*$，使得 $a_k<1$；

④$\forall n\in\mathbf{N}^*$，都有 $S_n\geqslant n+1$.

其中所有正确结论的序号是____.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

16. （本小题 13 分）

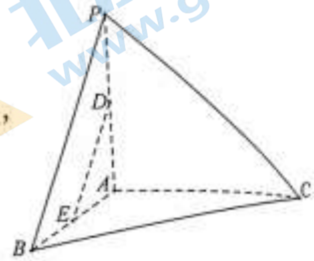
已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $a_2-a_1=1$，$S_5=3a_5$.

（Ⅰ）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）设 $b_n=a_n+\dfrac{1}{2^{a_n}}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

17.（本小题 14 分）

如图，在四面体 $PABC$ 中，$PA\perp$ 平面 ABC，$PA=AB=AC=1$，D，E 分别为 PA，AB 的中点.



（Ⅰ）求证：$DE\,/\!/$ 平面 PBC；

（Ⅱ）再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知，

求直线 PA 与平面 PBC 所成角的正弦值.

条件①：$BC=\sqrt{2}$；

条件②：$\triangle PBC$ 为等边三角形.

注：如果选择条件①和条件②分别解答，按第一个解答计分.

18.（本小题 14 分）

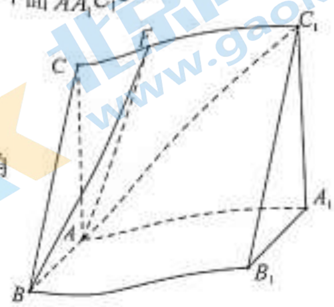
已知圆 C 经过 $A(1,1),B(2,-2)$ 两点，且圆心 C 在直线 $x-y+1=0$ 上.

（Ⅰ）求圆 C 的方程;

（Ⅱ）设直线 $l:3x+y+26=0$ 与圆 C 交于 D,E 两点，求四边形 $ABDE$ 的面积.

19.（本小题 15 分）

如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧面 AA_1C_1C 为正方形，平面 $AA_1C_1C\perp$ 平面 ABB_1A_1，$AB\perp AC_1$，$AB=AC=2$.



（Ⅰ）求证：$AB\perp AA_1$；

（Ⅱ）若点 F 在棱 CC_1 上，且平面 ABF 与平面 ABB_1A_1 夹角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，求 $\dfrac{CF}{CC_1}$ 的值.

20.（本小题 15 分）

已知椭圆 $W:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的左、右顶点分别为 A,B，上顶点为 C，$\triangle ABC$ 的面积为 2，椭圆 W 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

（Ⅰ）求椭圆 W 的方程；

（Ⅱ）椭圆 W 上不同于顶点的两点 M,N 关于 y 轴对称，直线 AM 与直线 BC 交于点 P，直线 AN 与直线 BC 交于点 Q．设点 $R(2,2)$，求 $\dfrac{|AP|}{|RQ|}$ 的值.

21.（本小题 14 分）

已知数表 $A(n,n)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$，$B(n,n)=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$，

$C(n,n)=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2n} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \cdots & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$，其中 $a_{ij},b_{ij},c_{ij}(i,j\in\mathbf{N}^*,i,j\leqslant n)$ 分别表示 $A(n,n)$，$B(n,n)$，$C(n,n)$ 中第 i 行第 j 列的数．若 $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}$，则称 $C(n,n)$ 是 $A(n,n)$，$B(n,n)$ 的生成数表．

（Ⅰ）若数表 $A(2,2)=\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$，$B(2,2)=\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{3}{20} \\ \frac{2}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix}$，且 $C(2,2)$ 是 $A(2,2)$，$B(2,2)$ 的生成数表，求 $C(2,2)$；

（Ⅱ）对 $\forall n\in\mathbf{N}^*,n\geqslant 3$，

数表 $A(n,n)=\begin{pmatrix} 4^1-1 & 4^2-1 & 4^3-1 & \cdots & 4^n-1 \\ \frac{2^1}{2^1+2} & \frac{2^2}{2^2+2} & \frac{2^3}{2^3+2} & \cdots & \frac{2^n}{2^n+2} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$，$B(n,n)=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \frac{1}{3} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \frac{1}{5} & \cdots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$，

