2022—2023 学年度茂名市普通高中高二年级教学质量监测

数学试卷

本试卷共 4 页,22 题。全卷满分 150 分。考试用时 120 分钟。

注意事项:

1. 答题前,先将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上,并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。

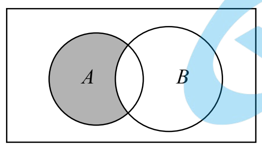
2. 选择题的作答:每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

3. 非选择题的作答:用签字笔直接写在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

4. 考试结束后,请将本试题卷和答题卡一并上交。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x\in\mathbf{N}\mid -1<x<4\}$,$B=\{x\in\mathbf{R}\mid x\geqslant 3\}$,则下图中阴影部分表示的集合为



A. $\{x\mid -1\leqslant x<3\}$　B. $\{x\mid -1<x<3\}$　C. $\{0,1,2\}$　D. $\{0,1,2,3\}$

2. 已知复数 $z=\frac{2}{1+\mathrm{i}}$,则 $|z-\mathrm{i}|=$

A. $\sqrt5$　B. 2　C. $\sqrt2$　D. 5

3. 已知 AD 是△ABC 的中线,$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$,则$\overrightarrow{AC}=$

A. $\frac12(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a})$　B. $2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$　C. $\frac12(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$　D. $2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$

4. 现有上底面半径为 2,下底面半径为 4,母线长为 $2\sqrt{10}$ 的圆台,则其体积为

A. 40π　B. 56π　C. $\frac{40\sqrt{10}\pi}{3}$　D. $\frac{56\sqrt{10}\pi}{3}$

5. 甲、乙、丙、丁 4 名志愿者参加创文巩卫志愿者活动,现有 A、B、C 三个社区可供选择,每名志愿者只能选择其中一个社区,每个社区至少一名志愿者,则甲不在 A 社区的概率为

A. $\frac13$　B. $\frac12$　C. $\frac23$　D. $\frac34$

6. 已知 $\sin(\alpha-\beta)\cos\alpha-\cos(\alpha-\beta)\sin\alpha=\frac14$,则 $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+2\beta\right)=$

A. $\frac78$　B. $\frac{\sqrt{15}}{16}$　C. $\pm\frac{\sqrt{15}}{16}$　D. $-\frac78$

7. 已知 $a=\log_3 4$,$b=\log_4 9$,$c=\frac32$,则

A. $a<c<b$　B. $b<c<a$　C. $a<b<c$　D. $b<a<c$

8. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt6}{3}$,下顶点为 B,点 M 为 C 上的任意一点,则 $|MB|$ 的最大值是

A. $\frac{3\sqrt2}{2}b$　B. $\sqrt2 b$　C. $\sqrt3 b$　D. $2b$

二、选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分. 在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分.

9. 某地区国庆七天每天的最高气温分别是 22,21,20,20,22,23,24(单位℃),则

A. 该组数据的极差为 4　B. 该组数据的众数为 20

C. 该组数据的中位数为 20　D. 该组数据的第 80 百分位数为 23

10. 已知 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数,且 $f(x-3)=f(x+1)$,当 $x\in[0,2]$时,$f(x)=x^2+1$,则

A. 当 $x\in[-2,0)$时,$f(x)=x^2+1$

B. $y=f(x)$的周期为 4

C. $f(2\,023)=3$

D. $y=f(x)$的图象关于$(2,0)$对称

11. 已知抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点为 F,准线为 l,A 为抛物线上任意一点,点 P 为 A 在 l 上的射影,线段 PF 交 y 轴于点 E,Q 为线段 AF 的中点,则

A. $AE\perp PF$　B. 直线 AE 与抛物线 C 相切

C. 点 Q 的轨迹方程为 $y^2=2x-1$　D. $\angle QEF$ 可以是直角

12. 已知 $f(x)=\begin{cases} x\mathrm{e}^x, x\leqslant 0\\ \frac{x}{\mathrm{e}^x}, x>0\end{cases}$,则

A. $f(x)$的极小值为$-\frac{1}{\mathrm{e}}$

B. 存在实数 a,使$[f(x)]^2+af(x)-1=0$ 有 4 个不相等的实根

C. 若 $f(x)-ax>0$ 在$(0,+\infty)$上恰有 2 个整数解,则$\frac{1}{\mathrm{e}^3}\leqslant a<\frac{1}{\mathrm{e}^2}$

D. 当 $x\in(0,+\infty)$时,函数 $h(x)=\mathrm{e}^{2x}f(x)-x-\ln x$ 的最小值为 1

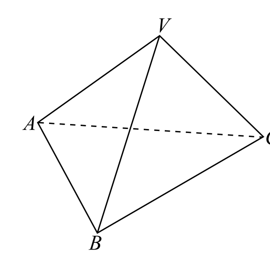
三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,且 $S_n=2a_n-4$,则 $a_n=$________.

