2022 北京顺义高三（上）期末

数　　学

考 生 须 知	1.本试卷共 5 页，共两部分，21 道小题，满分 150 分。考试时间 120 分钟。 2.在试卷和答题卡上准确填写学校名称、姓名和班级。 3.试题答案一律填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。 4.在答题卡上，选择题用 2B 铅笔作答，其它试题用黑色字迹签字笔作答。

第一部分(选择题 共 40 分)

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

（1） 在复平面内，复数 $\dfrac{2i}{1-i}$ 对应的点在

（A）第一象限　　（B）第二象限　　（C）第三象限　　（D）第四象限

（2）集合 $A=\{-2,-1,0\}$，$B=\{x|x^2\le 1\}$，则 $A\cap B=$

（A）$\{-1\}$　　（B）$\{-1,0\}$　　（C）$\{-2,-1\}$　　（D）$\{-2,0\}$

（3）下列函数中，既是奇函数又在区间 $(0,1)$ 上单调递增的是

（A）$y=\dfrac{1}{x}$　　（B）$y=2^x$　　（C）$y=\log_2 x$　　（D）$y=\sin x$

（4）已知 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$，且 $\vec{a}\perp(\vec{a}+3\vec{b})$，则向量 $\vec{a},\vec{b}$ 夹角的余弦值为

（A）$-\dfrac{1}{3}$　　（B）$-\dfrac{1}{5}$　　（C）$\dfrac{1}{5}$　　（D）$\dfrac{1}{3}$

（5）在等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_7-a_3=2$，$a_4=1$，则 $a_{12}=$

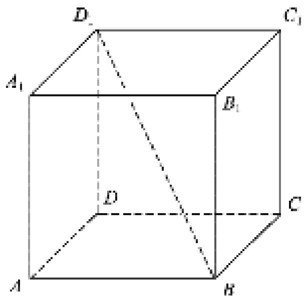
（A）5　　（B）4　　（C）3　　（D）2

（6）已知 $x\in\mathrm{R}$，则“$\dfrac{1}{x}<1$”是“$x>1$”的

（A）充分不必要条件　　（B）必要不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

（7）已知过 BD_1 的平面与正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 相交，分别交棱 AA_1，CC_1 于 M，N.则下列关于截面 BMD_1N 的说法中，不正确的是



（A）截面 BMD_1N 可能是矩形

（B）截面 BMD_1N 可能是菱形

（C）截面 BMD_1N 可能是梯形

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)，获取更多试题资料及排名分析信息。

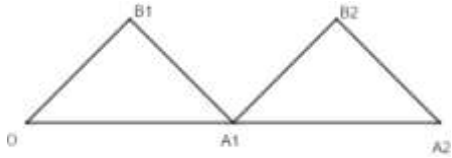
（D）截面 BMD_1N 不可能是正方形

（8）已知两点 $M(-5,0)$，$N(5,0)$，若直线上存在点 P，使得 $|PM|-|PN|=8$ 成立，则称该直线为“单曲直线”.下列直线中，“单曲直线”是

①$y=x+2$；②$x=4$；③ $y=\dfrac{3}{4}x$；④$y=\dfrac{1}{2}x-1$

（A）①②　　　　（B）①③　　　　（C）②③　　　　（D）②④

（9）如图，$\triangle OB_1A_1$，$\triangle A_1B_2A_2$ 是全等的等腰直角三角形，B_1, B_2 为直角顶点，O, A_1, A_2 三点共线.若点 P_1, P_2 分别是边 A_1B_1, A_2B_2 上的动点（不包含端点）.记 $m=\overrightarrow{OB_1}\cdot\overrightarrow{OP_2}$，$n=\overrightarrow{OB_2}\cdot\overrightarrow{OP_1}$，则



（A）$m>n$

（B）$m<n$

（C）$m=n$

（D）m,n 大小不能确定

（10）为弘扬传统文化，某中学举办了主题为“琴、棋、书、画”的传统文化知识竞赛．现有四位选手进入到决赛．决赛按“琴、棋、书、画”的主题分为四个环节，规定每个环节的第一名到第四名的得分依次为 4，3，2，1 分，四个环节结束后统计总分.若总分第一名获得 14 分，总分第二名获得 13 分.有下列结论：

①总分第三名不超过 9 分；

②总分第四名可能在某一个环节的比赛中拿到 3 分；

③总分第四名不超过 6 分；

④总分第三名可能获得某一个环节比赛的第一名.

