

注意事项:

- 1. 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
- 2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上,写在本试卷上无效。
- 3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。
- 4. 本试卷主要考试内容:集合与常用逻辑用语,函数与导数,三角函数。

一、选择题:本题共 5 小题,每小题 5 分,共 25 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的

1. 已知集合  $M = \{x | x^2 - 1 < 0\}$ ,  $N = \{x | x^2 - 2 < 0\}$ , 则  $M \cap N =$

- A.  $\{x | x > -1\}$
- B.  $\{x | -1 \leq x \leq -2\}$
- C.  $\{x | -2 < x \leq 2\}$
- D.  $\{x | x \geq -2\}$

2. 如图所示的复古时钟显示的时刻为 10:10, 将时针与分针视为两条线段, 则该时刻的时针与分针所夹的钝角为

- A.  $\frac{\pi}{3}$
- B.  $\frac{23\pi}{36}$
- C.  $\frac{11\pi}{18}$
- D.  $\frac{7\pi}{12}$



3. 若函数  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ , 且  $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}, x_1 \neq x_2, (x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] > 0$ , 则  $f(x)$  的解析式可能为

- A.  $f(x) = \ln x + x$
- B.  $f(x) = x^2 - x$
- C.  $f(x) = 1 - x - 2^x$
- D.  $f(x) = 2x - 2^{-x}$

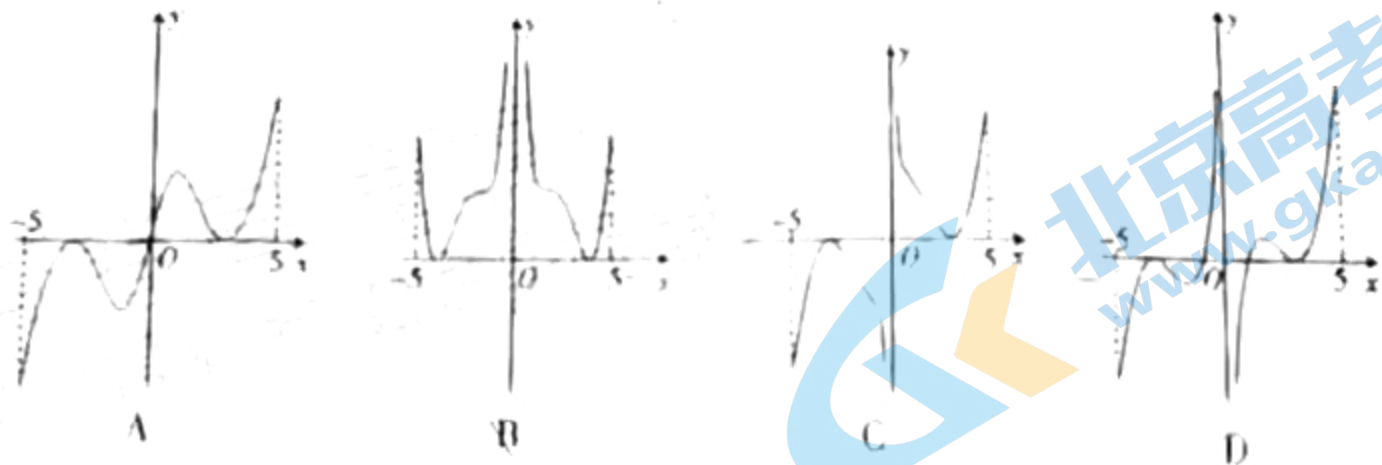
4. 将函数  $f(x) = \sin(\omega x - \frac{\pi}{6}) (3 < \omega < 6)$  的图象向右平移  $\frac{\pi}{3}$  个单位长度后, 得到函数  $g(x)$  的图象, 若  $g(x)$  为偶函数, 则  $\omega =$

- A. 5
- B.  $\frac{11}{2}$
- C. 4
- D.  $\frac{7}{2}$

5. 已知命题  $p: \forall a \in \mathbf{N}, \exists b \in \mathbf{N}, a > b$ , 则  $\neg p$  为

- A.  $\exists a \in \mathbf{N}, \forall b \in \mathbf{N}, a \leq b$
- B.  $\forall a \in \mathbf{N}, \exists b \in \mathbf{N}, a \leq b$
- C.  $\exists a \in \mathbf{N}, \exists b \in \mathbf{N}, a \leq b$
- D.  $\forall a \in \mathbf{N}, \forall b \in \mathbf{N}, a \leq b$

6. 函数  $y = (1 + \cos x)(x - \frac{1}{x})$  在  $[-5, 6) \cup (0, 5]$  上的部分图象大致为



7. 已知  $a = 4\log_2 2$ ,  $b = \log_2 4$ ,  $c = \frac{\lg 3 + \lg 5}{2\lg 2}$ , 则

A.  $a > b > c$

B.  $b > a > c$

C.  $c > b > a$

D.  $a > c > b$

8. 已知点  $P(-5, m)$  为角  $\alpha$  终边上一点,  $\alpha = 2\beta$ , 且  $\frac{1 + \cos 2\beta}{\sin 2\beta} + \tan \beta = 2\sqrt{26}$ , 则  $m =$