14. 圆心在直线 $y=x+3$ 上,且过点 $A(2,4)$,$B(1,-3)$的圆的标准方程为________.

15. $(2+ax)(1-x)^6$ 的展开式中含 x^4 的项的系数为 150,则 $a=$________.

16. 如图,在三棱锥 $V-ABC$ 中,△VAB 和△ABC 都是边长为 2 的正三角形,二面角 $V-AB-C$ 为 θ,当 $60^\circ\leqslant\theta\leqslant120^\circ$时,三棱锥 $V-ABC$ 的外接球表面积 S 的范围为________.



四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17.（本小题满分 10 分）

在△ABC 中，角 A、B、C 所对的边分别为 a、b、c，其面积为 S，AD 为边 BC 上的中线.

（1）证明：$AD=\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$；

（2）当 $S=2\sqrt{3}$，$B=\frac{\pi}{3}$时，求 AD 的最小值.

18.（本小题满分 12 分）

已知等差数列$\{a_n\}$的公差不为 0，其前 n 项和为 S_n，$S_5=25$，且 a_1，a_2，a_5 成等比数列.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设 $b_n=\frac{4n}{a_n^2\cdot a_{n+1}^2}$，记数列$\{b_n\}$的前 n 项和为 T_n，若 $T_n\leqslant m^2+\frac{1}{2}m$ 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立，求 m 的取值范围.

19.（本小题满分 12 分）

2023 年 6 月 6 日是第 28 个全国“爱眼日”，某市为了了解该市高二同学们的视力情况，对该高二学生的视力情况进行了调查，从中随机抽取了 200 名学生的体检表，得到如表所示的统计数据.

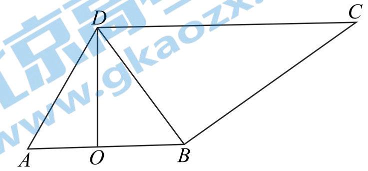
视力范围	[4.0,4.2)	[4.2,4.4)	[4.4,4.6)	[4.6,4.8)	[4.8,5.0)	[5.0,5.2)
学生人数	20	30	70	35	30	15

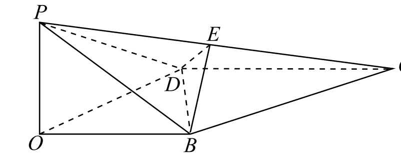
（1）估计全市高二学生视力的平均数和中位数(每组数据以区间的中点值为代表，结果精确到 0.1)；

（2）视频率为概率，从全市视力不低于 4.8 的学生中随机抽取 3 名学生，设这 3 名学生的视力不低于 5.0 的人数为 X，求 X 的分布列和数学期望.

20.（本小题满分 12 分）

如图，在平面四边形 $ABCD$ 中，$AB\,/\!/\,DC$，△ABD 为边长为 2 的正三角形，$DC=3$，点 O 为 AB 的中点，沿 DO 将△AOD 折起得到四棱锥 $P-OBCD$，且 $PC=\sqrt{13}$.





（1）证明：$BD\perp PC$；

（2）点 E 为线段 PC 上的动点(不含端点)，当平面 POD 与平面 EBD 的夹角为 30°时，求$\frac{|PE|}{|PC|}$的值.

21.（本小题满分 12 分）

已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{5}}{2}$，$C$ 的右焦点 F 到其渐近线的距离为 1.

（1）求该双曲线 C 的方程；

（2）过点 $S(4,0)$的动直线 l 与双曲线 C 的右支交于 A、B 两点，x 轴上是否存在一个异于点 S 的定点 T，使得$|SA|\cdot|TB|=|SB|\cdot|TA|$成立. 若存在，请写出点 T 的坐标，若不存在请说明理由.