其中，所有正确结论的序号是

（A）①②　　　　（B）①④　　　　（C）①②③　　　　（D）②③④

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 道小题，每题 5 分，共 25 分，把答案填在答题卡上.

（11）函数 $f(x)=\sqrt{2-x}+\lg(x+1)$ 的定义域为____________.

（12）在 $(x^2+\dfrac{1}{x})^5$ 的展开式中，x 的系数为_____.（用数字作答）

（13）将直线 $l: x-y+2=0$ 绕着点 $A(1,3)$ 按逆时针方向旋转 15°，得到直线 l_1.则 l_1 的倾斜角为____________，l_1 的方程是________________.

（14）若实数 a,b 满足 $a=b-1$，则使得 $0<ab<2$ 成立的一个 a 的值是__________.

（15）城市的许多街道是相互垂直或平行的，因此，乘坐出租车往往不能沿直线到达目的地，只能按直角拐弯的方式行走.在平面直角坐标系中，定义

$d(P,Q)=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$ 为两点 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$ 之间的“出租车距离”.

给出下列四个结论：

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)，　获取更多试题资料及排名分析信息。

①若点$O(0,0)$，点$A(1,2)$，则$d(O,A)=3$；

②到点$O(0,0)$的“出租车距离”不超过 1 的点的集合所构成的平面图形面积是π；

③若点$A(1,2)$，点B是抛物线$y^2=x$上的动点，则$d(A,B)$的最小值是 1；

④若点$A(1,2)$，点B是圆$x^2+y^2=1$上的动点，则$d(A,B)$的最大值是$3+\sqrt{2}$.

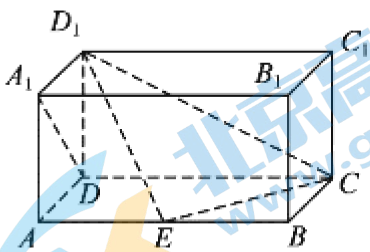
其中，所有正确结论的序号是______________.

三、解答题共 6 道题，共 85 分, 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

（16）（本小题 14 分）如图，在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AD=AA_1=1, AB=2$，点E在线段 AB 上.

（1）证明：$D_1E\perp A_1D$；

（II）当点E是 AB 中点时，求 A_1D 与平面D_1EC所成角的大小.



（17）（本小题 14 分）在$\triangle ABC$中，$a=1$，$c\sin A=\sqrt{3}a\cos C$

（I）求C的大小；

（II）再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知，判断$\triangle ABC$是否存在，若不存在，说明理由；若存在，求出$\triangle ABC$的面积.

条件①：$\cos A\cos C=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$；

条件②：$b^2-c^2=ac$；

条件③：a,b,c成等差数列.

注：如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

（18）（本小题 14 分）某单位 4 人积极参加本地区农产品的网购活动,共有A、B两种农产品供选择,每人只购其中一种.大家约定：每人通过掷一次质地均匀的骰子决定自己去购买哪种农产品.若掷出点数为 1 或 2，购买农产品 A，若掷出点数大于 2，则购买农产品 B.

（I）求这 4 个人中恰有 1 人购买农产品 A 的概率；

（II）用ξ,η分别表示这 4 个人中购买农产品 A 和 B 的人数,记$X=\xi\eta$,求随机变量X的分布列与数学期望$E(X)$.

