2022年3月福州市高中毕业班质量检测

数学试题

（完卷时间120分钟;满分150分）

注意事项

1. 答题前，考生务必在试题卷、答题卡规定的地方填写自己的准考证号、姓名。考生要认真核对答题卡上粘贴的条形码的“准考证号、姓名”与考生本人准考证号、姓名是否一致.

2. 第Ⅰ卷每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号. 第Ⅱ卷用0.5毫米黑色签字笔在答题卡上书写作答. 在试题卷上作答，答案无效.

第Ⅰ卷

一、单项选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 若复数 z 满足 $z(1-i)=4i$，则 z 在复平面内对应的点位于

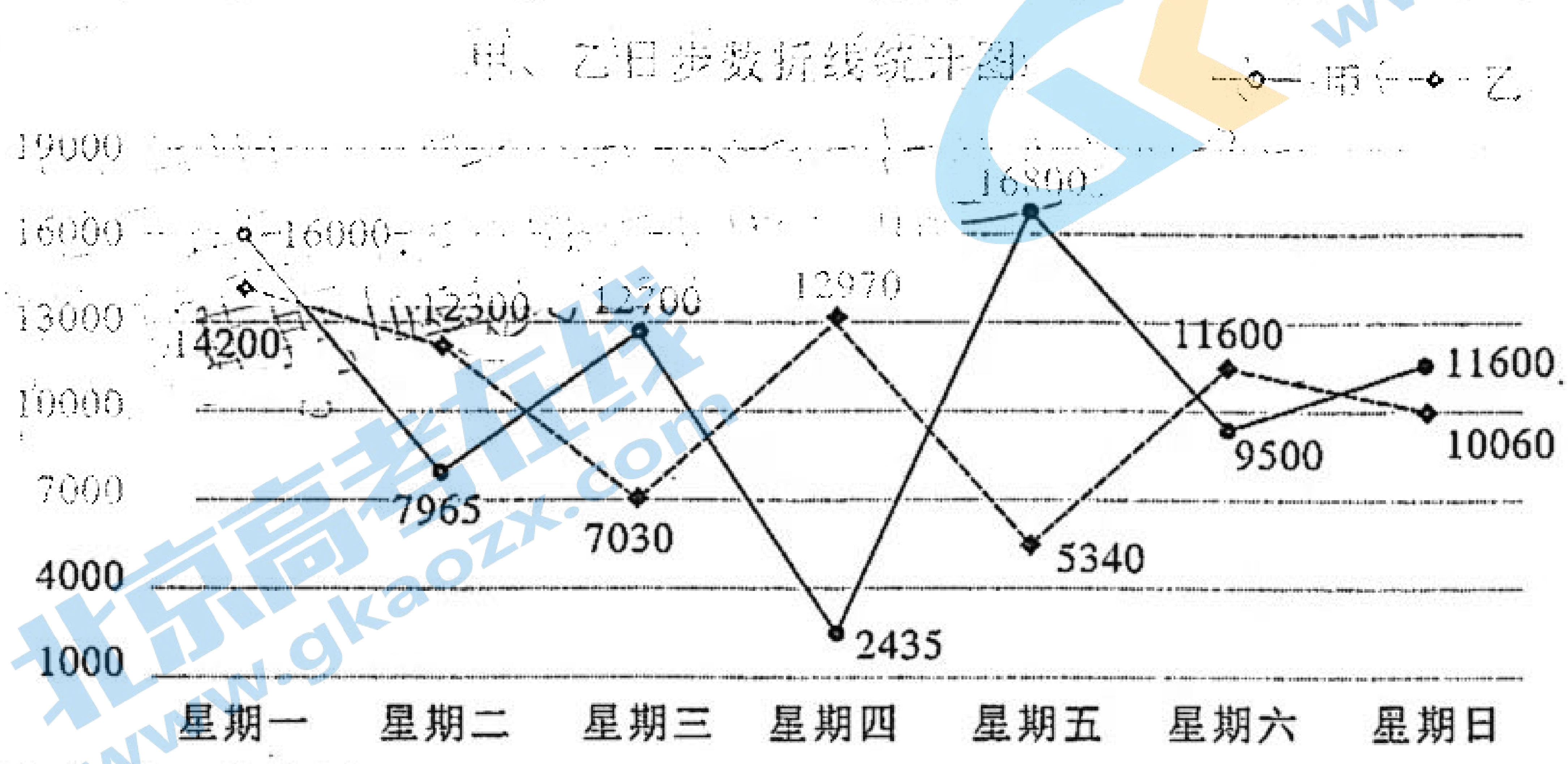
A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

2. 已知 $A(-\sqrt{3},0)$，$B(\sqrt{3},0)$，$C(0,3)$，则 $\triangle ABC$ 外接圆的方程为

A. $(x-1)^2+y^2=2$　　B. $(x-1)^2+y^2=4$

C. $x^2+(y-1)^2=2$　　D. $x^2+(y-1)^2=4$

3. 中国营养学会把走路称为“最简单、最优良的锻炼方式”，它不仅可以帮助减肥，还可以增强心肺功能、血管弹性、肌肉力量等. 下图为甲、乙两人在同一星期内日步数的折线统计图：



