

绝密★启用前

2020年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

数 学

本试卷分为第I卷（选择题）和第II卷（非选择题）两部分，共150分，考试用时120分钟。第I卷1至3页，第II卷4至6页。

答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上，并在规定位置粘贴考试用条形码。答卷时，考生务必将答案涂写在答题卡上，答在试卷上的无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

祝各位考生考试顺利！

第I卷

注意事项：

1. 每小题选出答案后，用铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。
2. 本卷共9小题，每小题5分，共45分。

参考公式：

- 如果事件 A 与事件 B 互斥，那么 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ 。
- 如果事件 A 与事件 B 相互独立，那么 $P(AB) = P(A)P(B)$ 。
- 球的表面积公式 $S = 4\pi R^2$ ，其中 R 表示球的半径。

一. 选择题：在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

(1) 设全集 $U = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ ，集合 $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ ， $B = \{-3, 0, 2, 3\}$ ，则

$$A \cap (\complement_U B) =$$

(A) $\{-3, 3\}$

(B) $\{0, 2\}$

(C) $\{-1, 1\}$

(D) $\{-3, -2, -1, 1, 3\}$

(2) 设 $a \in \mathbf{R}$ ，则“ $a > 1$ ”是“ $a^2 > a$ ”的

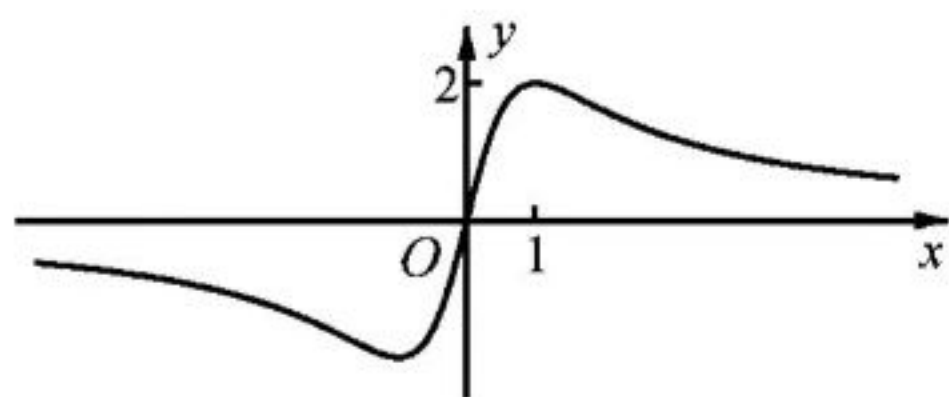
(A) 充分不必要条件

(B) 必要不充分条件

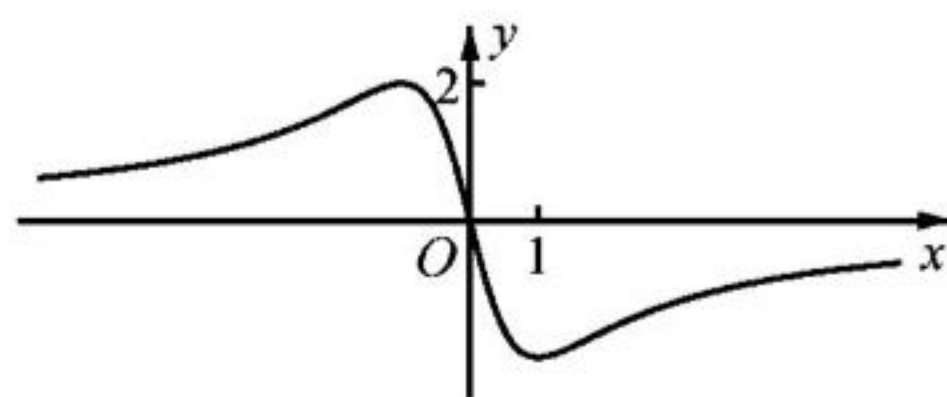
(C) 充要条件

(D) 既不充分也不必要条件

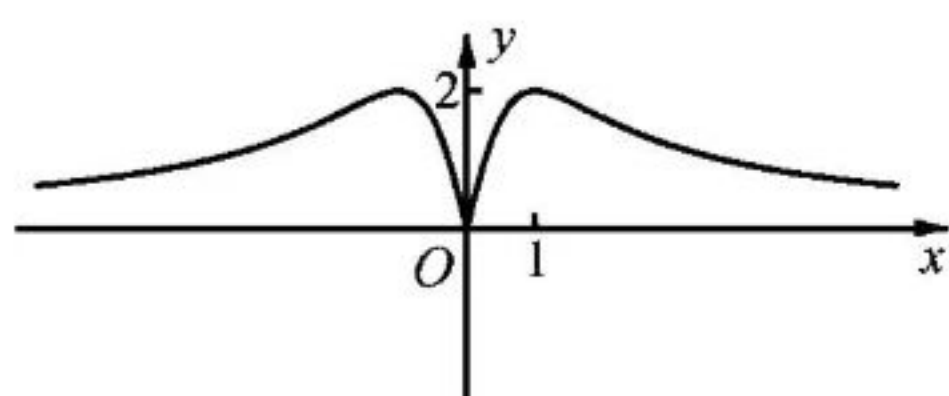
(3) 函数 $y = \frac{4x}{x^2 + 1}$ 的图象大致为



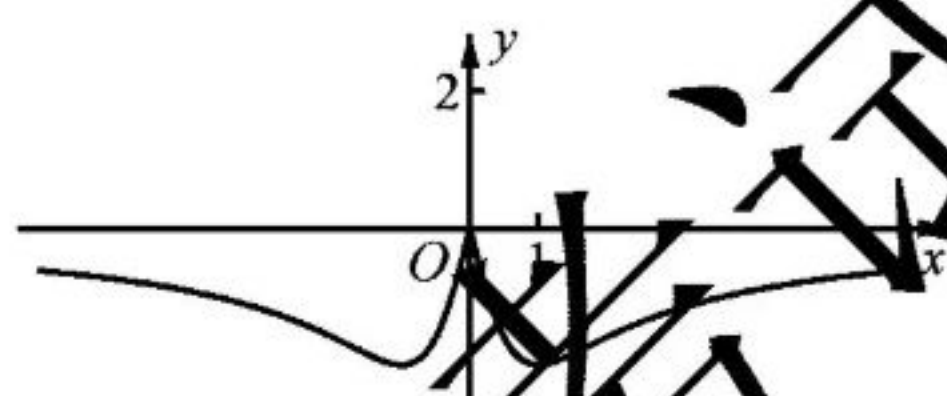
(A)



(B)