（19）（本小题 14 分）已知函数$f(x)=\dfrac{1}{2}ax+\dfrac{a-2}{2x}(a>0)$

（I）若$a=1$，求曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程；

（II）若对任意$x\in[1,+\infty)$，都有$f(x)\ge\ln x$.求实数a的取值范围.

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

（20）（本小题 15 分）已知椭圆 $W:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 过点 $A\left(0,-1\right)$，且离心率 $e=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

（I）求椭圆 W 的方程；

（II）点 B 在直线 $x=4$ 上，点 B 关于 x 轴的对称点为 B_1，直线 AB,AB_1 分别交椭圆 W 于 C,D 两点（不同于 A 点）.求证：直线 CD 过定点.

（21）（本小题 14 分）数列 A_n： a_1，a_2，$\cdots$，$a_n\ (n\geq 2)$ 满足 $a_i\in\{-1,1\}\ (i=1,2,\cdots,n)$，称 $T_n=a_1\cdot 2^{n-1}+a_2\cdot 2^{n-2}+a_3\cdot 2^{n-3}+\cdots+a_{n-1}\cdot 2^1+a_n\cdot 2^0$ 为数列 A_n 的指数和.

（I）若 $n=3$，求 T_3 所有可能的取值；

（II）求证: $T_n<0$ 的充分必要条件是 $a_1=-1$；

（III）若 $T_{100}<0$，求 T_{100} 的所有可能取值之和.

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

2022 北京顺义高三（上）期末数学

参考答案

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.

BBDAA　　　BCDBC

二、填空题共 5 道小题，每题 5 分，共 25 分

11、$(-1,2]$　　　12、10　　　13、$60^{\circ}\left(或\dfrac{\pi}{3}\right)$; $y-3=\sqrt{3}(x-1)$

14、$a\in\{a|-2<a<-1或0<a<1\}$　　　15、①③④

注：11 题不写成集合，但结果正确的，给 2 分

12 题没写成数字的，不得分

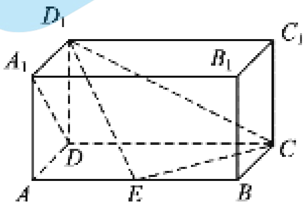
13 题第一空给 3 分，第 2 空给 2 分，第 2 空不化简不扣分

14 题没有写出具体取值，而是解出取值范围，得 2 分

15 题有错不得分，只选 1 个正确选项得 2 分，选择 2 个正确选项得 3 分

三，解答题共 6 道题，共 85 分, 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤

16、



（I）连结 AD_1，因为在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中

所以有 $AB\perp$ 平面A_1ADD_1，$AD_1\subset$ 平面A_1ADD_1，所以 $AB\perp A_1D$ ---------2 分

又因为 $AD=AA_1=1$，所以四边形A_1ADD_1是正方形

所以 $AD_1\perp A_1D$，又 $AB\cap AD_1=A$，所以 $A_1D\perp$ 平面AD_1E　　---------4 分

又 $D_1E\subset$ 平面AD_1E　所以 $A_1D\perp D_1E$　　　　---------6 分

注：若第一问中，将 E 取做中点或其它特殊点，如果证明过程正确，则最多给 3 分

（II）以点 D 为原点，DA 所在直线为 x 轴，DC 所在直线为 y 轴，DD_1 所在直线为 z 轴建立空间直角坐标系，则

各点坐标为 $D(0,0,0)$，$A_1(1,0,1)$，$D_1(0,0,1)$

当点 E 是 AB 中点时，可得 $E(1,1,0)$

所以 $\overrightarrow{D_1E}=(1,1,-1)$，$\overrightarrow{CE}=(1,-1,0)$　　　---------8 分

设 $\vec{n}=(x,y,z)$ 为平面 D_1EC 的一个法向量

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{D_1E}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{CE}=0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x+y-z=0\\ x-y=0\end{cases}$ 令 $x=1$, 可得$y=1, z=2$