22.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=ae^x-\ln(x+2)+\ln a-2$.

（1）当 $a=1$ 时，求 $f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程；

（2）若 $f(x)$有两个零点 x_1，x_2，求实数 a 的取值范围，并证明：$x_1+x_2+2>0$.

2022—2023学年度茂名市普通高中高二年级教学质量监测

数学参考答案及解析

一、选择题

1. C 【解析】∵ $A=\{x\in \mathbf{N} \mid -1<x<4\}=\{0,1,2,3\}$, $\complement_{\mathbf{R}}B=\{x \mid x<3\}$,所以阴影部分表示的集合为 $A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=\{0,1,2\}$.故选 C.

2. A 【解析】复数 $z=\frac{2}{1+\mathrm{i}}=1-\mathrm{i}$,则 $z-\mathrm{i}=1-2\mathrm{i}$,所以 $|z-\mathrm{i}|=\sqrt{5}$.故选 A.

3. D 【解析】$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+2(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=2\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$.故选 D.

4. B 【解析】由 $R=4$,$r=2$,$l=2\sqrt{10}$,求得 $h=\sqrt{l^2-(R-r)^2}=6$,根据圆台体积公式得 $V=\frac{\pi}{3}(R^2+r^2+Rr)h=56\pi$.故选 B.

5. C 【解析】4 名志愿者分配到 3 个社区的方法共有 $C_4^2A_3^3=36$ 种,其中甲不在 A 社区的方法有 $C_3^2C_2^1A_2^2+C_3^1C_2^1A_2^2=24$ 种,故甲不在 A 社区的概率为 $\frac{24}{36}=\frac{2}{3}$.故选 C.

6. D 【解析】$\sin(\alpha-\beta)\cos\alpha-\cos(\alpha-\beta)\sin\alpha=\frac{1}{4}\Rightarrow\sin(-\beta)=\frac{1}{4}$,∴ $\sin\beta=-\frac{1}{4}$,$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+2\beta\right)=-\cos 2\beta=-(1-2\sin^2\beta)=-\frac{7}{8}$.故选 D.

7. A 【解析】∵ $a=\log_3 4<\log_3 3\sqrt{3}=\frac{3}{2}$,∴ $a<c$,∵ $b=\log_4 9>\log_4 8=\frac{3}{2}$,∴ $b>c$,∴ $a<c<b$.故选 A.

8. A 【解析】由 $e=\frac{\sqrt{6}}{3}$,可得 $a=\sqrt{3}b$,∴ $\frac{x^2}{3b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,设 $M(x_0,y_0)$,则 $\frac{x_0^2}{3b^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$,又点 $B(0,-b)$,$|MB|^2=-2\left(y_0-\frac{b}{2}\right)^2+\frac{9b^2}{2}$,∵ $-b\leqslant y_0\leqslant b$,∴ $|MB|^2_{\max}=\frac{9b^2}{2}$,∴ $|MB|_{\max}=\frac{3\sqrt{2}b}{2}$.故选 A.

二、选择题

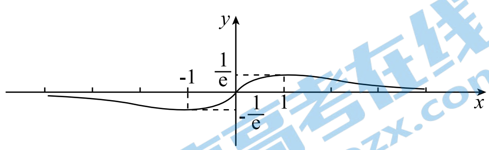
9. AD 【解析】该组数据的极差为:$24-20=4$,故 A 正确;将该组数据从小到大的排列为:20,20,21,22,22,23,24,∴众数为 20,22,故 B 错误;中位数为 22,故 C 错误;由 $7\times80\%=5.6$,∴该组数据的第 80 百分位数为从小到大的排列的第 6 个数据为 23,故 D 正确.故选 AD.

10. AB 【解析】设 $x\in[-2,0)$,则 $-x\in(0,2]$,∴ $f(x)=f(-x)=x^2+1$,故 A 正确;由 $f(x-3)=f(x+1)$ 得 $f(x+4)=f(x)$,∴ $f(x)$ 的周期为 4,故 B 正确;∵ $f(2\,023)=f(3)=f(-1)=f(1)=2$,故 C 错误;∵ $f(3)\neq -f(1)$,故 D 错误.故选 AB.