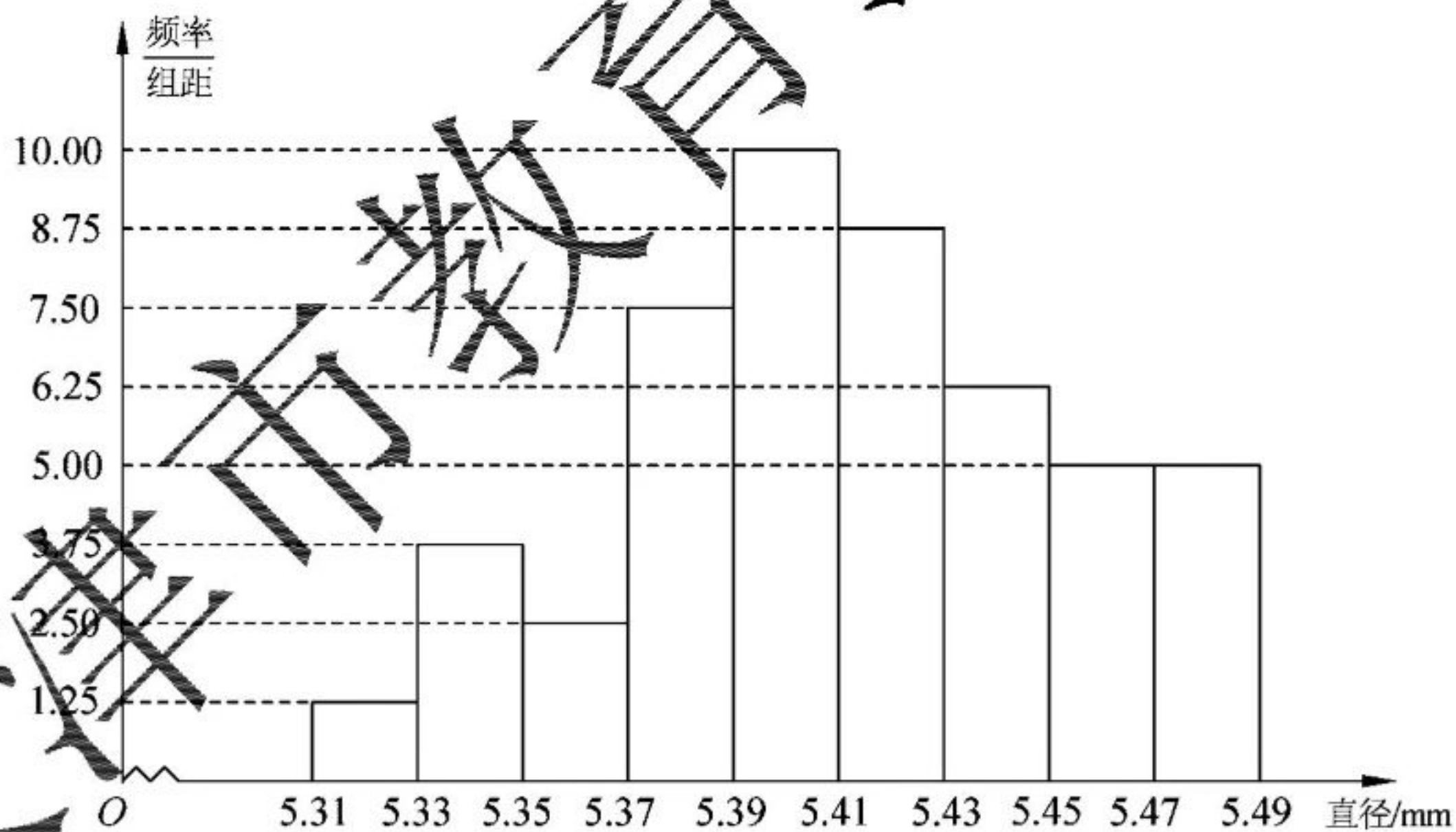


(C)



(D)

(4) 从一批零件中抽取 80 个，测量其直径（单位：mm），将所得数据分为 9 组： $[5.31, 5.33)$ ， $[5.33, 5.35)$ ， \dots ， $[5.45, 5.47)$ ， $[5.47, 5.49]$ ，并整理得到如下频率分布直方图，则在被抽取的零件中，直径落在区间 $[5.33, 5.47)$ 内的个数为



(A) 10

(B) 18

(C) 20

(D) 36

(5) 若棱长为 $2\sqrt{3}$ 的正方体的顶点都在同一球面上，则该球的表面积为

(A) 12π

(B) 24π

(C) 36π

(D) 144π

(6) 设 $a=3^{0.7}$, $b=\left(\frac{1}{3}\right)^{-0.8}$, $c=\log_{0.7} 0.8$, 则 a, b, c 的大小关系为

(A) $a < b < c$

(B) $b < a < c$

(C) $b < c < a$

(D) $c < a < b$

(7) 设双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$), 过抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点和点 $(0, b)$

的直线为 l . 若 C 的一条渐近线与 l 平行, 另一条渐近线与 l 垂直, 则双曲线 C 的方程为

(A) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$

(B) $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$

(C) $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$

(D) $x^2 - y^2 = 1$

(8) 已知函数 $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$. 给出下列结论:

① $f(x)$ 的最小正周期为 2π ;

② $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 是 $f(x)$ 的最大值;

③ 把函数 $y = \sin x$ 的图象上所有点向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 可得到函数 $y = f(x)$

的图象.

其中所有正确结论的序号是

(A) ①

(B) ①③

(C) ②③

(D) ①②③

(9) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$ 若函数 $g(x) = f(x) - |kx^2 - 2x|$ ($k \in \mathbf{R}$) 恰有 4 个零

点, 则 k 的取值范围是

(A) $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (2\sqrt{2}, +\infty)$

(B) $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (0, 2\sqrt{2})$

(C) $(-\infty, 0) \cup (0, 2\sqrt{2})$

(D) $(-\infty, 0) \cup (2\sqrt{2}, +\infty)$

数 学

第Ⅱ卷

注意事项：

1. 用黑色墨水的钢笔或签字笔将答案写在答题卡上。
2. 本卷共11小题，共105分。

二. 填空题：本大题共6小题，每小题5分，共30分。试题中包含两个空的，答对1个的给3分，全部答对的给5分。

(10) i 是虚数单位，复数 $\frac{8-i}{2+i} =$ _____.