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)，　获取更多试题资料及排名分析信息。

所以 $\vec{n}=(1,1,2)$ ---------10 分

又 $\overrightarrow{A_1D}=(-1,0,-1)$，所以 $\cos\langle\overrightarrow{A_1D},\vec{n}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{A_1D}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{A_1D}||\vec{n}|}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

设 A_1D 与平面 D_1EC 所成角为 θ，$0<\theta\le\dfrac{\pi}{2}$，

则 $\sin\theta=\left|\cos\langle\overrightarrow{A_1D},\vec{n}\rangle\right|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ---------12 分

即 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 所以 A_1D 与平面 D_1EC 所成的角为 $\dfrac{\pi}{3}$ ---------14 分

17、（I）因为 $c\cdot\sin A=\sqrt{3}a\cos C$，由正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$ ---------2 分

可得 $a\sin C=c\sin A$

所以 $a\sin C=\sqrt{3}a\cos C$， ---------4 分

即 $\tan C=\sqrt{3}$，又 $0<C<\pi$，所以 $C=\dfrac{\pi}{3}$ ---------6 分

（II）选择条件①：$\cos A\cos C=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

由（I）知，$C=\dfrac{\pi}{3}$. $\cos C=\dfrac{1}{2}$ 所以 $\cos A=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 可得 $A=\dfrac{\pi}{4}$， ---------8 分

所以 $B=\dfrac{5\pi}{12}$， 此时 $\triangle ABC$ 存在 ---------10 分

因为 $a=1$，所以 $c=\dfrac{a\sin C}{\sin A}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ ---------11 分

又因为 $\sin\dfrac{5\pi}{12}=\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin\dfrac{\pi}{6}\cos\dfrac{\pi}{4}+\cos\dfrac{\pi}{6}\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ -----12 分

所以 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{3+\sqrt{3}}{8}$ ---------14 分

注：如果没有判断 $\triangle ABC$ 是否存在，而直接求出 $\triangle ABC$ 的面积，不扣分

选择条件②：$b^2-c^2=ac$

因为 $C=\dfrac{\pi}{3}$，由余弦定理可得 $\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{1}{2}$， ---------8 分

又 $a=1$ 所以可得 $b^2-c^2=b-1$， ---------10 分

又由条件②：$b^2-c^2=ac$ 可得 $b^2-c^2=c$ 所以 $c=b-1$， ---------12 分

又 $a=1$，所以可得 $b=a+c$，这与在 ΔABC 中，$a+c>b$ 矛盾

故此时 ΔABC 不存在 ---------14 分

选择条件③：a,b,c 成等差数列

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

因为a,b,c成等差数列，所以$2b=a+c$， ---------7 分

因为$a=1$，所以$2b=1+c$

又由余弦定理可得$\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{1}{2}$， ---------9 分

化简得$b^2-c^2=b-1$ ---------10 分

联立方程组$\begin{cases}2b=1+c\\ b^2-c^2=b-1\end{cases}$可解得$b=1$或$b=0$（舍） ---------12 分

又$a=1$，$C=\dfrac{\pi}{3}$，所以可知ΔABC为等边三角形，此时$\triangle ABC$存在

所以$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ ---------14 分

注：如果没有判断$\triangle ABC$是否存在，而直接求出$\triangle ABC$的面积，不扣分

18、（I）由题可知购买农产品A的概率为$\dfrac{1}{3}$，

购买农产品B的概率为$\dfrac{2}{3}$ ---------2 分

设事件C为 4 人中恰有 1 人购买农产品A， ---------3 分

依题可知，4 人是否购买农产品相互独立，互不影响 ---------4 分

所以$P(C)=C_4^1\left(\dfrac{1}{3}\right)^1\left(\dfrac{2}{3}\right)^3=\dfrac{32}{81}$ ---------5 分