11. ABC 【解析】A 选项,设准线与 x 轴交于点 M,由抛物线知原点 O 为 FM 的中点,$l\,/\!/\,y$ 轴,所以 E 为线段 PF 的中点,由抛物线的定义知 $|AP|=|AF|$,所以 $AE\perp PF$,故 A 正确;B 选项,由题意知,E 为线段 PF 的中点,从而设 $A(x_1,y_1)$,则 $E\left(0,\frac{y_1}{2}\right)$,直线 AE 的方程:$y=\frac{y_1}{2x_1}(x+x_1)$,与抛物线方程 $y^2=4x$ 联立可得:$y=\frac{y_1}{2x_1}\left(\frac{y^2}{4}+x_1\right)$,由

$y_1^2=4x_1$ 代入左式整理得：$y_1y^2-2y_1^2y+y_1^3=0$，所以 $\Delta=4y_1^4-4y_1y_1^3=0$，所以直线 AE 与抛物线相切，故 B 正确；C 选项，设点 $Q(x,y)$，则点 $A(2x-1,2y)$，而 A 是抛物线 C 上任意一点，于是得 $(2y)^2=4(2x-1)$，即 $y^2=2x-1$，所以点 Q 的轨迹方程为 $y^2=2x-1$，故 C 正确；D 选项，因点 Q 的轨迹方程为 $y^2=2x-1$，则设 $Q\left(\frac{t^2+1}{2},t\right)$，令 $E(0,m)$，有 $\overrightarrow{EF}=(1,-m)$，$\overrightarrow{EQ}=\left(\frac{t^2+1}{2},t-m\right)$，$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EQ}=m^2-tm+\frac{t^2+1}{2}=\left(m-\frac{1}{2}t\right)^2+\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{2}>0$，于是得 $\angle QEF$ 为锐角，故 D 错误. 故选 ABC.

12. ACD　【解析】当 $x\leqslant 0$ 时，$f'(x)=xe^x+e^x=e^x(x+1)$，∴当 $x<-1$ 时，$f'(x)<0$，∴ $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递减；当 $-1<x<0$ 时，$f'(x)>0$，∴ $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递增，∴ $f(x)$ 的极小值为 $f(-1)=-\frac{1}{e}$；同理可得，当 $x>0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增；$f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，∴ $f(x)$ 的极大值为 $f(1)=\frac{1}{e}$，∴ $y=f(x)$ 的图象大致如图所示，由图可知 A 正确；



令 $t=f(x)$，则 $t^2+at-1=0$ 有两个实根 t_1,t_2，且 $t_1\in\left(-\frac{1}{e},0\right)$，$t_2\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$，则令 $g(t)=t^2+at-1$，∴ $g(0)=-1<0$，∴ $\begin{cases}g\left(-\frac{1}{e}\right)>0\\ g\left(\frac{1}{e}\right)>0\end{cases}$，

∴ $\begin{cases}a<\frac{1}{e}-e\\ a>e-\frac{1}{e}\end{cases}$，所以无解，故 B 错误；由 $\begin{cases}f(2)>2a\\ f(3)\leqslant 3a\end{cases}$，得 $\frac{1}{e^3}\leqslant a<\frac{1}{e^2}$，故 C 正确；$h(x)=xe^x-x-\ln x$，则 $h'(x)=e^x+xe^x-1-\frac{1}{x}=(x+1)\left(e^x-\frac{1}{x}\right)$，由 $x>0$，知 $x+1>0$，设 $t(x)=e^x-\frac{1}{x}$，则 $t(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，又 $t\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{e}-2<0$，$t(1)=e-1>0$，所以存在 $x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使得 $h'(x_0)=0$，即 $e^{x_0}=\frac{1}{x_0}$，所以当 $x\in(0,x_0)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减；当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，∴ $h(x)_{\min}=h(x_0)=x_0e^{x_0}-x_0-\ln x_0=x_0\cdot\frac{1}{x_0}-x_0+x_0=1$，故 D 正确. 故选 ACD.

三、填空题

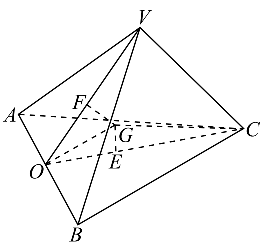
13. 2^{n+1}　【解析】因为 $S_n=2a_n-4$，所以当 $n\geqslant 2$ 时，$S_{n-1}=2a_{n-1}-4$，两式相减得 $S_n-S_{n-1}=2a_n-4-(2a_{n-1}-4)$，整理得 $a_n=2a_{n-1}$，即 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=2a_{n-1}$，又当 $n=1$ 时，$S_1=a_1=2a_1-4$，解得 $a_1=4$，所以数列 $\{a_n\}$ 是以 4 为首项，2 为公比的等比数列，所以 $a_n=4\times 2^{n-1}=2^{n+1}$. 故答案为 2^{n+1}.