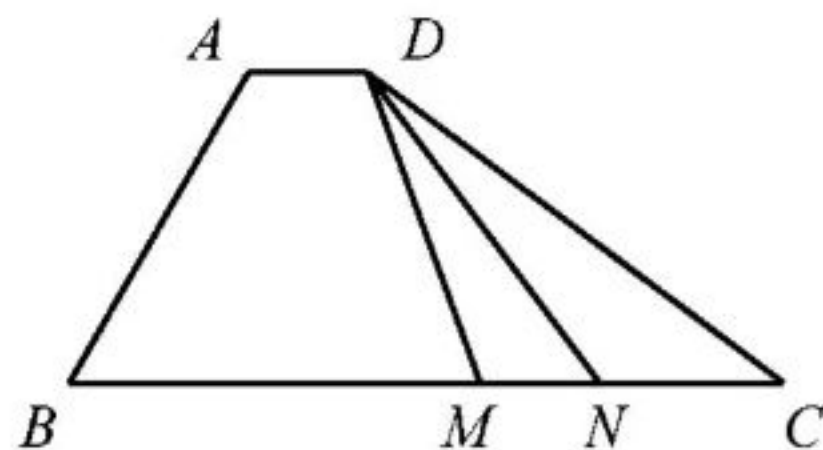
(11) 在 $\left(x + \frac{2}{x^2}\right)^5$ 的展开式中， x^2 的系数是 _____.

(12) 已知直线 $x - \sqrt{3}y + 8 = 0$ 和圆 $x^2 + y^2 = r^2$ ($r > 0$) 相交于 A, B 两点. 若 $|AB| = 6$, 则 r 的值为 _____.

(13) 已知甲、乙两球落入盒子的概率分别为 $\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{3}$. 假定两球是否落入盒子互不影响，则甲、乙两球都落入盒子的概率为 _____；甲、乙两球至少有一个落入盒子的概率为 _____.

(14) 已知 $a > 0, b > 0$, 且 $ab = 1$, 则 $\frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{8}{a+b}$ 的最小值为 _____.

(15) 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $\angle B = 60^\circ, AB = 3, BC = 6$, 且 $\overrightarrow{AD} = \lambda \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = -\frac{3}{2}$, 则实数 λ 的值为 _____, 若 M, N 是线段 BC 上的动点，且 $|\overrightarrow{MN}| = 1$, 则 $\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{DN}$ 的最小值为 _____.



第(15)题图

三. 解答题: 本大题共 5 小题, 共 75 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

(16) (本小题满分 14 分)

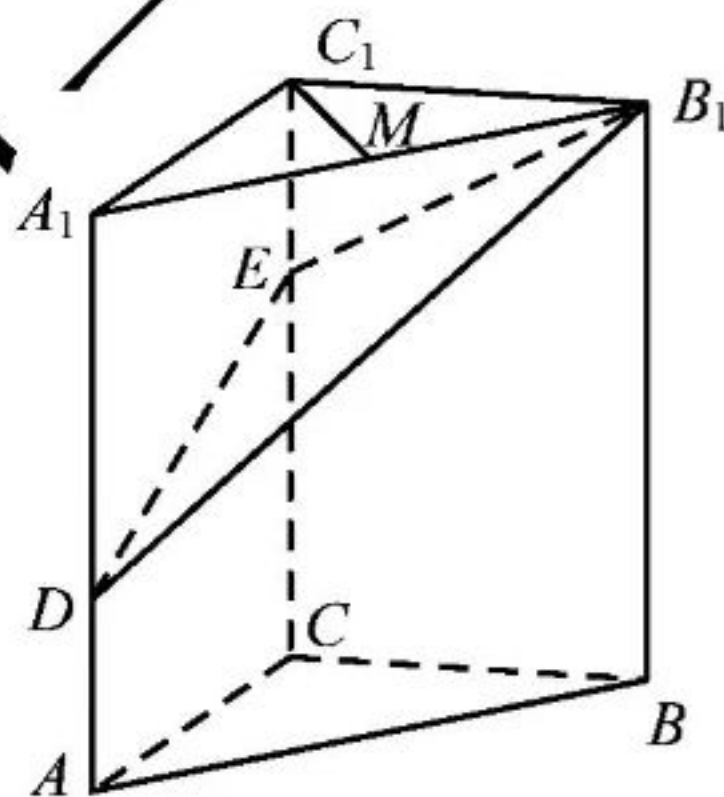
在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 已知 $a = 2\sqrt{2}, b = 5, c = \sqrt{13}$.

- (I) 求角 C 的大小;
- (II) 求 $\sin A$ 的值;
- (III) 求 $\sin\left(2A + \frac{\pi}{4}\right)$ 的值.