注：没有判断是否为相互独立事件，扣 1 分，没有设事件，扣 1 分，最后结果不化简，结果正确，不扣分

（II）用ξ,η分别表示这 4 个人中购买农产品 A 和 B 的人数，

则ξ可取$0,1,2,3,4$，η可取$0,1,2,3,4$， ---------7 分

当$\xi=0$时，$\eta=4$，表示 4 人全部购买产品B，概率$P_1=C_4^0\left(\dfrac{1}{3}\right)^0\left(\dfrac{2}{3}\right)^4=\dfrac{16}{81}$，

当$\xi=1$时，$\eta=3$，表示 4 人中恰有 1 人购买农产品A，概率$P_2=\dfrac{32}{81}$，

当$\xi=2$时，$\eta=2$，表示 4 人中恰有 2 人购买农产品A，概率$P_3=C_4^2\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{24}{81}$，

当$\xi=3$时，$\eta=1$，表示 4 人中恰有 3 人购买农产品A，概率$P_4=C_4^3\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\left(\dfrac{2}{3}\right)^1=\dfrac{8}{81}$，

当$\xi=4$时，$\eta=0$，表示 4 人中全部购买农产品A，概率$P_5=C_4^4\left(\dfrac{1}{3}\right)^4\left(\dfrac{2}{3}\right)^0=\dfrac{1}{81}$，

所以由$X=\xi\eta$可知，X的可能取值为$0,3,4$ ---------9 分

当$X=0$时，对应的概率$P=P_1+P_5=\dfrac{17}{81}$，

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

当 $X=3$ 时，对应的概率 $P=P_2+P_4=\dfrac{40}{81}$，

当 $X=4$ 时，对应的概率 $P=P_3=\dfrac{24}{81}$，

所以随机变量 X 的分布列为

X	0	3	4
P	$\dfrac{17}{81}$	$\dfrac{40}{81}$	$\dfrac{24}{81}$

---------12 分

所以，数学期望 $E(X)=0\times\dfrac{17}{81}+3\times\dfrac{40}{81}+4\times\dfrac{24}{81}=\dfrac{8}{3}$. ---------14 分

注：期望公式表达正确，得 1 分，期望值结果正确，不化简不扣分.

19、（I）当 $a=1$ 时,函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2x}$，定义域为 $\{x|x\neq 0\}$， ---------2 分

又 $f(1)=0$， $f'(x)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2x^2}$， ---------4 分

所以 $f'(1)=1$ ---------5 分

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y-0=x-1$ 即 $x-y-1=0$ ----6 分

（II）若 $f(x)\geq\ln x$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立，

即 $\dfrac{1}{2}ax+\dfrac{a-2}{2x}-\ln x\geq 0$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立 ---------7 分

可设 $g(x)=\dfrac{1}{2}ax+\dfrac{a-2}{2x}-\ln x$， $x\in[1,+\infty)$

则 $g'(x)=\dfrac{ax^2-2x-(a-2)}{2x^2}$ ---------9 分

$=\dfrac{(x-1)[ax-(2-a)]}{2x^2}$， $a>0$， $x\in[1,+\infty)$

令 $g'(x)>0$ 可解得 $x>\dfrac{2-a}{a}$ ---------11 分

讨论：（1）当 $\dfrac{2-a}{a}\leq 1$ 时，即 $a\geq 1$ 时， $g'(x)>0$ 在 $x\in[1,+\infty)$ 上恒成立

所以 $g(x)$ 在 $x\in[1,+\infty)$ 上单调递增， $g(x)_{\min}=g(1)=a-1$，又 $a\geq 1$

所以 $g(1)\geq 0$ 恒成立，即 $a\geq 1$ 时满足 ---------12 分

（2）当 $\dfrac{2-a}{a}>1$ 即 $0<a<1$ 时，

$g(x)$ 在 $x\in\left[1,\dfrac{2-a}{a}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\dfrac{2-a}{a},+\infty\right)$ 上单调递增