则下列结论中不正确的是

A. 这一星期内甲的日步数的中位数为11 600　　B. 乙的日步数星期四比星期三增加了1倍以上

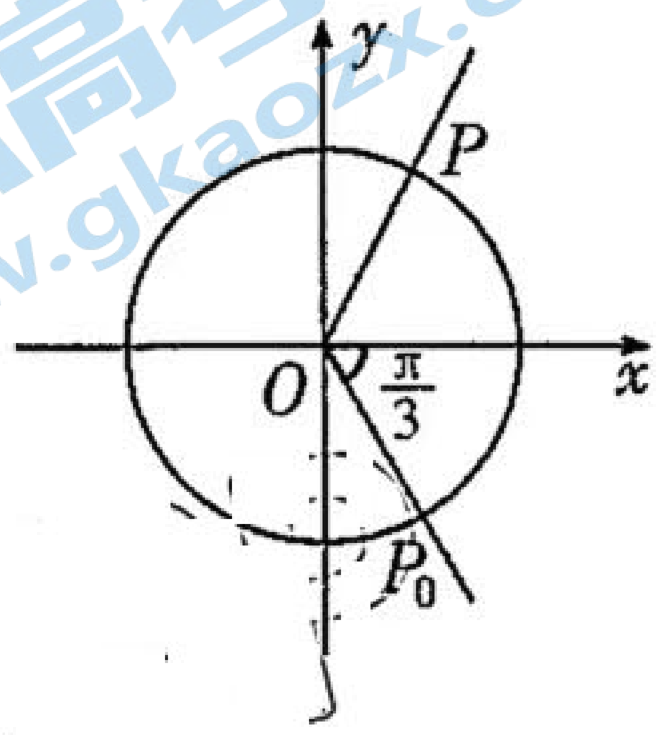
C. 这一星期内甲的日步数的平均值大于乙　　D. 这一星期内甲的日步数的方差大于乙

4. "$0 < a < b$" 是"$a - \frac{1}{a} < b - \frac{1}{b}$" 的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

5. 已知 P 是半径为 3cm 的圆形砂轮边缘上的一个质点,它从初始位置 P_0 开始,按逆时针方向做圆周运动,角速度为 $\frac{\pi}{2}$rad/s. 如图,以砂轮圆心为原点,建立平面直角坐标系 xOy,若 $\angle P_0Ox = \frac{\pi}{3}$,则点 P 的纵坐标 y 关于时间 t(单位:s) 的函数关系式为



A. $y = 3\sin\left(4t + \frac{\pi}{3}\right)$　　B. $y = 3\sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right)$

C. $y = 3\sin\left(4t - \frac{\pi}{3}\right)$　　D. $y = 3\sin\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{3}\right)$

6. 从集合{1,2,3}的非空子集中任取两个不同的集合 A 和 B,若 $A \cap B \neq \varnothing$,则不同的取法共有

A. 42 种　　B. 36 种　　C. 30 种　　D. 15 种

7. 已知平面向量 a,b,c 均为单位向量,且 $|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}| = 1$,则 $(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c})$ 的最大值为

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 1　　D. $\frac{3}{2}$

8. 折纸是我国民间的一种传统手工艺术.现有一张长 10cm、宽 8cm 的长方形的纸片,将纸片沿着一条直线折叠,折痕(线段)将纸片分成两部分,面积分别为 S_1,S_2.若 $S_1 : S_2 = 1 : 3$,则折痕长的最大值为

A. $\sqrt{89}$cm　　B. 10cm　　C. $2\sqrt{29}$cm　　D. $2\sqrt{34}$cm

二、多项选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.在每小题给出的四个选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分.

9. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2,P 为 C 上一点,则

A. C 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\triangle PF_1F_2$ 的周长为 5

C. $\angle F_1PF_2 < 90°$　　D. $1 \leqslant |PF_1| \leqslant 3$

10. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n,公差 $d \neq 0$.若 $S_n \leqslant S_6$,则

A. $a_1 < 0$　　B. $d < 0$　　C. $a_6 = 0$　　D. $S_{13} \leqslant 0$

11. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,$f(x-1)$ 为奇函数,$f(x+1)$ 为偶函数,当 $x \in (-1,1]$ 时,$f(x) = -x^2 + 1$,则下列结论正确的是

A. $f\left(\frac{7}{2}\right) = -\frac{3}{4}$　　B. $f(x+7)$ 为奇函数

C. $f(x)$ 在(6,8)上为减函数　　D. 方程 $f(x) + \lg x = 0$ 仅有 6 个实数解

12. 已知正四面体 $ABCD$ 的棱长为 3，其外接球的球心为 O. 点 E 满足 $\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AB}(0<\lambda<1)$，过点 E 作平面 α 平行于 AC 和 BD，设 α 分别与该正四面体的棱 BC,CD,DA 相交于点 F,G,H，则

A. 四边形 $EFGH$ 的周长为定值

B. 当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时，四边形 $EFGH$ 为正方形

C. 当 $\lambda=\frac{1}{3}$ 时，α 截球 O 所得截面的周长为 $\frac{13}{4}\pi$

D. 四棱锥 $A-EFGH$ 的体积的最大值为 $\frac{2}{3}\sqrt{2}$

第 Ⅱ 卷

注意事项：

用 0.5 毫米黑色签字笔在答题卡上书写作答. 在试题卷上作答，答案无效.

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 把答案填在题中的横线上.