(17) (本小题满分 15 分)

如图, 在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $CC_1 \perp$ 平面 ABC , $AC \perp BC$, $AC = BC = 2$, $CC_1 = 3$, 点 D, E 分别在棱 AA_1 和棱 CC_1 上, 且 $AD = 1, CE = 2$, M 为棱 A_1B_1 的中点.

- (I) 求证: $C_1M \perp B_1D$;
- (II) 求二面角 $B - B_1E - D$ 的正弦值;
- (III) 求直线 AB 与平面 DB_1E 所成角的正弦值.



(18) (本小题满分 15 分)

已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的一个顶点为 $A(0, -3)$, 右焦点为 F , 且 $|OA| = |OF|$,

其中 O 为原点.

- (I) 求椭圆的方程;
- (II) 已知点 C 满足 $3\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OF}$, 点 B 在椭圆上 (B 异于椭圆的顶点), 直线 AB 与以 C 为圆心的圆相切于点 P , 且 P 为线段 AB 的中点. 求直线 AB 的方程.

(19) (本小题满分 15 分)

已知 $\{a_n\}$ 为等差数列, $\{b_n\}$ 为等比数列, $a_1 = b_1 = 1$, $a_5 = 5(a_4 - a_3)$, $b_5 = 4(b_4 - b_3)$.

(I) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(II) 记 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 求证: $S_n S_{n+2} < S_{n+1}^2$ ($n \in \mathbf{N}^*$);

(III) 对任意的正整数 n , 设 $c_n = \begin{cases} \frac{(3a_n - 2)b_n}{a_n a_{n+2}}, & n \text{ 为奇数,} \\ \frac{a_{n-1}}{b_{n+1}}, & n \text{ 为偶数.} \end{cases}$ 求数列 $\{c_n\}$ 的前 $2n$ 项和.

(20) (本小题满分 16 分)

已知函数 $f(x) = x^3 + k \ln x$ ($k \in \mathbf{R}$), $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数.

(I) 当 $k = 6$ 时,

(i) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(ii) 求函数 $g(x) = f(x) - f'(x) + \frac{9}{x}$ 的单调区间和极值;

(II) 当 $k \geq -3$ 时, 求证: 对任意的 $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$, 且 $x_1 > x_2$, 有

$$\frac{f'(x_1) + f'(x_2)}{2} > \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}.$$

数学参考解答

一. 选择题：每小题 5 分，满分 45 分.

- (1) C (2) A (3) A (4) B (5) C
 (6) D (7) D (8) B (9) D

二. 填空题：每小题 5 分，满分 30 分. 试题中包含两个空的，答对 1 个的给 3 分，全部答对的给 5 分.

- (10) $3-2i$ (11) 10 (12) 5
 (13) $\frac{1}{6}; \frac{2}{3}$ (14) 4 (15) $\frac{1}{6}; \frac{13}{2}$

三. 解答题

(16) 满分 14 分.

(I) 解：在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理及 $a=2\sqrt{2}$ ， $b=5$ ， $c=\sqrt{13}$ ，有

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \text{ 又因为 } C \in (0, \pi), \text{ 所以 } C = \frac{\pi}{4}.$$

(II) 解：在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理及 $C = \frac{\pi}{4}$ ， $a=2\sqrt{2}$ ， $c=\sqrt{13}$ ，可得