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

此时，$g(x)_{\min}<g(1)$，又$0<a<1$时，$g(1)=a-1<0$，即$g(x)_{\min}<0$

不满足$g(x)\geq 0$恒成立，故舍去 ---------13 分

综上可知：实数a的取值范围是$[1,+\infty)$. ---------14 分

2）方法二：

若$f(x)\geq \ln x$在$[1,+\infty)$上恒成立，

即$\frac{1}{2}ax+\frac{a-2}{2x}-\ln x\geq 0$在$[1,+\infty)$上恒成立. ---------7 分

令$x=1$，则$\frac{1}{2}a+\frac{a-2}{2}-0\geq 0\Rightarrow a\geq 1$，

从而$f(x)\geq \ln x$在$[1,+\infty)$上恒成立的一个必要条件是$a\geq 1$， ---------10 分

以下证明这个条件也是充分的.

事实上，当$a\geq 1$时，

$f(x)-\ln x=\frac{1}{2}ax+\frac{a-2}{2x}-\ln x\geq \frac{1}{2}x+\frac{-2}{2x}-\ln x=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)-\ln x(x\geq 1)$.-----11 分

记$g(x)=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)-\ln x$,只要证明当$x\in[1,+\infty)$时，$g(x)\geq 0$. ---------12 分

注意到$g(1)=0,g'(x)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)-\frac{1}{x}=\frac{(x-1)^2}{2x^2}\geq 0$

从而当$x\in[1,+\infty)$时，$g(x)\geq g(0)=0$.

这表明$a\geq 1$是$f(x)\geq \ln x$在$[1,+\infty)$上恒成立的充分必要条件. ---------14 分

20、（I）依题意可得$b=1$，又$e=\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{c}{a}$， ---------1 分

所以，可解得$a=2,c=\sqrt{3}$， ---------3 分

所以椭圆C方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$ ---------4 分

（II）因为C,D两点不同于A点，所以直线CD斜率一定存在，

可设方程为$y=kx+m$，设$C(x_1,y_1),D(x_2,y_2)$，其中$x_1\neq 0,x_2\neq 0$

联立方程组$\begin{cases}y=kx+m\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$消去$y$，化简可得$\left(\frac{1}{4}+k^2\right)x^2+2kmx+m^2-1=0$ --------6 分

所以$x_1+x_2=\frac{-8km}{1+4k^2}$，$x_1\cdot x_2=\frac{4m^2-4}{1+4k^2}$ ①式 ---------8 分

又$A(0,-1)$，所以$k_{AC}=\frac{y_1+1}{x_1}$，$k_{AD}=\frac{y_2+1}{x_2}$

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

所以直线 AC 方程为 $y=\dfrac{y_1+1}{x_1}x-1$，直线 AD 方程为 $y=\dfrac{y_2+1}{x_2}x-1$

令 $x=4$ 得 $y_B=\dfrac{4y_1+4}{x_1}-1$，$y_{B_1}=\dfrac{4y_2+4}{x_2}-1$ ---------10 分

因为 B_1 和 B 关于 x 轴对称，所以 $y_B+y_{B_1}=0$ 即 $\dfrac{4y_1+4}{x_1}+\dfrac{4y_2+4}{x_2}-2=0$ ---------12 分

又 $y_1=kx_1+m, y_2=kx_2+m$ 代入上式，整理可得 $(4k-1)x_1x_2+2(m+1)(x_1+x_2)=0$

将①式代入可得 $m=1-4k$ ---------14 分

所以，直线 CD 的方程为 $y=kx+1-4k$，即 $y-1=k(x-4)$

所以，直线 CD 过定点 $(4,1)$ ---------15 分

（2）方法二：首先根据 B 与 B_1 关于 x 轴对称，有 $y_B+y_{B_1}=0$，进而

$k_{AC}+k_{AD}=k_{AB}+k_{AB_1}=\dfrac{y_B+1}{4}+\dfrac{y_{B_1}+1}{4}=\dfrac{1}{2}$. ---------6 分