13. 已知函数 $f(x)=a\sqrt{x}+\ln x$ 在 $x=1$ 处取得极值，则实数 $a=$ ________.

14. 如图，一个正六棱柱的茶叶盒，底面边长为 10cm，高为 20cm，则这个茶叶盒的表面积约为 ________ cm^2.（精确到 0.1，$\sqrt{3}\approx1.732$）

15. 写出一个使等式 $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)}+\dfrac{\cos\alpha}{\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)}=2$ 成立的 α 的值为 ________.

16. 已知抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点为 F，过 F 的动直线 l 交 C 于 A,B 两点，过 A,B 分别作 C 的切线 l_1,l_2，l_1 与 l_2 交于点 P. 经探究可知点 P 必在一条定直线上，其方程为 ________；记 l_1,l_2 与 y 轴的交点分别为 M,N，若 l 的倾斜角为 30°，则四边形 $PMFN$ 的面积为 ________.（本题第一空 2 分，第二空 3 分.）

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_1=1$，$a_2=2$，且 $S_{n+2}=S_{n+1}+4a_n$.

(1) 求 a_n；

(2) 求证：$\frac{1}{a_1+1}+\frac{1}{a_2+1}+\cdots+\frac{1}{a_n+1}<2$.

18.（12 分）

记 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，已知 $b\sin C=\sin C+\sqrt{3}\cos C$，$A=\frac{\pi}{3}$.

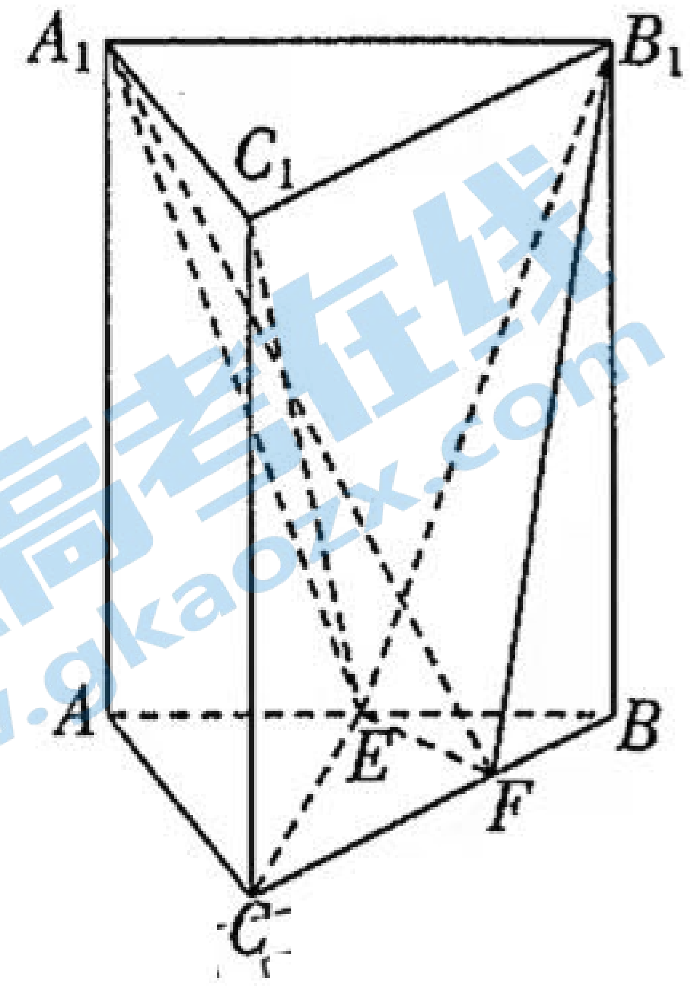
(1) 求 c；

(2) 在下列三个条件中选择一个作为补充条件，判断该三角形是否存在？若存在，求出三角形的面积；若不存在，说明理由.

① BC 边上的中线长为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，② AB 边上的中线长为 $\sqrt{7}$，③ 三角形的周长为 6.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

19. (12 分)



如图,在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中,点E为AB的中点,点F在BC上,且$AC=BC=3BF$.

(1) 证明:平面$A_1B_1F \perp$ 平面CC_1E;

(2) 若$\angle ABC=60°$,$AA_1=2AB$,且三棱锥$E-A_1B_1F$的体积为$\frac{4\sqrt{3}}{9}$,

求CE与平面A_1B_1F所成角的正弦值.

20. (12 分)

某超市开展购物抽奖送积分活动,每位顾客可以参加n($n \in \mathbf{N}^*$,且$n \geq 2$)次抽奖,每次中奖的概率为$\frac{1}{3}$,不中奖的概率为$\frac{2}{3}$,且各次抽奖相互独立.规定第1次抽奖时,若中奖则得10分,否则得5分.第2次抽奖,从以下两个方案中任选一个:

方案①:若中奖则得30分,否则得0分;

方案②:若中奖则获得上一次抽奖得分的两倍,否则得5分.

第3次开始执行第2次抽奖所选方案,直到抽奖结束.

(1) 如果$n=2$,以抽奖的累计积分的期望值为决策依据,顾客甲应该选择哪一个方案?并说明理由.

(2) 记顾客甲第i次获得的分数为X_i($i=1,2,\cdots,n$),并且选择方案②.请直接写出$E(X_{i+1})$与$E(X_i)$的递推关系式,并求$E(X_8)$的值.(精确到0.1)

参考数据:$\left(\frac{2}{3}\right)^7 \approx 0.059$.