$$\sin A = \frac{a \sin C}{c} = \frac{2\sqrt{13}}{13}.$$

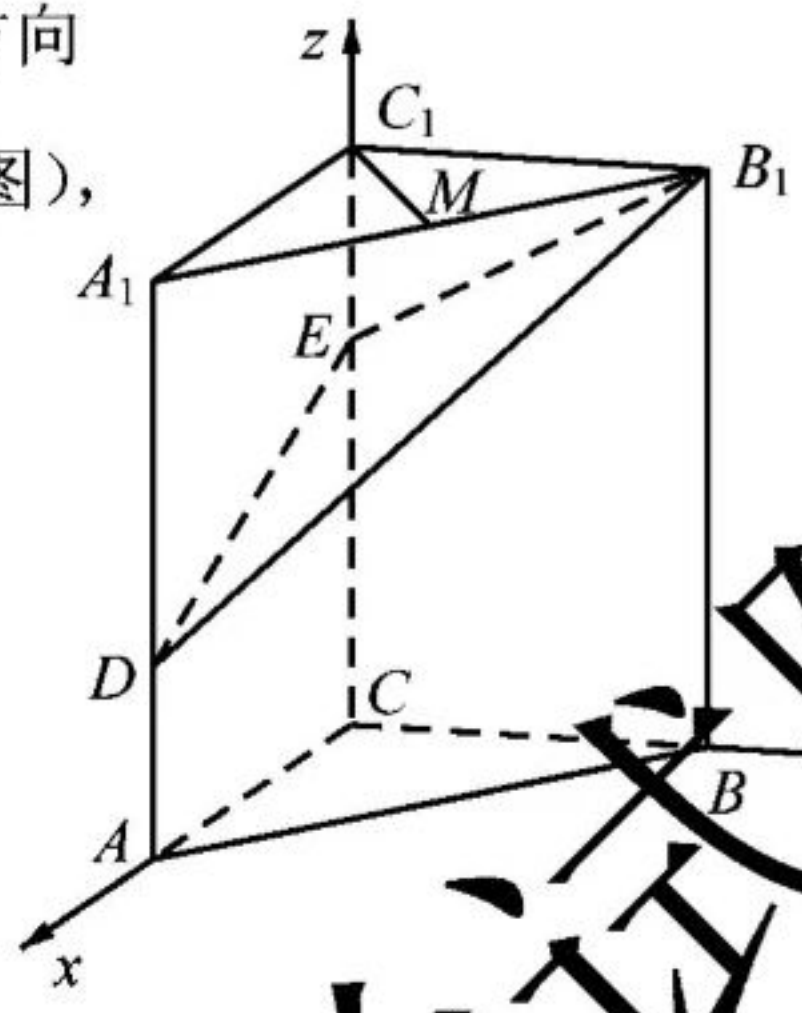
(III) 解：由 $a < c$ 及 $\sin A = \frac{2\sqrt{13}}{13}$ ，可得 $\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$ ，进而

$$\sin 2A = 2 \sin A \cos A = \frac{12}{13}, \quad \cos 2A = 2 \cos^2 A - 1 = \frac{5}{13}. \text{ 所以,}$$

$$\sin\left(2A + \frac{\pi}{4}\right) = \sin 2A \cos \frac{\pi}{4} + \cos 2A \sin \frac{\pi}{4} = \frac{12}{13} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{5}{13} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{17\sqrt{2}}{26}.$$

(17) 满分 15 分.

依题意, 以 C 为原点, 分别以 \overrightarrow{CA} , \overrightarrow{CB} , $\overrightarrow{CC_1}$ 的方向为 x 轴, y 轴, z 轴的正方向建立空间直角坐标系 (如图), 可得 $C(0,0,0)$, $A(2,0,0)$, $B(0,2,0)$, $C_1(0,0,3)$, $A_1(2,0,3)$, $B_1(0,2,3)$, $D(2,0,1)$, $E(0,0,2)$, $M(1,1,3)$.



(I) 证明: 依题意, $\overrightarrow{C_1M} = (1,1,0)$,

$\overrightarrow{B_1D} = (2,-2,-2)$, 从而 $\overrightarrow{C_1M} \cdot \overrightarrow{B_1D} = 2 - 2 + 0 = 0$, 所以 $C_1M \perp B_1D$.

(II) 解: 依题意, $\overrightarrow{CA} = (2,0,0)$ 是平面 BB_1E 的一个法向量, $\overrightarrow{EB_1} = (0,2,1)$,

$\overrightarrow{ED} = (2,0,-1)$. 设 $\mathbf{n} = (x,y,z)$ 为平面 DB_1E 的法向量, 则 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{EB_1} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{ED} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 2y + z = 0, \\ 2x - z = 0. \end{cases}$ 不妨设 $x=1$, 可得 $\mathbf{n} = (1,-1,2)$.

因此有 $\cos \langle \overrightarrow{CA}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \mathbf{n}}{|\overrightarrow{CA}| |\mathbf{n}|} = \frac{\sqrt{6}}{6}$, 于是 $\sin \langle \overrightarrow{CA}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\sqrt{30}}{6}$.

所以, 二面角 $B-B_1E-D$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{30}}{6}$.

(III) 解: 依题意, $\overrightarrow{AB} = (-2,2,0)$. 由 (II) 知 $\mathbf{n} = (1,-1,2)$ 为平面 DB_1E 的一个法

向量, 于是 $\cos \langle \overrightarrow{AB}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \mathbf{n}}{|\overrightarrow{AB}| |\mathbf{n}|} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

所以, 直线 AB 与平面 DB_1E 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(18) 满分 15 分.