$B(n,n)$ 与 $B(n-1,n-1)$ 满足第 i 行第 j 列的数对应相同 $(i,j\in\mathbf{N}^*,i,j\leqslant n-1)$．

$C(n,n)$ 是 $A(n,n)$，$B(n,n)$ 的生成数表，且 $c_{13}=2^{n+1}-n-2$．

（ⅰ）求 b_{33}，$b_{k3}(k\in\mathbf{N}^*,k\leqslant n)$；

（ⅱ）若 $c_{23}\leqslant\lambda$ 恒成立，求 λ 的最小值．

（考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效）

丰台区 2023～2024 学年度第一学期期末练习

高二数学参考答案

2024.01

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	B	C	A	C	D	B	B	B	C	D

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. -4　　12. $y=\pm 2x$　　13. $-n+3$　（答案不唯一）

14. 2　　15. ①②④

（注：15 题给出的结论中，有多个符合题目要求. 全部选对得 5 分，不选或有错选得 0 分，其他得 3 分.）

三、解答题共 6 小题，共 85 分. 解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16.（本小题 13 分）

解：（Ⅰ）设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，

由题意，$\begin{cases}a_2-a_1=d=1\\5a_1+10d=3(a_1+4d)\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a_1=1\\d=1\end{cases}$.

所以 $a_n=a_1+(n-1)d=n$.　　………………6 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，$b_n=a_n+\frac{1}{2^{a_n}}=n+\frac{1}{2^n}$，

所以 $T_n=(1+\frac{1}{2})+(2+\frac{1}{2^2})+(3+\frac{1}{2^3})+\cdots+(n+\frac{1}{2^n})$

$=(1+2+3+\cdots+n)+(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n})$

$=\frac{n\times(n+1)}{2}+\frac{\frac{1}{2}\times[1-(\frac{1}{2})^n]}{1-\frac{1}{2}}$

$=\frac{n^2+n+2}{2}-(\frac{1}{2})^n$.　　………………13 分

7.（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）因为 D，E 分别为 PA，AB 的中点，

所以 $DE\parallel PB$.

因为 $DE\not\subset$ 平面 PBC，$PB\subset$ 平面 PBC，

所以 $DE\parallel$ 平面 PBC.　　………………4 分

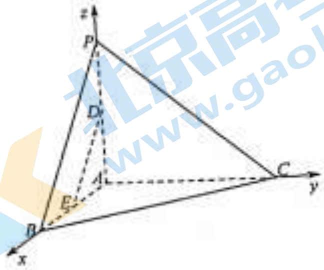
（Ⅱ）选条件①：

因为 $AB=AC=1$，$BC=\sqrt{2}$，

所以 $AB^2+AC^2=BC^2$，即 $AB\perp AC$．

因为 $PA\perp$ 平面 ABC，所以 $PA\perp AB$，$PA\perp AC$，

故以 A 为原点，建立如图所示空间直角坐标系．



则 $A(0,0,0)$，$B(1,0,0)$，$C(0,1,0)$，$P(0,0,1)$，

所以 $\overrightarrow{AP}=(0,0,1)$，$\overrightarrow{CP}=(0,-1,1)$，$\overrightarrow{CB}=(1,-1,0)$．

设平面 PBC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CP}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CB}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}-y+z=0\\ x-y=0\end{cases}$．

令 $x=1$，则 $y=1$，$z=1$，所以 $\boldsymbol{n}=(1,1,1)$．

设直线 PA 与平面 PBC 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=|\cos<\overrightarrow{AP},\boldsymbol{n}>|=\dfrac{|\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{AP}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{1}{1\times\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$．

所以直线 PA 与平面 PBC 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ……………………14 分