21. (12 分)

平面直角坐标系xOy中,双曲线C:$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{6}=1$的右焦点为$F$,$T$为直线$l$:$x=1$上一点,过$F$作$TF$的垂线分别交$C$的左、右支于$P$,$Q$两点,交$l$于点$A$.

(1) 证明:直线OT平分线段PQ;

(2) 若$|PA|=3|QF|$,求$|TF|^2$的值.

22. (12 分)

已知函数$f(x)=e^x-ax\sin x-bx+c$的图象与x轴相切于原点.

(1) 求b,c的值;

(2) 若$f(x)$在$(0,\pi)$上有唯一零点,求实数a的取值范围.

准考证号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　　姓名＿＿＿＿＿＿

（在此卷上答题无效）

2022年3月福州市高中毕业班质量检测

数学参考答案及评分细则

评分说明：

1．本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分标准制定相应的评分细则。

2．对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应给分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分。

3．解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数。

4．只给整数分数。

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．

1．B　　2．D　　3．B　　4．A

5．D　　6．C　　7．B　　8．C

二、多项选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分．

9．CD　　10．BD　　11．ABD　　12．ABD

三、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分．

13．-2　　14．1719.6

15．$\frac{\pi}{8}$．（答案不唯一，$\alpha=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$任取一个值均可）　　16．$x=1$，$\mathbf{4}$

四、解答题：本大题共6小题，共70分．

17．（10分）

【考查意图】本小题主要考查数列的通项与前n项和的关系式、等比数列的通项公式与前n项和公式、放缩法证明不等式等基础知识；考查推理论证能力、运算求解能力；考查化归与转化思想、函数与方程思想；考查逻辑推理、数学运算等核心素养，体现基础性、综合性．满分10分．

【解答】（1）由$S_{n+2}=S_{n+1}+4a_n$得$a_{n+2}=4a_n$． ……………………………………1分

所以，当$n=2k-1\left(k\in\mathbf{N}^*\right)$时，$a_{2k+1}=4a_{2k-1}$，

所以数列$\{a_{2k-1}\}$是首项为$a_1=1$，公比为 4 的等比数列，…………………………2 分

故$a_{2k-1}=1\times 4^{k-1}$，即$a_{2k-1}=2^{2k-2}=2^{(2k-1)-1}$．…………………………3 分

当$n=2k\ (k\in\mathbf{N}^*)$时，同理可得$a_{2k}=2\times 4^{k-1}=2^{2k-1}$．…………………………4 分

所以$a_n=2^{n-1}$（$n\in\mathbf{N}^*$）．…………………………5 分

（2）证明：由（1）知$\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{2^{n-1}+1}<\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$，…………………………7 分

所以$\dfrac{1}{a_1+1}+\dfrac{1}{a_2+1}+\cdots+\dfrac{1}{a_n+1}$

$<\left(\dfrac{1}{2}\right)^0+\left(\dfrac{1}{2}\right)^1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ …………………………8 分

$=\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}{1-\dfrac{1}{2}}$ …………………………9 分

$<\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2}}=2$．…………………………10 分

18．（12 分）

【考查意图】本小题主要考查解三角形等基础知识；考查推理论证能力、运算求解能力；考查函数与方程思想、数形结合思想；考查直观想象、逻辑推理、数学运算等核心素养，体现基础性、综合性．满分 12 分．

【解答】（1）由$b\sin C=\sin C+\sqrt{3}\cos C$得$c\sin B=2\sin(C+\dfrac{\pi}{3})$，…………3 分

又$A=\dfrac{\pi}{3}$，$A+B+C=\pi$，

所以$c\sin B=2\sin(\pi-B)=2\sin B$，…………………………5 分

而$0<B<\pi$，故$\sin B\neq 0$，故$c=2$．…………………………6 分

（2）选①，

方法一：设BC边上的中线为AD，则$AD=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$．

由$\cos\angle ADB=-\cos\angle ADC$得，$\dfrac{AD^2+BD^2-AB^2}{2AD\cdot BD}=-\dfrac{AD^2+CD^2-AC^2}{2AD\cdot CD}$，………7 分

即 $\frac{1}{2}+\frac{a^2}{4}-4=-\left(\frac{1}{2}+\frac{a^2}{4}-b^2\right)$，即 $a^2=2b^2+6$，…………9 分

由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ 得 $a^2=b^2-2b+4$，…………10 分

即 $b^2+2b+2=0$，…………11 分

该方程无实数解，

故符合条件的三角形不存在. …………12 分

方法二：设 BC 边上的中线为 AD，则 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，…………8 分

两边平方得 $\overrightarrow{AD}^2=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}^2)$，…………9 分

即 $\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\times\left(4+2\times 2b\times\frac{1}{2}+b^2\right)$，即 $b^2+2b+2=0$，…………11 分

易知该方程无实数解，

故符合条件的三角形不存在. …………12 分

方法三：如图，以 A 为原点，AB 所在直线为 x 轴，建立直角坐标系.