(I) 解: 由已知可得 $b=3$. 记半焦距为 c , 由 $|OF|=|OA|$ 可得 $c=b=3$. 又由

$a^2 = b^2 + c^2$, 可得 $a^2 = 18$. 所以, 椭圆的方程为 $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$.

(II) 解: 因为直线 AB 与以 C 为圆心的圆相切于点 P , 所以 $AB \perp CP$. 依题意,

直线 AB 和直线 CP 的斜率均存在. 设直线 AB 的方程为 $y = kx - 3$. 由方程组
$$\begin{cases} y = kx - 3, \\ \frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1, \end{cases}$$

消去 y , 可得 $(2k^2 + 1)x^2 - 12kx = 0$, 解得 $x = 0$, 或 $x = \frac{12k}{2k^2 + 1}$. 依题意, 可得点 B 的坐

标为 $\left(\frac{12k}{2k^2 + 1}, \frac{6k^2 - 3}{2k^2 + 1}\right)$. 因为 P 为线段 AB 的中点, 点 A 的坐标为 $(0, -3)$, 所以点 P 的

坐标为 $\left(\frac{6k}{2k^2 + 1}, \frac{-3}{2k^2 + 1}\right)$. 由 $3\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OP}$, 得点 C 的坐标为 $(1, 0)$, 故直线 CP 的斜率为

$\frac{\frac{-3}{2k^2 + 1} - 0}{\frac{6k}{2k^2 + 1} - 1}$, 即 $\frac{3}{2k^2 - 6k + 1}$. 又因为 $AB \perp CP$, 所以 $k \cdot \frac{3}{2k^2 - 6k + 1} = -1$, 整理得

$2k^2 - 3k + 1 = 0$, 解得 $k = \frac{1}{2}$, 或 $k = 1$.

所以, 直线 AB 的方程为 $y = \frac{1}{2}x - 3$, 或 $y = x - 3$.

(19) 满分 15 分.

(I) 解: 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q . 由 $a_1 = 1$, $a_5 = 5(a_4 - a_3)$, 可得 $d = 1$, 从而 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = n$. 由 $b_1 = 1$, $b_5 = 4(b_4 - b_3)$, 又 $q \neq 0$, 可得 $q^2 - 4q + 4 = 0$, 解得 $q = 2$, 从而 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n = 2^{n-1}$.

(II) 证明 由 (I) 可得 $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$, 故 $S_n S_{n+2} = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$, $S_{n+1}^2 = \frac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2$, 从而 $S_n S_{n+2} - S_{n+1}^2 = -\frac{1}{2}(n+1)(n+2) < 0$, 所以 $S_n S_{n+2} < S_{n+1}^2$.

(III) 解: 当 n 为奇数时, $c_n = \frac{(3a_n - 2)b_n}{a_n a_{n+2}} = \frac{(3n - 2)2^{n-1}}{n(n+2)} = \frac{2^{n+1}}{n+2} - \frac{2^{n-1}}{n}$; 当 n 为偶数时, $c_n = \frac{a_{n-1}}{b_{n+1}} = \frac{n-1}{2^n}$.

对任意的正整数 n , 有

$$\sum_{k=1}^n c_{2k-1} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{2^{2k}}{2k+1} - \frac{2^{2k-2}}{2k-1} \right) = \frac{2^{2n}}{2n+1} - 1,$$

和

$$\sum_{k=1}^n c_{2k} = \sum_{k=1}^n \frac{2k-1}{4^k} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{5}{4^3} + \cdots + \frac{2n-1}{4^n}. \quad \textcircled{1}$$

由①得

$$\frac{1}{4} \sum_{k=1}^n c_{2k} = \frac{1}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \cdots + \frac{2n-3}{4^n} + \frac{2n-1}{4^{n+1}}. \quad \textcircled{2}$$

由①②得 $\frac{3}{4} \sum_{k=1}^n c_{2k} = \frac{1}{4} + \frac{2}{4^2} + \cdots + \frac{2}{4^n} - \frac{2n-1}{4^{n+1}} = \frac{\frac{2}{4} \left(1 - \frac{1}{4^n}\right)}{1 - \frac{1}{4}} - \frac{1}{4} - \frac{2n-1}{4^{n+1}}$, 从而得

$$\sum_{k=1}^n c_{2k} = \frac{5}{9} - \frac{6n+5}{9 \times 4^n}.$$

因此, $\sum_{k=1}^{2n} c_k = \sum_{k=1}^n c_{2k-1} + \sum_{k=1}^n c_{2k} = \frac{4^n}{2n+1} - \frac{6n+5}{9 \times 4^n} - \frac{4}{9}$.