14. $(x+2)^2+(y-1)^2=25$　【解析】线段 AB 的垂直平分线的方程为：$y=-\frac{1}{7}x+\frac{5}{7}$，联立

$\begin{cases} y=-\dfrac{1}{7}x+\dfrac{5}{7} \\ y=x+3 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$，即圆心坐标为 $(-2,1)$，半径 $r=5$，所求圆的标准方程为：$(x+2)^2+(y-1)^2=25$. 故答案为 $(x+2)^2+(y-1)^2=25$.

15. -6　**【解析】** $(1-x)^6$ 展开式的通项为：$T_{r+1}=C_6^r(-x)^r=(-1)^rC_6^rx^r$，$\therefore$ $(2+ax)(1-x)^6$ 展开式中 x^4 的系数为 $2(-1)^4C_6^4+a(-1)^3C_6^3=30-20a=150$，$\therefore a=-6$. 故答案为 -6.

16. $\left[\dfrac{52\pi}{9},\dfrac{28\pi}{3}\right]$　**【解析】** 如图，取 AB 的中点 O，连接 VO，CO，则 $VO\perp AB$，$CO\perp AB$，所以 $\angle VOC$ 为二面角 $V-AB-C$ 的平面角，所以 $\theta=\angle VOC$，设 $\triangle VAB$，$\triangle ABC$ 的外心分别为 F，E，在平面 VOC 内过点 F 作 VO 的垂线，过点 E 作 OC 的垂线，交于点 G，则 G 为 $V-ABC$ 外接球的球心，求得 $CE=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$，$OE=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，



$GE=OE\tan\dfrac{\theta}{2}$，$\therefore R^2=CE^2+GE^2=\dfrac{4}{3}+\dfrac{1}{3}\tan^2\dfrac{\theta}{2}$ $\left(30^\circ\leqslant\dfrac{\theta}{2}\leqslant 60^\circ\right)$，$R^2\in\left[\dfrac{13}{9},\dfrac{7}{3}\right]$，表面积 $S=4\pi R^2\in\left[\dfrac{52\pi}{9},\dfrac{28\pi}{3}\right]$. 故答案为 $\left[\dfrac{52\pi}{9},\dfrac{28\pi}{3}\right]$.

四、解答题

17. **解**：(1) 方法一：$\because$ AD 为 BC 边上中线，$\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，　(1 分)

$\overrightarrow{AD}^2=\dfrac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})^2\Rightarrow\overrightarrow{AD}^2=\dfrac{1}{4}(c^2+b^2+2bc\cos A)$，　(2 分)

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，$2bc\cos A=b^2+c^2-a^2$，　(3 分)

$\therefore\overrightarrow{AD}^2=\dfrac{1}{4}(2b^2+2c^2-a^2)$，

$\therefore AD=\dfrac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$.　(4 分)

方法二：$\because$ AD 为 BC 边上中线，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ADB+\angle ADC=\pi$，$\therefore\cos\angle ADB+\cos\angle ADC=0$，　(1 分)

在 $\triangle ADB$ 和 $\triangle ADC$ 中，由余弦定理得：

$\dfrac{AD^2+BD^2-AB^2}{2AD\cdot BD}+\dfrac{AD^2+CD^2-AC^2}{2AD\cdot BD}=0$，$BD=CD$，　(2 分)

即 $2AD^2+BD^2+CD^2-AB^2-AC^2=0$，　(3 分)

$\therefore AD^2=\dfrac{1}{2}\left(b^2+c^2-\dfrac{1}{2}a^2\right)$，

即 $AD=\dfrac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$.　(4 分)

(2) $\because S=2\sqrt{3}$，$B=\dfrac{\pi}{3}\Rightarrow S=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{4}ac=2\sqrt{3}$，　(5 分)

$\therefore ac=8$，　(6 分)

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得：

$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B\Rightarrow b^2=a^2+c^2-ac$，　(7 分)