记 $CD: y=kx+m$，设 $C(x_1,y_1),D(x_2,y_2)$，其中 $x_1\neq 0, x_2\neq 0$

联立方程组 $\begin{cases} y=kx+m \\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases}$ 消去 y，化简可得 $\left(\dfrac{1}{4}+k^2\right)x^2+2kmx+m^2-1=0$， -----8 分

从而 $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}=-\dfrac{2km}{m^2-1}$. ---------10 分

另一方面，

$k_{AC}+k_{AD}=\dfrac{1}{2}=\dfrac{y_1+1}{x_1}+\dfrac{y_2+1}{x_2}=\dfrac{kx_1+m+1}{x_1}+\dfrac{kx_2+m+1}{x_2}=2k+(m+1)\left(\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}\right)$

所以 $2k+(m+1)\left(-\dfrac{2km}{m^2-1}\right)=\dfrac{1}{2}$， ---------12 分

化简可知 $-2k=\dfrac{1}{2}(m-1)\Leftrightarrow 4k+m=1$， ---------14 分

所以，直线 CD 与直线 $x=4$ 相交于定点 $(4,1)$. ---------15 分

（其它方法酌情给分）

21、（I）$T_3\in\{-7,-5,-3,-1,1,3,5,7\}$ ---------4 分

注：每够两个值给 1 分，有 1 个错值扣 1 分.最少得 0 分.

（II）(充分性 $\Leftarrow$)

当 $a_1=-1$ 时，可得

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

$$\begin{aligned}T_n &= -2^{n-1} + a_2\cdot 2^{n-2} + a_3\cdot 2^{n-3} + \cdots + a_{n-1}\cdot 2^1 + a_n\cdot 2^0\\ &\le -2^{n-1} + \left(2^{n-2} + 2^{n-3} + \cdots + 2^1 + 2^0\right)\\ &\le -2^{n-1} + 2^{n-1} - 1\\ &= -1 < 0;\end{aligned}$$

---------7 分

(必要性$\Rightarrow$)

当 $T_n = a_1\cdot 2^{n-1} + a_2\cdot 2^{n-2} + a_3\cdot 2^{n-3} + \cdots + a_{n-1}\cdot 2^1 + a_n\cdot 2^0 < 0$ 时，用反证法，

假设 $a_1 = 1$，则 $T_n = 2^{n-1} - 2^{n-2} - 2^{n-3} + \cdots + -2^1 - 2^0 = 2^{n-1} - \left(2^{n-1} - 1\right) = 1 > 0$, 矛盾.

从而 $a_1 = -1$.　　　　---------10 分

（III）当 $T_{100} < 0$ 时，根据第（2）问结论可知 $a_1 = -1$,并且反之亦然.

当 $a_1 = -1$ 时，$(a_2, \cdots, a_{100})$ 有 2^{99} 中不同取值方式，

其中 2^{98} 与 -2^{98}, 2^{97} 与 -2^{97}, $\cdots$, 2^0 与 -2^0, 在所有指数和中出现的总次数都是 2^{98} 种，

因此这些项对指数和的总贡献为零. 另一方面 -2^{99} 在所有指数和中出现 2^{99} 次，

从而所有指数和之和为 $\left(-2^{99}\right)\cdot 2^{99} = -2^{198}$.　　　　---------14 分

（其它正确方法酌情给分）

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

北京高一高二高三期末试题下载

北京高考资讯整理了**【2022 年 1 月北京各区各年级期末试题&答案汇总】**专题，及时更新最新试题及答案。

通过**【北京高考资讯】公众号**，**对话框回复【期末】**或者**底部栏目<试题下载→期末试题>**，进入汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！