（Ⅱ）选条件②：

因为 $PA\perp$ 平面 ABC，

所以 $PA\perp AB$，$PA\perp AC$．

在直角三角形 PAB 中，$PA=AB=1$，

所以 $PB=\sqrt{2}$．

因为△ PBC 为等边三角形，

所以 $BC=PB=\sqrt{2}$．

在△ ABC 中，因为 $AB=AC=1$，

所以 $AB^2+AC^2=BC^2$，即 $AB\perp AC$．

故以 A 为原点，建立如图所示空间直角坐标系．以下解答过程与选择条件①相同．

18．（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）因为圆心 C 在直线 $x-y+1=0$ 上，所以设 $C(a,a+1)$，

由 A，B 是圆 C 上两点，所以 $|CA|=|CB|$，

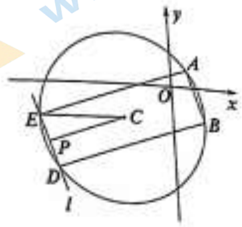
即 $\sqrt{(a-1)^2+a^2}=\sqrt{(a-2)^2+(a+3)^2}$，解得 $a=-3$，

所以圆心 C 的坐标为 $(-3,-2)$．

圆 C 的半径 $r=|CA|=\sqrt{(-3-1)^2+(-3)^2}=5$，

故圆 C 的方程为 $(x+3)^2+(y+2)^2=25$． ……………6 分

（Ⅱ）过点 C 作 l 的垂线，垂足为 P，则 P 为线段 ED 的中点，



由点到直线的距离公式，得 $|CP|=\dfrac{|3\times(-3)+(-2)+26|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\dfrac{3\sqrt{10}}{2}$，

所以 $|DE|=2\sqrt{r^2-|CP|^2}=2\sqrt{25-\dfrac{45}{2}}=\sqrt{10}$．

因为 $A(1,1)$，$B(2,-2)$，所以 $|AB|=\sqrt{10}$，

直线 AB 的方程为 $3x+y-4=0$．

而直线 DE 的方程为 $3x+y+26=0$，所以 $AB\,/\!/\,DE$，且 $|AB|=|DE|$，

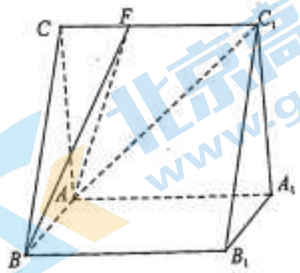
由此得四边形 $ABDE$ 是平行四边形．

因为 AB，DE 之间的距离 $d=\dfrac{|26-(-4)|}{\sqrt{3^2+1^2}}=3\sqrt{10}$，

所以平行四边形 $ABDE$ 的面积为 $|AB|\cdot d=\sqrt{10}\times 3\sqrt{10}=30$，

故四边形 $ABDE$ 的面积为 30． ……………14 分

19．（本小题 15 分）



解：（Ⅰ）因为侧面 AA_1C_1C 为正方形，所以 $AC\perp AA_1$．

又平面 $AA_1C_1C\perp$ 平面 ABB_1A_1，

平面 $AA_1C_1C\cap$ 平面 $ABB_1A_1=AA_1$，

$AC\subset$ 平面 AA_1C_1C，

所以 $AC\perp$ 平面 ABB_1A_1，

又 $AB\subset$ 平面 ABB_1A_1，所以 $AC\perp AB$．

又 $AB\perp AC_1$，且 $AC\cap AC_1=A$，

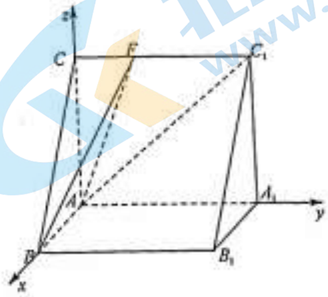
所以 $AB\perp$ 平面 AA_1C_1C，又 $AA_1\subset$ 平面 AA_1C_1C，

所以 $AB \perp AA_1$. ……………6 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，$AC \perp AB$，$AC \perp AA_1$，$AB \perp AA_1$，故以 A 为原点，建立如图所示空间直角坐标系.

则 $A(0,0,0)$，$B(2,0,0)$ $C(0,0,2)$，$C_1(0,2,2)$.

设 $\dfrac{CF}{CC_1}=\lambda$，其中 $\lambda \in [0,1]$.