由 (1) 知：$AD=\dfrac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+4c^2-2ac}$，　(8 分)

$\therefore AD=\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+4c^2-2ac}\geqslant\dfrac{1}{2}\sqrt{4ac-2ac}=$

$\frac{1}{2}\sqrt{2ac}=2$，（9 分）

∴当且仅当 $a=2c$ 时，AD 取得最小值为 2.（10 分）

18. **解**：(1)设数列$\{a_n\}$的公差为 d，且 $d\neq0$，依题意得：

$\begin{cases}a_2^2=a_1a_5\\S_5=25\end{cases}$，（1 分）

∴$\begin{cases}(a_1+d)^2=a_1(a_1+4d)\\5a_1+\frac{5\times4}{2}d=25\end{cases}$，（2 分）

解得$\begin{cases}a_1=1\\d=2\end{cases}$，（4 分）

∴$a_n=1+2(n-1)=2n-1$.（5 分）

(2) $b_n=\frac{4n}{a_n^2\cdot a_{n+1}^2}=\frac{4n}{(2n-1)^2\cdot(2n+1)^2}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(2n-1)^2}-\frac{1}{(2n+1)^2}\right]$，（7 分）

∴$T_n=b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n$

$=\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^2}-\frac{1}{(2n+1)^2}\right]$（8 分）

$=\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{(2n+1)^2}\right]$，（9 分）

∴$T_n<\frac{1}{2}$，（10 分）

∴$m^2+\frac{1}{2}m\geqslant\frac{1}{2}$，（11 分）

∴$m\leqslant-1$ 或 $m\geqslant\frac{1}{2}$.（12 分）

19. **解**：(1)设平均数为 $\bar{x}$，则

$\bar{x}=\frac{1}{200}\times(4.1\times20+4.3\times30+4.5\times70+4.7\times35+4.9\times30+5.1\times15)\approx4.6$，（2 分）

设中位数为 t，则 $t\in[4.4,4.6)$，

∴$\frac{20}{200}+\frac{30}{200}+(t-4.4)\times\frac{70}{200\times0.2}=0.5$，（3 分）

∴$t\approx4.5$，（4 分）

估计全市高二学生视力的平均数为 4.6，中位数为 4.5.（5 分）

(2)在视力不低于 4.8 的学生中，视力不低于 5.0 的学生所占的比例为$\frac{15}{30+15}=\frac{1}{3}$，（6 分）

∴$X\sim B\left(3,\frac{1}{3}\right)$，（7 分）

$P(X=0)=C_3^0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(1-\frac{1}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$，

$P(X=1)=C_3^1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(1-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$，

$P(X=2)=C_3^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(1-\frac{1}{3}\right)^1=\frac{2}{9}$，

$P(X=3)=C_3^3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(1-\frac{1}{3}\right)^0=\frac{1}{27}$，（10 分）

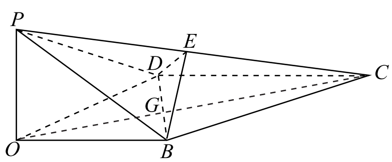
则 X 的分布列如图所示

X	0	1	2	3
P	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{27}$

（11 分）

$E(X)=3\times\frac{1}{3}=1$.（12 分）

20. **解**：(1)∵△ABD 为边长为 2 的正三角形，点 O 为 AB 中点，连接 OC 交 BD 于点 G，



∴$DO\perp AB$，$PO=OA=OB=1$，$DO=\sqrt{3}$，（1 分）

∵$AB/\!/DC$，$DC=3$，∴$OC=2\sqrt{3}$，

$\because PC=\sqrt{13}$，$\therefore PC^2=PO^2+OC^2$，$\therefore PO\perp OC$， (2分)

又$\because PO\perp OD$，OD，$OC\subset$平面$OBCD$，

$OD\cap OC=O$，$\therefore PO\perp$平面$OBCD$，

$\because BD\subset$平面$OBCD$，$\therefore PO\perp BD$， (3分)

在底面$OBCD$中，$\triangle DGC\backsim\triangle BGO$，

求得：$BG=\frac{1}{2}$，$OG=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore OB^2=OG^2+GB^2$，