故 C 点坐标为 $\left(b\cos\frac{\pi}{3},b\sin\frac{\pi}{3}\right)$，即 $\left(\frac{1}{2}b,\frac{\sqrt{3}}{2}b\right)$，$B$ 点坐标为 $(2,0)$，…………8 分

所以 BC 边的中点坐标为 $\left(1+\frac{1}{4}b,\frac{\sqrt{3}}{4}b\right)$，…………9 分

由 BC 边上的中线长为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 得 $\left(1+\frac{1}{4}b\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{4}b\right)^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$，…………10 分

整理得 $b^2+2b+2=0$，…………11 分

该方程无实数解，

故符合条件的三角形不存在. …………12 分

选②，

设 AB 边上的中线为 CF，则 $CF=\sqrt{7}$.

在 $\triangle ACF$ 中，由余弦定理得 $CF^2=AF^2+AC^2-2AC\cdot AF\cos A$，

即 $7=1+AC^2-2\times 1\times AC\cos\frac{\pi}{3}$，…………8 分

整理得 $AC^2-AC-6=0$，…………9 分

解得 $AC=3$ 或 $AC=-2$（舍去）. …………10 分

故 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}AC\cdot AB\sin A=\frac{1}{2}\times 3\times 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ……………………12 分

选③，

依题意得 $AB+BC+CA=6$，由（1）知 $AB=2$，

所以 $BC+CA=4$ ………………………………………………………………7 分

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得，$BC^2=AB^2+CA^2-2AB\cdot CA\cos A$，

所以 $CB^2=2^2+CA^2-2\times 2\times\frac{1}{2}CA$，

即 $CB^2=4+CA^2-2CA$，……………………………………………………9 分

所以 $(4-CA)^2=4+CA^2-2CA$，

解得，$BC=CA=2$ ………………………………………………………10 分

所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}AC\cdot AB\sin A=\frac{1}{2}\times 2\times 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$ ……………………12 分

19. （12 分）

【考查意图】本小题主要考查空间直线与直线、直线与平面的位置关系，三棱锥的体积，直线与平面的夹角等基础知识；考查推理论证能力、运算求解能力与空间想象能力；考查数形结合思想；考查直观想象、逻辑推理、数学运算等核心素养，体现基础性、综合性．满分 12 分．

【解析】（1）在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$CC_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1$，

$\therefore CC_1\perp A_1B_1$，……………………………………………………1 分

$\because$ 点 E 为 AB 的中点，且 $AC=BC$，$\therefore AB\perp CE$，……………………2 分

$\because AB\,//\,A_1B_1$，$\therefore A_1B_1\perp CE$，…………………………………………3 分

$\because CE\cap CC_1=C$，

$\therefore A_1B_1\perp$ 平面 CC_1E，……………………………………………………4 分

$\because A_1B_1\subset$ 平面 A_1B_1F，

$\therefore$ 平面 $A_1B_1F\perp$ 平面 CC_1E；………………………………………………5 分

（2）$\because \angle ABC=60^\circ$，$AC=BC$，$\therefore \triangle ABC$ 为正三角形．

设 $AB=t$，则 $AA_1=2AB=2t$，

由（1）可得，$CE\perp$ 平面 ABB_1A_1，

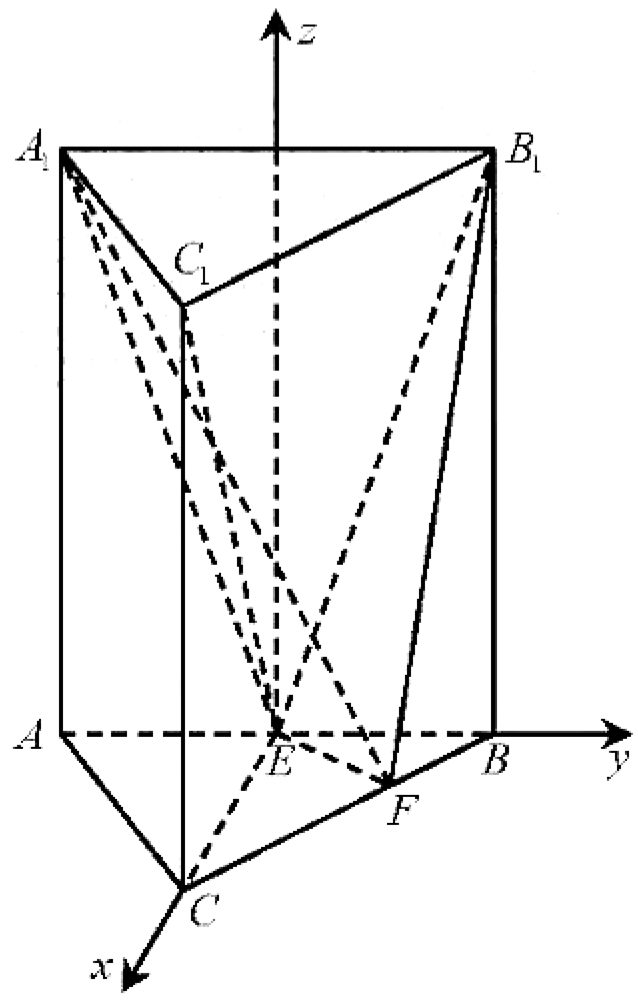
依题意得 $BF=\frac{1}{3}BC$，故点 F 到平面 ABB_1A_1 的距离为 $\frac{1}{3}CE=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}t=\frac{\sqrt{3}}{6}t$，……6 分

