高三阶段性考试
数学参考答案

1. D　由题意可得 $z=\frac{4+i}{1+3i}=\frac{(4+i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}=\frac{4-12i+i-3i^2}{1-9i^2}=\frac{7}{10}-\frac{11}{10}i$.

2. B　由题意可得 $A=\{x|-2<x<5\}$，$B=\{x|x<a\}$. 因为 $1\notin A\cap B$，所以 $a\leqslant 1$.

3. C　因为 $\sin\alpha+2\sin(\alpha-\frac{\pi}{2})=0$，所以 $\sin\alpha-2\cos\alpha=0$，所以 $\tan\alpha=2$，则 $\tan(\alpha+\frac{\pi}{4})=\frac{\tan\alpha+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\alpha\tan\frac{\pi}{4}}=-3$.

4. A　由 $\log_2 x<2$，得 $0<x<4$. 因为 $(0,4)\subsetneqq(-\infty,4)$，所以“$x<4$”是“$\log_2 x<2$”的必要不充分条件.

5. C　因为 $f(-x)=\frac{2(-x)\sin(-x)}{(-x)^2+1}=f(x)$，所以 $f(x)$ 是偶函数，故而排除 A，B；因为当 $0<x<\pi$ 时，$f(x)=\frac{2x\sin x}{x^2+1}\leqslant\frac{2x\sin x}{2x}=\sin x\leqslant 1$，所以 $f(x)<1$，故选 C.

6. B　设 $\{a_n\}$ 的公比是 q，则 $a_9=a_7q^2$，$a_7=a_5q^2$. 因为 $a_7=6>0$，所以 $a_5>0$，$a_9>0$. 由等比数列的性质可得 $a_5a_9=a_7^2=36$，则 $a_5+4a_9\geqslant 2\sqrt{4a_5a_9}=4a_7=24$，当且仅当 $a_5=4a_9=12$ 时，等号成立.

7. A　因为 $\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{BD}$，所以 $\overrightarrow{BD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$，则 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. 因为 A，P，D 三点共线，所以 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\lambda\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\lambda\overrightarrow{AC}$. 因为 $\overrightarrow{CF}=2\overrightarrow{FA}$，所以 $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. 因为 E 是边 AB 的中点，所以 $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. 因为 E，P，F 三点共线，所以 $\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AE}+(1-k)\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}k\overrightarrow{AB}+\frac{1-k}{3}\overrightarrow{AC}$，则 $\begin{cases}\frac{2}{3}\lambda=\frac{1}{2}k,\\ \frac{1}{3}\lambda=\frac{1-k}{3},\end{cases}$ 解得 $k=\frac{4}{7}$，从而 $m=\frac{2}{7}$，$n=\frac{1}{7}$，故 $m+n=\frac{3}{7}$.

8. C　乙、丙报名参加的项目中，相同的个数为 $7+7+6-13-2-3=2$.

9. AD　因为 $a_1+2a_8=a_6$，所以 $a_1+6d=0$，即 $a_7=0$，则 A 正确. 当 $a_1<0$ 时，$d>0$，则 S_6，S_7 最小，故 B 错误. 因为 $a_7=0$，所以 $S_5=S_8$，则 C 错误. 因为 $S_{13}=13a_7=0$，所以 D 正确.

10. ABD　令 $x=y=0$，则 $f(0)=f(0)+f(0)$，所以 $f(0)=0$，A 正确.

令 $y=-x$，则 $f(x-x)=f(x)+f(-x)=0$，所以 $f(x)$ 是奇函数，B 正确.

$f(x)$ 是奇函数，$x=0$ 不可能是 $f(x)$ 的极小值点，C 错误.

令 $y=1$，则 $f(x+1)=f(x)+1$，$f(2023)=f(2022)+1=f(2021)+2=f(2020)+3=\cdots=$

$f(1)+2022=2023$，D 正确.

11. CD 设 $\omega x-\frac{\pi}{6}=t$. 因为 $x\in(0,\pi)$，所以 $t\in(-\frac{\pi}{6},\omega\pi-\frac{\pi}{6})$. 因为 $f(x)$ 有两个零点，所以 $\pi<\omega\pi-\frac{\pi}{6}\leqslant 2\pi$，即 $\frac{7}{6}<\omega\leqslant\frac{13}{6}$. 又因为 $f(x)$ 有两个极值点，$(\sin t)'=\cos t$，所以 $y=\cos t$ 在 $(-\frac{\pi}{6},\omega\pi-\frac{\pi}{6})$ 上有两个零点，所以 $\frac{3\pi}{2}<\omega\pi-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{5\pi}{2}$，即 $\frac{5}{3}<\omega\leqslant\frac{8}{3}$，故 ω 的取值范围是 $(\frac{5}{3},\frac{13}{6}]$.