所以, 数列 $\{c_n\}$ 的前 $2n$ 项和为 $\frac{4^n}{2n+1} - \frac{6n+5}{9 \times 4^n} - \frac{4}{9}$.

(20) 满分 16 分.

(I) (i) 解: 当 $k=6$ 时, $f(x) = x^3 + 6 \ln x$, 故 $f'(x) = 3x^2 + \frac{6}{x}$. 可得 $f(1) = 1$, $f'(1) = 9$, 所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y - 1 = 9(x - 1)$, 即 $y = 9x - 8$.

(ii) 解: 依题意, $g(x) = x^3 - 3x^2 + 6 \ln x + \frac{3}{x}$, $x \in (0, +\infty)$. 从而可得

$g'(x) = 3x^2 - 6x + \frac{6}{x} - \frac{3}{x^2}$, 整理可得 $g'(x) = \frac{3(x-1)^3(x+1)}{x^2}$. 令 $g'(x) = 0$, 解得 $x = 1$.

当 x 变化时, $g'(x)$, $g(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	\searrow	极小值	\nearrow

所以, 函数 $g(x)$ 的单调递减区间为 $(0, 1)$, 单调递增区间为 $(1, +\infty)$; $g(x)$ 的极小值为 $g(1) = 1$, 无极大值.

(II) 证明: 由 $f(x) = x^3 + k \ln x$, 得 $f'(x) = 3x^2 + \frac{k}{x}$.

对任意的 $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$, 且 $x_1 > x_2$, 令 $\frac{x_1}{x_2} = t$ ($t > 1$), 则

$$\begin{aligned} & (x_1 - x_2)(f'(x_1) + f'(x_2)) - 2(f(x_1) - f(x_2)) \\ &= (x_1 - x_2) \left(3x_1^2 + \frac{k}{x_1} + 3x_2^2 + \frac{k}{x_2} \right) - 2 \left(x_1^3 - x_2^3 + k \ln \frac{x_1}{x_2} \right) \\ &= x_1^3 - x_2^3 - 3x_1^2 x_2 + 3x_1 x_2^2 + k \left(\frac{x_1}{x_2} - \frac{x_2}{x_1} \right) - 2k \ln \frac{x_1}{x_2} \\ &= x_2^3 \left(t^3 - 3t^2 + 3t - 1 \right) + k \left(t - \frac{1}{t} - 2 \ln t \right). \end{aligned} \quad ①$$

令 $h(x) = x - \frac{1}{x} - 2 \ln x$, $x \in [1, +\infty)$. 当 $x > 1$ 时, $h'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} = \left(\sqrt{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x} \right)^2 > 0$, 由此可

得 $h(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 单调递增, 所以当 $t > 1$ 时, $h(t) > h(1)$, 即 $t - \frac{1}{t} - 2 \ln t > 0$. 因为 $x_2 \geq 1$,

$t^3 - 3t^2 + 3t - 1 = (t-1)^3 > 0$, $k \geq -3$, 所以

$$\begin{aligned} x_2^3 (t^3 - 3t^2 + 3t - 1) + k \left(t - \frac{1}{t} - 2 \ln t \right) &> (t^3 - 3t^2 + 3t - 1) - 3 \left(t - \frac{1}{t} - 2 \ln t \right) \\ &= t^3 - 3t^2 + 6 \ln t + \frac{3}{t} - 1. \end{aligned} \quad ②$$

由 (I) (ii) 可知, 当 $t > 1$ 时, $g(t) > g(1)$, 即 $t^3 - 3t^2 + 6 \ln t + \frac{3}{t} > 1$, 故

$$t^3 - 3t^2 + 6 \ln t + \frac{3}{t} - 1 > 0. \quad ③$$

由①②③可得 $(x_1 - x_2)(f'(x_1) + f'(x_2)) - 2(f(x_1) - f(x_2)) > 0$. 所以, 当 $k \geq -3$ 时,

对任意的 $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$, 且 $x_1 > x_2$, 有

$$\frac{f'(x_1) + f'(x_2)}{2} > \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}.$$