$\therefore S_{\triangle A_1B_1E}=\frac{1}{2}\times AB\times AA_1=\frac{1}{2}\times t\times 2t=t^2$，

$\therefore V_{E-A_1B_1F}=V_{F-A_1B_1E}=\frac{1}{3}S_{\triangle A_1B_1E}\times\frac{\sqrt{3}}{6}t=\frac{1}{3}t^2\times\frac{\sqrt{3}}{6}t=\frac{\sqrt{3}}{18}t^3$，……7 分

$\because$ 三棱锥 $E-A_1B_1F$ 的体积为 $\frac{4\sqrt{3}}{9}$，

$\therefore \frac{\sqrt{3}}{18}t^3=\frac{4\sqrt{3}}{9}$，解得 $t=2$．……8 分



以 E 为原点，分别以 $\overrightarrow{EC},\overrightarrow{EB},\overrightarrow{AA_1}$ 的方向为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向，建立如图所示的空间直角坐标系 $E-xyz$，则

$C(\sqrt{3},0,0)$，$E(0,0,0)$，$A_1(0,-1,4)$，$B_1(0,1,4)$，$F\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{2}{3},0\right)$，

$\therefore \overrightarrow{CE}=(-\sqrt{3},0,0)$，$\overrightarrow{A_1B_1}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{A_1F}=\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{5}{3},-4\right)$，

……9 分

设平面 A_1B_1F 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1B_1}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1F}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2y=0,\\ \frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{5}{3}y-4z=0,\end{cases}$

令 $z=1$，得 $\boldsymbol{n}=(4\sqrt{3},0,1)$，……10 分

$\therefore \cos\langle\overrightarrow{CE},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\overrightarrow{CE}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{CE}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{-12}{\sqrt{3}\times 7}=-\frac{4\sqrt{3}}{7}$，……11 分

$\therefore CE$ 与平面 A_1B_1F 所成角的正弦值为 $\frac{4\sqrt{3}}{7}$．……12 分

20.（12 分）

【考查意图】本小题主要考查离散型随机变量的期望、推断与决策等基础知识；考查推理论证能力、运算求解能力与创新意识；考查化归与转化思想；考查数学建模、逻辑推理、数据分析等核心素养，体现综合性、应用性与创新性．满分 12 分．

【解答】方法一：（1）若甲第 2 次抽奖选方案①，两次抽奖累计积分为 ξ，则 ξ 的可

能取值为40，35，10，5．…………………………………………1 分

$P(\xi=40)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$，$P(\xi=35)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$，

$P(\xi=10)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$，$P(\xi=5)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$，…………………………2 分

所以 $E(\xi)=\frac{40}{9}+\frac{70}{9}+\frac{20}{9}+\frac{20}{9}=\frac{150}{9}$．…………………………3 分

若甲第 2 次抽奖选方案②，两次抽奖累计积分为η，则η的可能取值为30,15,10，则

$P(\eta=30)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$，$P(\eta=15)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$，$P(\eta=10)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$，

$E(\eta)=\frac{30}{9}+\frac{60}{9}+\frac{40}{9}=\frac{130}{9}$，…………………………5 分

因为$E(\xi)>E(\eta)$，所以应选择方案①．…………………………6 分

（2）依题意得$E(X_{i+1})=\frac{2}{3}E(X_i)+\frac{10}{3}$，…………………………7 分

X_1的可能取值为 10，5 其分布列为

X_1	10	5
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

所以$E(X_1)=\frac{20}{3}$，则$E(X_1)-10=-\frac{10}{3}$，…………………………8 分

由$E(X_{i+1})=\frac{2}{3}E(X_i)+\frac{10}{3}$得$E(X_{i+1})-10=\frac{2}{3}\left[E(X_i)-10\right]$，…………………………10 分

所以$\{E(X_i)-10\}$为等比数列，其中首项为$-\frac{10}{3}$，公比为$\frac{2}{3}$．…………………………11 分

所以$E(X_8)-10=-\frac{10}{3}\times(\frac{2}{3})^7$，故$E(X_8)=-\frac{10}{3}\times(\frac{2}{3})^7+10\approx 9.8$．…………………………12 分

方法二：（1）同解法一．…………………………6 分

（2）依题意得$E(X_{i+1})=\frac{1}{3}\times 2E(X_i)+\frac{2}{3}\times 5=\frac{2}{3}E(X_i)+\frac{10}{3}$，…………………………7 分

由（1）知$E(X_2)=\frac{70}{9}$，则

$E(X_8)=\frac{2}{3}E(X_7)+\frac{10}{3}$

$$=\left(\frac{2}{3}\right)^2 E(X_6)+\frac{2}{3}\times\frac{10}{3}+\frac{10}{3}$$ ……………………………………………… 8 分

$=\cdots$

$$=\left(\frac{2}{3}\right)^6 E(X_2)+\frac{10}{3}\times\left[\left(\frac{2}{3}\right)^5+\left(\frac{2}{3}\right)^4+\cdots+1\right]$$ ……………………………… 10 分

$$=\frac{70}{9}\times\left(\frac{2}{3}\right)^6+\frac{10}{3}\times\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^6}{1-\frac{2}{3}}$$ ……………………………………………… 11 分

$$=-\frac{10}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^7+10\approx 9.8.$$ ……………………………………………… 12 分