12. BD 对于选项 A，$(\frac{1}{4},\frac{1}{2})$ 和 $(\frac{1}{2},\frac{1}{4})$ 是 $y=a^x$ 与 $y=\log_a x$ 的图象的两个交点，不符合题意.

对于选项 B，令 $f(x)=(\frac{1}{4})^x-\log_{\frac{1}{4}}x$，$f'(x)=(\frac{1}{4})^x\ln\frac{1}{4}-\frac{1}{x\ln\frac{1}{4}}=\frac{x(\frac{1}{4})^x(\ln\frac{1}{4})^2-1}{x\ln\frac{1}{4}}$，

令 $g(x)=x(\frac{1}{4})^x(\ln\frac{1}{4})^2-1$，$g'(x)=(\frac{1}{4})^x(1+x\ln\frac{1}{4})(\ln\frac{1}{4})^2$. 当 $x\in(0,\frac{1}{\ln 4})$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增；当 $x\in(\frac{1}{\ln 4},+\infty)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减. 所以 $g(x)\leqslant g(\frac{1}{\ln 4})=g(\log_4 e)=\frac{\log_4 e}{e}(\ln\frac{1}{4})^2-1<0$，所以 $f(x)$ 单调递增. 又 $f(\frac{1}{4})<0$，$f(1)>0$，所以 $f(x)$ 有唯一零点，从而 $y=a^x$ 与 $y=\log_a x$ 的图象只有一个交点.

对于 C，D 选项，$a>1$，因为 $y=a^x$ 与 $y=\log_a x$ 互为反函数，所以两个函数的图象都与直线 $y=x$ 相切，设切点为 (m,m)，则 $a^m=m$，$(a^m)'=a^m\ln a=1$，所以 $m\ln a=\ln m$，$m\ln a=1$，所以 $\ln m=1$，解得 $m=e$，$a=e^{\frac{1}{e}}$.

13. -1 由题意可得 $\boldsymbol{m}+k\boldsymbol{n}=(-1-3k,2+k)$，则 $-(-1-3k)+2(2+k)=0$，解得 $k=-1$.

14. $\frac{1}{2}$ 因为 $f(x)=\frac{1}{a^x+1}-m$，所以 $f(-x)=\frac{1}{a^{-x}+1}-m=\frac{a^x}{a^x+1}-m$. 因为 $f(x)$ 是奇函数，所以 $f(x)+f(-x)=0$，所以 $\frac{1}{a^x+1}-m+\frac{a^x}{a^x+1}-m=0$，解得 $m=\frac{1}{2}$.

15. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 因为 $f'(x)=2x-1$，所以 $f''(x)=2$，从而 $f'(1)=1$，$f''(1)=2$，所以 $K=\frac{2}{(1+1)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

16. 5 过 C 作 CE 垂直于 MN，交 MN 于点 E（图略）. 设 $ME=2x$，则 $CE=7x$，由题可知 $AB=BC=3$，则 $MN=AN=2x+3$，$NB=7x$，在 $\triangle ABN$ 中，$NB^2=AN^2+AB^2-2AN\cdot AB\cdot\cos 120^\circ$，即 $(7x)^2=(2x+3)^2+3^2+3\times(2x+3)$，化简可得 $5x^2-2x-3=0$，所以 $x=1$（负值已舍去），则 $MN=5$.

17. 解：(1) 因为 $a\cos C+c\cos A=4b\cos B$，所以 $\sin A\cos C+\sin C\cos A=4\sin B\cos B$，

所以 $\sin(A+C)=4\sin B\cos B$. ………………………………………………………… 2 分

因为 $A+B+C=\pi$，所以 $\sin(A+C)=\sin B$，所以 $\sin B=4\sin B\cos B$. ………………… 3 分

因为 $0<B<\pi$，所以 $\sin B\neq 0$，所以 $\cos B=\frac{1}{4}$. ……………………………………………… 4 分

(2)由(1)可得 $\cos B=\frac{1}{4}$，所以 $\sin B=\frac{\sqrt{15}}{4}$. ……………………………………………… 5 分

因为△ABC 的面积为 $6\sqrt{15}$，所以 $\frac{1}{2}ac\sin B=6\sqrt{15}$，所以 $\frac{\sqrt{15}}{8}ac=6\sqrt{15}$，则 $ac=48$. …
……………………………………………………………………………………………… 7 分

由余弦定理可得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=(a+c)^2-\frac{5}{2}ac$，即 $(a+c)^2-120=76$，