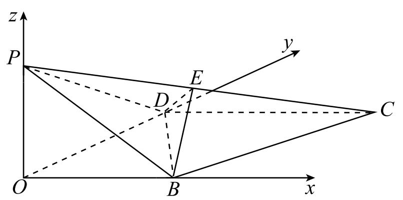
$\therefore BD\perp OC$，$\because PO$，$OC\subset$平面POC，$PO\cap OC=O$，

$\therefore BD\perp$平面POC，

$\because PC\subset$平面POC，

$\therefore BD\perp PC$. (5分)

(2)由(1)可知，$\because OB$、OD、OP两两垂直，所以以O为原点，OB、OD、OP分别为x、y、z轴的正方向，建立如图所示的空间直角坐标系$O-xyz$，



$\therefore P(0,0,1)$，$B(1,0,0)$，$C(3,\sqrt{3},0)$，$D(0,\sqrt{3},0)$，

易得$\overrightarrow{OB}=(1,0,0)$为平面$POD$的一个法向量， (6分)

设$\overrightarrow{PE}=\lambda\overrightarrow{PC}$，$\therefore E(3\lambda,\sqrt{3}\lambda,1-\lambda)(0<\lambda<1)$，

$\therefore\overrightarrow{BE}=(3\lambda-1,\sqrt{3}\lambda,1-\lambda)$，$\overrightarrow{DE}=(3\lambda,\sqrt{3}\lambda-\sqrt{3},1-\lambda)$， (7分)

设平面BDE的一个法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BE}=(3\lambda-1)x+\sqrt{3}\lambda y+(1-\lambda)z=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DE}=3\lambda x+(\sqrt{3}\lambda-\sqrt{3})y+(1-\lambda)z=0\end{cases},$$

取$x=3$，则$\boldsymbol{n}=\left(3,\sqrt{3},\frac{3-12\lambda}{1-\lambda}\right)$， (9分)

$\because$平面POD与平面EBD的夹角为$30°$，$\therefore\cos 30°=$

$$|\cos\langle\overrightarrow{OB},\boldsymbol{n}\rangle|=\left|\frac{\overrightarrow{OB}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{OB}||\boldsymbol{n}|}\right|,$$ (10分)

$\therefore\frac{3}{\sqrt{12+\left(\frac{3-12\lambda}{1-\lambda}\right)^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，解得：$\lambda=\frac{1}{4}\in(0,1)$， (11分)

$\therefore$当平面POD与平面EBD的夹角为$30°$时，$\frac{|PE|}{|PC|}=\lambda=\frac{1}{4}$. (12分)

21. **解**：(1)$\because$双曲线C的渐近线为$y=\pm\frac{b}{a}x$，点F到渐近线的距离为1，

$$\therefore\begin{cases}\frac{bc}{\sqrt{a^2+b^2}}=1\\ e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{2}\\ a^2+b^2=1\end{cases}$$，解得$a=2$，$b=1$， (3分)

$\therefore$双曲线C的方程为$\frac{x^2}{4}-y^2=1$. (4分)

(2)假设存在定点T满足已知条件，故设$T(m,0)$， (5分)

$\because|SA|\cdot|TB|=|SB|\cdot|TA|$，

$\therefore\frac{|SA|}{|TA|}=\frac{|SB|}{|TB|}$， (6分)

在$\triangle ATS$和$\triangle BTS$中，由正弦定理得

$\frac{|SA|}{\sin\angle ATS}=\frac{|TA|}{\sin\angle AST}$，及$\frac{|SB|}{\sin\angle BTS}=\frac{|TB|}{\sin\angle BST}$，

$\therefore\frac{|SA|}{|TA|}=\frac{\sin\angle ATS}{\sin\angle AST}$，及$\frac{|SB|}{|TB|}=\frac{\sin\angle BTS}{\sin\angle BST}$，

$\because\angle AST=\pi-\angle BST$，$\sin\angle AST=\sin\angle BST$，

又$\because\frac{|SA|}{|TA|}=\frac{|SB|}{|TB|}$，$\therefore\sin\angle ATS=\sin\angle BTS$，

$\therefore\angle ATS=\angle BTS$， (7分)

$\therefore$直线 AT 与直线 BT 的倾斜角互补，$k_{AT}+k_{BT}=0$， (8 分)

当直线的斜率为 0 时，显然不符合题意；当直线 l 的斜率不为 0 时，设直线 l 的方程为 $x=ny+4$，

$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

联立$\begin{cases}x=ny+4\\ \dfrac{x^2}{4}-y^2=1\end{cases}$，得 $(n^2-4)y^2+8ny+12=0$，