21．（12 分）

【考查意图】本小题主要考查双曲线的图象和性质、直线和双曲线的位置关系等基础知识；考查推理论证能力、运算求解能力；考查函数与方程思想、数形结合思想、化归与转化思想；考查直观想象、逻辑推理、数学运算等核心素养，体现基础性、综合性与创新性．满分 12 分．

【解答】方法一：（1）依题意，$x_F=\sqrt{3+6}=3$，即 $F(3,0)$， ……………… 1 分

设 $T(1,2t)$，则直线 PQ 的方程为 $x=ty+3$， ……………………………… 2 分

由 $\begin{cases}x=ty+3,\\ 2x^2-y^2=6\end{cases}$ 得 $(2t^2-1)y^2+12ty+12=0$，

设 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$，则 $\begin{cases}2t^2-1\neq 0,\\ \Delta=144t^2-48(2t^2-1)>0,\end{cases}$ 故 $t^2\neq\frac{1}{2}$，

$y_1+y_2=-\frac{12t}{2t^2-1}, y_1y_2=\frac{12}{2t^2-1}$， ……………………………… 3 分

所以 $x_1+x_2=t(y_1+y_2)+6=-\frac{6}{2t^2-1}$，

又直线 PQ 分别交 C 的左、右支于 P,Q 两点，

所以 $x_1x_2=(ty_1+3)(ty_2+3)=t^2y_1y_2+3t(y_1+y_2)+9=-\frac{9+6t^2}{2t^2-1}<0$，故 $t^2>\frac{1}{2}$ ……4 分

所以 PQ 中点为 $N\left(-\frac{3}{2t^2-1},-\frac{6t}{2t^2-1}\right)$， ……………………………… 5 分

所以 $k_{ON}=2t$, $k_{OT}=2t$ ，故 O , T , N 三点共线，即直线 OT 平分线段 PQ . ……6 分

（2）依题意，由 $|PA|=3|QF|$ 得 $1-x_1=3(3-x_2)$ ，即 $-x_1+3x_2=8$ ， ……7 分

所以 $(x_1+x_2)+8=4x_2$ ，①

$3(x_1+x_2)-8=4x_1$ ，② ……8 分

①×②得 $3(x_1+x_2)^2+16(x_1+x_2)-64=16x_1x_2$ ， ……9 分

所以 $3\times\dfrac{36}{(2t^2-1)^2}-16\times\dfrac{6}{2t^2-1}-64=-16\times\dfrac{9+6t^2}{2t^2-1}$ ， ……10 分

解得 $t^2=\dfrac{8+3\sqrt{7}}{4}$ ，或 $t^2=\dfrac{8-3\sqrt{7}}{4}$ （舍去） ……11 分

此时， $|TF|^2=4+4t^2=12+3\sqrt{7}$. ……12 分

方法二：（1）依题意，依题意， $x_F=\sqrt{3+6}=3$ ，即 $F(3,0)$ ， ……1 分

直线 PQ 的斜率存在且不为 0，设其方程为 $y=k(x-3)$ （ $k\neq 0$ ）， $T\left(1,\dfrac{2}{k}\right)$. ……2 分

由 $\begin{cases} y=k(x-3), \\ 2x^2-y^2=6 \end{cases}$ 得 $(2-k^2)x^2+6k^2x-9k^2-6=0$ ，

设 $P(x_1,y_1)$, $Q(x_2,y_2)$ ，则 $\begin{cases} 2-k^2\neq 0, \\ \Delta=36k^4+4(9k^2+6)(2-k^2)>0, \end{cases}$ 故 $k^2\neq 2$ ，

$x_1+x_2=\dfrac{6k^2}{k^2-2}$, $x_1x_2=\dfrac{9k^2+6}{k^2-2}<0$ ， $k^2<2$. ……4 分

所以 $y_1+y_2=k(x_1+x_2-6)=\dfrac{12k}{k^2-2}$ ， PQ 中点为 $N\left(\dfrac{3k^2}{k^2-2},\dfrac{6k}{k^2-2}\right)$ ， ……5 分

所以 $k_{ON}=\dfrac{2}{k}$ ， $k_{OT}=\dfrac{2}{k}$ ，故 O , T , N 三点共线，即直线 OT 平分线段 PQ . ……6 分

（2）依题意，由 $|PA|=3|QF|$ 得 $1-x_1=3(3-x_2)$ ，即 $x_1=3x_2-8$ ， ……7 分

所以 $(3x_2-8)+x_2=\dfrac{6k^2}{k^2-2}$, $(3x_2-8)x_2=\dfrac{9k^2+6}{k^2-2}<0$ ，故 $k^2<2$ ， ……8 分

即 $x_2=\dfrac{7k^2-8}{2(k^2-2)}$, $3x_2^2-8x_2=\dfrac{9k^2+6}{k^2-2}$ ，

所以$3\left[\dfrac{7k^2-8}{2(k^2-2)}\right]^2-8\cdot\dfrac{7k^2-8}{2(k^2-2)}=\dfrac{9k^2+6}{k^2-2}$，…………………………………………9 分

整理得$16\left(\dfrac{1}{k}\right)^4-64\left(\dfrac{1}{k}\right)^2+1=0$，…………………………………………10 分