所以 $(a+c)^2=196$，则 $a+c=14$. ………………………………………………………… 9 分

故△ABC 的周长为 $a+b+c=2\sqrt{19}+14$. ……………………………………………… 10 分

18. 解：(1)因为 $f(1)=\log_3(1+a)-\log_3(5-2)=\log_3(a+1)-1=0$，所以 $a=2$. ………… 2 分

由题意可得 $\begin{cases}x+2>0,\\5-2x>0,\end{cases}$ 解得 $-2<x<\frac{5}{2}$，故 $f(x)$ 的定义域为 $(-2,\frac{5}{2})$. ……………… 5 分

(2)不等式 $f(x)>1$ 等价于 $\log_3(x+2)-\log_3(5-2x)>1$，

即 $\log_3(x+2)>\log_3(5-2x)+\log_3 3=\log_3[3(5-2x)]$. …………………………… 7 分

则 $\begin{cases}x+2>3(5-2x),\\x+2>0,\\5-2x>0,\end{cases}$ ……………………………………………………… 9 分

解得 $\frac{13}{7}<x<\frac{5}{2}$. ………………………………………………………………………… 11 分

故不等式 $f(x)>1$ 的解集为 $(\frac{13}{7},\frac{5}{2})$. ……………………………………………… 12 分

19. 解：(1)由题意可得 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\pi$，则 $\omega=2$. …………………………… 2 分

因为 $f(x)$ 的图象经过点 $A(\frac{\pi}{3},-2)$，所以 $f(\frac{\pi}{3})=2\cos(2\times\frac{\pi}{3}+\varphi)=-2$，

所以 $\frac{2\pi}{3}+\varphi=2k_1\pi+\pi(k_1\in\mathbf{Z})$，解得 $\varphi=2k_1\pi+\frac{\pi}{3}(k_1\in\mathbf{Z})$.

因为 $0<\varphi<\pi$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}$. ……………………………………………………………… 4 分

令 $2k\pi-\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，解得 $k\pi-\frac{2\pi}{3}\leqslant x\leqslant k\pi-\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$，

即 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[k\pi-\frac{2\pi}{3},k\pi-\frac{\pi}{6}](k\in\mathbf{Z})$. ……………………………… 6 分

(2)因为 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$，所以 $2x+\frac{\pi}{3}\in[\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}]$，所以 $\cos(2x+\frac{\pi}{3})\in[-1,\frac{1}{2}]$，则 $f(x)\in[-2,1]$. ……………………………………………………………………………………… 8 分

因为对任意的 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$，不等式 $|f(x)-m|\leqslant 2$ 恒成立，所以 $m-2\leqslant f(x)\leqslant m+2$. ……………………………………………………………………………………………… 9 分

所以 $\begin{cases}m-2\leqslant -2,\\ m+2\geqslant 1,\end{cases}$ 解得 $-1\leqslant m\leqslant 0$. ……………………………………………… 11 分

故 m 的取值范围为 $[-1,0]$. ……………………………………………………………………… 12 分

20. 解：(1) 由题意可得 $27000a+630=180$，解得 $a=-\frac{1}{60}$. ……………………………… 2 分

当对甲项目投资 30 万元时，对乙项目投资 170 万元，

则 $-2a(170-b)^2=\frac{1}{30}(170-b)^2=120$，解得 $b=110$. ……………………………………… 4 分

设对甲项目的投资金额为 x 万元，则对乙项目的投资金额为 $(200-x)$ 万元，

则 $\begin{cases}x\geqslant 10,\\ 200-x\geqslant 10,\end{cases}$ 解得 $10\leqslant x\leqslant 190$. ……………………………………………………… 5 分

故 $f(x)=-\frac{1}{60}x^3+21x+\frac{1}{30}[(200-x)-110]^2=-\frac{1}{60}(x^3-2x^2-900x-16200)(10\leqslant x\leqslant 190)$. ……………………………………………………………………………………………… 7 分

(2) 设 $h(x)=x^3-2x^2-900x-16200(10\leqslant x\leqslant 190)$，$h'(x)=3x^2-4x-900=(3x+50)(x-18)$. ……………………………………………………………………………………………… 8 分

当 $x\in[10,18)$ 时，$h'(x)<0$，当 $x\in(18,190]$ 时，$h'(x)>0$，

则 $h(x)$ 在 $[10,18)$ 上单调递减，在 $(18,190]$ 上单调递增，则 $h(x)_{\min}=h(18)=-27216$. ……………………………………………………………………………………………… 10 分

故 $f(x)_{\max}=f(18)=453.6$，即对甲项目投资 18 万元，对乙项目投资 182 万元，才能使总收益 $f(x)$ 取得最大值 453.6 万元. ……………………………………………………………… 12 分

21. 解：(1) 因为 $na_{n+1}-(n+1)a_n=1$，所以 $\frac{a_{n+1}}{n+1}-\frac{a_n}{n}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，……………… 1 分