则 $\overrightarrow{CF}=\lambda\overrightarrow{CC_1}=\lambda(0,2,0)=(0,2\lambda,0)$，

所以 $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CF}=(0,0,2)+(0,2\lambda,0)=(0,2\lambda,2)$，

又 $\overrightarrow{AB}=(2,0,0)$.

设平面 ABF 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases} \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AB}=0 \\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AF}=0 \end{cases}$，所以 $\begin{cases} 2x=0 \\ 2\lambda y+2z=0 \end{cases}$，

令 $y=-1$，$z=\lambda$，所以 $\boldsymbol{m}=(0,-1,\lambda)$.

由题意，$\boldsymbol{n}=(0,0,1)$ 为平面 ABB_1A_1 的一个法向量.

设平面 ABF 与平面 ABB_1A_1 的夹角为 θ，

所以 $\cos\theta=|\cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>|=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，

解得 $\lambda=\dfrac{1}{3}$，或 $\lambda=-\dfrac{1}{3}$（舍）.

所以 $\dfrac{CF}{CC_1}=\dfrac{1}{3}$. ……………15 分

20.（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）由题意，$ab=2$，$\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $4c^2=3a^2=4(a^2-b^2)$，即 $a=2b$，

所以 $2b^2=2$，解得 $b=1$，由此得 $a=2$，

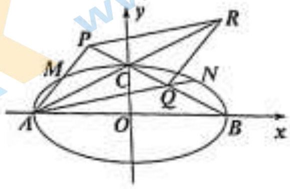
故椭圆 W 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$. ……………5 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，$A(-2,0)$，$B(2,0)$，$C(0,1)$，所以直线 BC 的方程为 $y=-\dfrac{1}{2}x+1$.

设 $M(x_0,y_0)$（$x_0y_0\neq 0$），则 $N(-x_0,y_0)$，所以直线 AM 的方程为 $y=\dfrac{y_0}{x_0+2}(x+2)$，

与直线 BC 的方程联立，得点 P 的横坐标 $x_P=\dfrac{2(x_0-2y_0+2)}{x_0+2y_0+2}=2-\dfrac{8y_0}{x_0+2y_0+2}$.

又直线 AN 的方程为 $y=\dfrac{y_0}{2-x_0}(x+2)$，与直线 BC 的方程联立，



得点 Q 的横坐标 $x_Q=\dfrac{2(x_0+2y_0-2)}{x_0-2y_0-2}=2+\dfrac{8y_0}{x_0-2y_0-2}$，

所以 $x_P+x_Q=4+8y_0(\dfrac{1}{x_0-2y_0-2}-\dfrac{1}{x_0+2y_0+2})=4+\dfrac{32y_0(y_0+1)}{x_0^2-(2y_0+2)^2}$

$=4+\dfrac{32y_0(y_0+1)}{x_0^2-4-4y_0^2-8y_0}$.

因为点 M 在椭圆 W 上，所以 $\dfrac{x_0^2}{4}+y_0^2=1$，即 $x_0^2-4=-4y_0^2$，

所以 $x_P+x_Q=4+\dfrac{32y_0(y_0+1)}{-4y_0^2-4y_0^2-8y_0}=0$.

又 $y_P+y_Q=-\dfrac{1}{2}(x_P+x_Q)+2=2$，所以 P，Q 两点关于点 C 对称.

又 $A(-2,0)$，$R(2,2)$，所以 A，R 两点关于点 C 对称，

所以四边形 $APRQ$ 为平行四边形，即 $|AP|=|RQ|$，故 $\dfrac{|AP|}{|RQ|}=1$. ……………15分

21.（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）由题意，$c_{11}=8\times\dfrac{1}{5}+1\times\dfrac{2}{5}=2, c_{12}=8\times(-\dfrac{3}{20})+1\times\dfrac{6}{5}=0$,

$c_{21}=4\times\dfrac{1}{5}+3\times\dfrac{2}{5}=2, c_{22}=4\times(-\dfrac{3}{20})+3\times\dfrac{6}{5}=3$，