(9 分)

所以 $y_1+y_2=-\dfrac{8n}{n^2-4}$，$y_1y_2=\dfrac{12}{n^2-4}$，

又因为直线 l 与双曲线 C 的右支交于 A，B 两点，

$\therefore\begin{cases}x_1x_2>0\\ x_1+x_2>0\\ \Delta>0\\ n^2-4\neq0\end{cases}$，即$\begin{cases}(ny_1+4)(ny_2+4)>0\\ n(y_1+y_2)+8>0\\ n^2+12>0\\ n^2\neq4\end{cases}$，

解得 $n^2<4$，

$\because k_{AT}+k_{BT}=0$，$\therefore\dfrac{y_1}{x_1-m}+\dfrac{y_2}{x_2-m}=0$，又 $x_1=ny_1+4$，$x_2=ny_2+4$，

$\therefore\dfrac{y_1}{ny_1+4-m}+\dfrac{y_2}{ny_2+4-m}=0$，即 $2ny_1y_2+(4-m)(y_1+y_2)=0$， (10 分)

$\therefore 2n\cdot\dfrac{12}{n^2-4}+(4-m)\left(-\dfrac{8n}{n^2-4}\right)=0$，

即 $8n(m-1)=0$，

解得 $m=1$， (11 分)

$\therefore$存在定点 $T(1,0)$，使得 $|SA|\cdot|TB|=|SB|\cdot|TA|$ 成立. (12 分)

22. **解**：(1) 当 $a=1$ 时，$f(x)=e^x-\ln(x+2)-2$，

(1 分)

$\therefore f'(x)=e^x-\dfrac{1}{x+2}$，

$\therefore f'(0)=\dfrac{1}{2}$，又 $f(0)=-1-\ln 2$，

$\therefore y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为：$y=\dfrac{1}{2}x-1-\ln 2$. (2 分)

(2) ① $f(x)=e^{x+\ln a}+x+\ln a-(x+2)-\ln(x+2)$， (3 分)

令 $g(t)=e^t+t$，则 $y=g(t)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，

由 $f(x)=0$，得 $g(x+\ln a)=g(\ln(x+2))$，

(4 分)

$\therefore x+\ln a=\ln(x+2)$ 有两个实根 x_1，x_2，

$\ln a=\ln(x+2)-x$， (5 分)

令 $h(x)=\ln(x+2)-x$，

$\therefore h'(x)=-\dfrac{x+1}{x+2}$，

当 $x\in(-2,-1)$ 时，$h'(x)>0$；$x\in(-1,+\infty)$ 时，$h'(x)<0$，

$\therefore h(x)$ 在 $(-2,-1)$ 上单调递增，在 $(-1,+\infty)$ 上单调递减，

$\therefore h(x)_{\max}=h(-1)=1$， (6 分)

又当 $x\to-2$ 时，$h(x)\to-\infty$；当 $x\to+\infty$ 时，$h(x)\to-\infty$，

$\therefore \ln a<1$，

$\therefore a\in(0,e)$， (8 分)

②由①可知 $h(x_1)=h(x_2)$，

$\therefore \ln(x_1+2)-x_1=\ln(x_2+2)-x_2$，

$\therefore \ln\dfrac{x_1+2}{x_2+2}=(x_1+2)-(x_2+2)$， (9 分)

不妨设 $x_1>x_2$，令 $t=\dfrac{x_1+2}{x_2+2}$，则 $t>1$，

$\therefore x_1+2=\frac{t\ln t}{t-1}, x_2+2=\frac{\ln t}{t-1}$,

$x_1+x_2+2=\frac{(t+1)\ln t}{t-1}-2$,　　(10 分)

令 $\varphi(t)=\ln t-\frac{2(t-1)}{t+1}(t>1)$,

$\varphi'(t)=\frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$,

$\therefore \varphi(t)$在$(1,+\infty)$单调递增，$\therefore \varphi(t)>\varphi(1)=0$,

(11 分)

$\therefore \ln t>\frac{2(t-1)}{t+1}$，$\therefore \frac{(t+1)\ln t}{t-1}-2>0$,

$\therefore x_1+x_2+2>0$.　　(12 分)