所以 $\frac{a_n}{n}=(\frac{a_n}{n}-\frac{a_{n-1}}{n-1})+(\frac{a_{n-1}}{n-1}-\frac{a_{n-2}}{n-2})+\cdots+(\frac{a_2}{2}-\frac{a_1}{1})+a_1$

$=(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})+(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1})+\cdots+(1-\frac{1}{2})+1=2-\frac{1}{n}$，……………………………… 4 分

所以 $a_n=2n-1$. ……………………………………………………………………………………… 5 分

(2) 因为 $S_n=\frac{3^n-1}{2}$，所以当 $n=1$ 时，$S_1=\frac{a_1}{b_1}=1$，得 $b_1=1$； ……………………………… 6 分

当 $n\geqslant 2$ 时，$\frac{a_n}{b_n}=S_n-S_{n-1}=\frac{3^n-1}{2}-\frac{3^{n-1}-1}{2}=3^{n-1}$，所以 $b_n=\frac{2n-1}{3^{n-1}}$（$n=1$ 时也成立）. ……………………………………………………………………………………………… 7 分

因为 $T_n=\frac{1}{3^0}+\frac{3}{3^1}+\frac{5}{3^2}+\cdots+\frac{2n-1}{3^{n-1}}$，所以 $\frac{1}{3}T_n=\frac{1}{3^1}+\frac{3}{3^2}+\frac{5}{3^3}+\cdots+\frac{2n-1}{3^n}$，……………… 8 分

所以$\frac{2}{3}T_n=\frac{1}{3^0}+\frac{2}{3^1}+\frac{2}{3^2}+\cdots+\frac{2}{3^{n-1}}-\frac{2n-1}{3^n}=1+2\times\frac{\frac{1}{3}(1-\frac{1}{3^{n-1}})}{1-\frac{1}{3}}-\frac{2n-1}{3^n}$

$=1+1-\frac{1}{3^{n-1}}-\frac{2n-1}{3^n}=2-\frac{2n+2}{3^n}$, ………………………………………… 11 分

故 $T_n=3-\frac{n+1}{3^{n-1}}$. ………………………………………… 12 分

22.(1)解:因为 $f'(x)=\frac{1}{1+x}+x$, ………………………………………… 1 分

所以 $f'(1)=\frac{1}{1+1}+1=\frac{3}{2}$,所以曲线 $y=f(x)$在 $x=1$ 处切线的斜率为$\frac{3}{2}$. ………… 2 分

(2)解:设函数 $\varphi(x)=f(x)-x=\ln(1+x)+\frac{x^2}{2}-x$,

则 $\varphi'(x)=\frac{1}{1+x}+x-1=\frac{x^2}{1+x}$,当 $x\in(0,+\infty)$时,$\varphi'(x)>0$, ………………………… 3 分

则 $\varphi(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增, ………………………………………… 4 分

所以 $\varphi(x)>\varphi(0)=0$,从而 $f(x)-x>0$,即 $f(x)>x$. ………………………………… 5 分

(3)证明:设函数 $h(x)=f(x)+1-g(x)=\ln(1+x)+1-\cos x$,

当 $x>0$ 时,$1-\cos x\geqslant0$,$\ln(1+x)>0$,则 $h(x)>0$ 恒成立, ………………………… 6 分

则由 $h(e^{\frac{a}{2}})>0$,得 $f(e^{\frac{a}{2}})+1>g(e^{\frac{a}{2}})$,又 $f(e^{\frac{a}{2}})+1=g(b)$,所以 $g(b)>g(e^{\frac{a}{2}})$. …… 7 分

因为 $g'(x)=x-\sin x$ 的导数 $g''(x)=1-\cos x\geqslant0$,所以当 $x>0$ 时,$g'(x)>g(0)=0$,所以

$g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增, ………………………………………… 8 分

又 $b>0$,$e^{\frac{a}{2}}>0$,所以 $b>e^{\frac{a}{2}}$. ………………………………………… 9 分

同理得 $f(b^2)+1>g(b^2)$,要证 $f(b^2)+1>g(a+1)$,只需证 $g(b^2)>g(a+1)$,

即证 $b^2>a+1$. ………………………………………… 10 分

因为 $b>e^{\frac{a}{2}}$,所以 $b^2>e^a$.

设函数 $m(x)=e^x-x-1(x>0)$,则 $m'(x)=e^x-1>0$,

所以 $m(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,因为 $a>0$,所以 $m(a)>m(0)=0$,所以 $e^a>a+1$,

所以 $b^2>a+1$, ………………………………………… 11 分

所以 $g(b^2)>g(a+1)$,从而 $f(b^2)+1>g(a+1)$得证. ………………………… 12 分