所以 $C(2,2)=\begin{pmatrix}2&0\\2&3\end{pmatrix}$. ……………4分

（Ⅱ）由题意，当 $k\in\mathbf{N}^*, 3\leqslant k\leqslant n$ 时有

$c_{13}=(4^1-1)\times b_{13}+(4^2-1)\times b_{23}+\cdots+(4^k-1)\times b_{k3}=2^{k+1}-k-2$ ①

即 $(4^1-1)\times\dfrac{1}{3}+(4^2-1)\times\dfrac{1}{5}+(4^3-1)\times b_{33}+\cdots+(4^k-1)\times b_{k3}=2^{k+1}-k-2$.

（ⅰ）当$k=3$时，$(4^1-1)\times b_{13}+(4^2-1)\times b_{23}+(4^3-1)\times b_{33}=2^{3+1}-3-2$，解得$b_{33}=\frac{1}{9}$.

当$k\geqslant 4$时，由①得

$(4^1-1)\times b_{13}+(4^2-1)\times b_{23}+\cdots+(4^{k-1}-1)\times b_{(k-1)3}=2^k-(k-1)-2$ ②

①-②，得$(4^k-1)\times b_{k3}=(2^{k+1}-k-2)-[2^k-(k-1)-2]=2^k-1$.

所以$b_{k3}=\frac{2^k-1}{4^k-1}=\frac{1}{2^k+1}$.

又$b_{13}=\frac{1}{3}$，$b_{23}=\frac{1}{5}$，$b_{33}=\frac{1}{9}$，均符合上式，

所以$k\in\mathbf{N}^*,k\leqslant n$时，$b_{k3}=\frac{1}{2^k+1}$.

（ⅱ）由（ⅰ）知，$a_{2k}b_{k3}=\frac{2^k}{(2^k+2)}\cdot\frac{1}{(2^k+1)}=\frac{2^{k-1}}{(2^{k-1}+1)(2^k+1)}=\frac{1}{2^{k-1}+1}-\frac{1}{2^k+1}$.

所以对于$\forall n\in\mathbf{N}^*$，$n\geqslant 3$，

有$c_{23}=a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{33}+\cdots+a_{2n}b_{n3}$

$$=(\frac{1}{1+1}-\frac{1}{2^1+1})+(\frac{1}{2^1+1}-\frac{1}{2^2+1})+\cdots+(\frac{1}{2^{k-1}+1}-\frac{1}{2^k+1})+\cdots+(\frac{1}{2^{n-1}+1}-\frac{1}{2^n+1})$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n+1}.$$

由$c_{23}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n+1}$及$n\geqslant 3$知，$\frac{7}{18}\leqslant c_{23}<\frac{1}{2}$，

所以$\lambda\geqslant\frac{1}{2}$时，对于$\forall n\in\mathbf{N}^*$，$n\geqslant 3$，$c_{23}\leqslant\lambda$恒成立.

显然$\lambda<\frac{7}{18}$时，$c_{23}\leqslant\lambda$恒不成立.

下面证明：对于任意$\frac{7}{18}\leqslant\lambda<\frac{1}{2}$，$c_{23}\leqslant\lambda$不能恒成立.

记$\lambda=\frac{1}{2}-\varepsilon(0<\varepsilon\leqslant\frac{1}{9})$，

此时$c_{23}>\lambda\Leftrightarrow\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n+1}>\frac{1}{2}-\varepsilon\Leftrightarrow\frac{1}{2^n+1}<\varepsilon\Leftrightarrow 2^n>\frac{1}{\varepsilon}-1\geqslant 8$.

所以$2^n>\frac{1}{\varepsilon}-1\Leftrightarrow n>\log_2(\frac{1}{\varepsilon}-1)$，

即当$n>\log_2(\frac{1}{\varepsilon}-1)$时，有$c_{23}>\lambda$成立，这与$c_{23}\leqslant\lambda$恒成立矛盾.

所以对于任意$\lambda<\frac{1}{2}$，$c_{23}\leqslant\lambda$不能恒成立.

综上，λ的最小值为$\frac{1}{2}$. ················14分

（若用其他方法解题，请酌情给分）