所以$\dfrac{1}{k^2}=\dfrac{8+3\sqrt{7}}{4}$，或$\dfrac{1}{k^2}=\dfrac{8-3\sqrt{7}}{4}$（舍去）…………………………11 分

此时，$|TF|^2=(1-3)^2+\left(\dfrac{2}{k}-0\right)^2=4\left(1+\dfrac{1}{k^2}\right)=12+3\sqrt{7}$．…………………………12 分

22.（12 分）

【考查意图】本小题主要考查导数的几何意义、函数的零点、导数的应用等基础知识；考查抽象概括能力、推理论证能力、运算求解能力与创新意识，考查函数与方程思想、化归与转化思想、分类与整合思想、数形结合思想；考查数学抽象、直观想象、逻辑推理、数学运算等核心素养，体现综合性、应用性与创新性．满分 12 分．

【解答】（1）$f'(x)=e^x-a(\sin x+x\cos x)-b$，…………………………………………1 分

依题意，$\begin{cases}f'(0)=0,\\ f(0)=0,\end{cases}$ …………………………………………………………3 分

即$\begin{cases}1-b=0,\\ 1+c=0,\end{cases}$ 解得$b=1$，$c=-1$．…………………………………………4 分

（2）由（1）得$f'(x)=e^x-a(\sin x+x\cos x)-1$，记$g(x)=e^x-a(\sin x+x\cos x)-1$，

$g'(x)=e^x-a(2\cos x-x\sin x)$，所以$g'(0)=1-2a$，

①当$a>\dfrac{1}{2}$时，

（i）当$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$时，$g''(x)=e^x+a(3\sin x+x\cos x)>0$，所以$g'(x)$为增函数，

…………………………………………………………………………………………5 分

又因为$g'(0)<0$，$g'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=e^{\frac{\pi}{2}}+\dfrac{\pi}{2}a>0$，

所以存在唯一实数$x_0\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，使得$g'(x_0)=0$．…………………………6 分

（ii）当$x\in\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$时，$2\cos x-x\sin x<0$，则$g'(x)>0$．

由（i）（ii）可知，$x\in(0,x_0)$，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减；$x\in(x_0,\pi)$，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增.

因为$g(0)=0$，$g(\pi)=e^{\pi}+a\pi-1>0$，

所以存在唯一实数$x_1\in(x_0,\pi)$，使得$g(x_1)=0$，…………………………7分

所以当$x\in(0,x_1)$时，$g(x)<0$，即$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；$x\in(x_1,\pi)$，$g(x)>0$，即$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增.

因为$f(0)=0$，$f(\pi)=e^{\pi}-\pi-1>0$，

所以存在唯一实数$x_2\in(x_1,\pi)$，使得$f(x_2)=0$，

即$f(x)$在$(0,\pi)$上有唯一零点，符合题意.…………………………8分

②当$a\leqslant\frac{1}{2}$时，

$f(x)=e^x-ax\sin x-x-1\geqslant e^x-\frac{1}{2}x\sin x-x-1$，…………………………9分

记$h(x)=e^x-\frac{1}{2}x\sin x-x-1$，$x\in(0,\pi)$.

$h'(x)=e^x-\frac{1}{2}(\sin x+x\cos x)-1$，

所以$h''(x)=e^x-\cos x+\frac{1}{2}x\sin x>e^0-\cos x+\frac{1}{2}x\sin x>0$，…………10分

所以$h'(x)$为增函数，$h'(x)>e^0-\frac{1}{2}(\sin 0+0\cos 0)-1=0$，

所以$h(x)$为增函数，$h(x)>e^0-\frac{1}{2}\times0\times\sin 0-0-1=0$，则$x\in(0,\pi)$，$f(x)>0$，

所以$f(x)$在$(0,\pi)$上没有零点，不合题意，舍去.…………………………11分

综上，a的取值范围为$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.…………………………12分

解法二：（1）同解法一.…………………………4分

（2）①同解法一.…………………………8分

②当$a\leqslant\frac{1}{2}$时，$f(x)=e^x-ax\sin x-x-1\geqslant e^x-\frac{1}{2}x\sin x-x-1$，…………9分

当$x\in(0,\pi)$时，下面证明不等式$\sin x<x$成立，

设 $m(x)=x-\sin x, x\in(0,\pi)$，则 $m'(x)=1-\cos x>0$，

所以 $m(x)$ 递增，所以 $m(x)>0-\sin 0=0$，即 $\sin x<x$，

所以 $f(x)>e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1$；

记 $q(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1$，则 $q'(x)=e^x-x-1$，

下面证明不等式 $e^x>x+1\ (0<x<\pi)$ 成立，

设 $p(x)=e^x-x-1$，$x\in(0,\pi)$，则 $p'(x)=e^x-1>0$，

所以 $p(x)$ 递增，所以 $p(x)>e^0-0-1=0$，即 $e^x>x+1$． ………………………… 10 分

所以 $q'(x)>0$，

所以 $q(x)$ 为增函数，则 $q(x)>e^0-\frac{1}{2}\times 0^2-0-1=0$，即 $f(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上没有零点，不合题意，舍去． ………………………………… 11 分

综上，a 的取值范围为 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$． …………………………………………………… 12 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 " 精益求精、专业严谨 " 的建设理念，不断探索"K12 教育+互联网+大数据"的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供"衔接和桥梁纽带"作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。