A. 2

B. 1

C. 1

D.  $\pm 1$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 关于充分必要条件, 下列判断正确的有

A. “ $m > 2$ ”是“ $m > 3$ ”的充分不必要条件

B. “ $\log_2 a + \log_2 c = 2\log_2 b$ ”是“ $a, b, c$  成等比数列”的充分不必要条件

C. “ $f(x)$  的图象经过点  $(1, 1)$ ”是“ $f(x)$  是幂函数”的必要不充分条件

D. “直线  $l_1$  与  $l_2$  平行”是“直线  $l_1$  与  $l_2$  的倾斜角相等”的充要条件

10. 血压 (blood pressure, BP) 是指血液在血管内流动时作用于单位面积血管壁的侧压力, 它是推动血液在血管内流动的动力. 血压的最大值、最小值分别称为收缩压和舒张压. 未使用抗高血压药的前提下, 18 岁以上成人收缩压  $\geq 140$  mmHg 或舒张压  $\geq 90$  mmHg, 则说明这位成人有高血压. 设从未使用抗高血压药的李华今年 40 岁, 从某天早晨 6 点开始计算 (即早晨 6 点时,  $t = 0$ ), 他的血压  $p(t)$  (mmHg) 与经过的时间  $t$  (h) 满足关系式  $p(t) = 116 + 22\sin(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{3})$ , 则

A. 函数  $p(t)$  的最小正周期为 6

B. 当天早晨 7 点时李华的血压为 138 mmHg

C. 当天李华有高血压

D. 当天李华的收缩压与舒张压之差为 44 mmHg

11. 已知函数  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ ,  $f(x) + f(-x) = 0$ ,  $f(x+1) + f(3-x) = 0$ , 当  $0 < x < 2$  时,  $f(x) = x^2 - 2x$ , 则

A.  $f(x) = f(x+8)$

B.  $f(x)$  的图象关于直线  $x=2$  对称

C. 当  $4 < x \leq 6$  时,  $f(x) = x^2 - 10x + 24$

D. 函数  $y = f(x) - \lg x^2$  有 4 个零点

12. 若  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$  存在, 则称  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$  为二元函数  $f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处对  $x$  的偏导数, 记为  $f'_x(x_0, y_0)$ ; 若  $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$  存在, 则称  $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$  为二元函数  $f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处对  $y$  的偏导数, 记为  $f'_y(x_0, y_0)$ . 已知二元函数  $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2 (x > 0, y > 0)$ , 则
- A.  $f'_x(1, 2) = -2$                       B.  $f'_y(1, 2) = 10$
- C.  $f'_x(m, n) + f'_y(m, n)$  的最小值为  $-1$                       D.  $f(x, y)$  的最小值为  $-\frac{4}{27}$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 函数  $f(x) = 2e^x - \frac{1}{e^x}$  的图象在点  $(0, f(0))$  处的切线方程为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .
14. 设集合  $A = \{x \mid x^2 - 2x - 8 > 0\}$ ,  $B = \{x \mid x \leq a \text{ 或 } x \geq a + 5\}$ , 若  $A \cap (\complement_{\mathbb{R}} B) = \emptyset$ , 则  $a$  的取值范围是  $\underline{\hspace{2cm}}$ .
15. 已知函数  $f(x) = \cos^2(x - \frac{\pi}{6}) + \sin^4 x - \cos^4 x$ , 则  $f(x)$  的最小值为  $\underline{\hspace{2cm}}$ ,  $f(x)$  图象的一条对称轴方程可以是  $\underline{\hspace{2cm}}$ . (本题第一空 2 分, 第二空 3 分)
16. 设函数  $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x, & x \leq 4, \\ |\log_2(x-4)|, & x > 4, \end{cases}$  关于  $x$  的方程  $f(x) = t$  有四个实根  $x_1, x_2, x_3, x_4 (x_1 < x_2 < x_3 < x_4)$ , 则  $x_1 + x_2 + x_3 + \frac{1}{4}x_4$  的最小值为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

已知  $\tan(a + \pi) = 3$ .

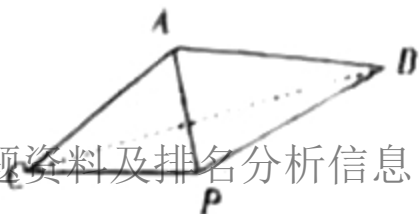
(1) 求  $\frac{\tan 2a}{\tan(2021\pi - a)}$  的值;

(2) 求  $\frac{\sin 2a + \cos^2 a}{2 + \sin^2 a}$  的值.

18. (12 分)

如图, 在三棱锥  $A-PBC$  中,  $PA \perp$  平面  $ABC$ ,  $AB \perp AC$ ,  $AB$  与  $AC$  的长度之和为 6 米,  $AB = 2AP$ , 现要给三棱锥  $A-PBC$  的侧面刷油漆, 每平方米需要 0.5 升油漆, 油漆价格为 60 元/升.

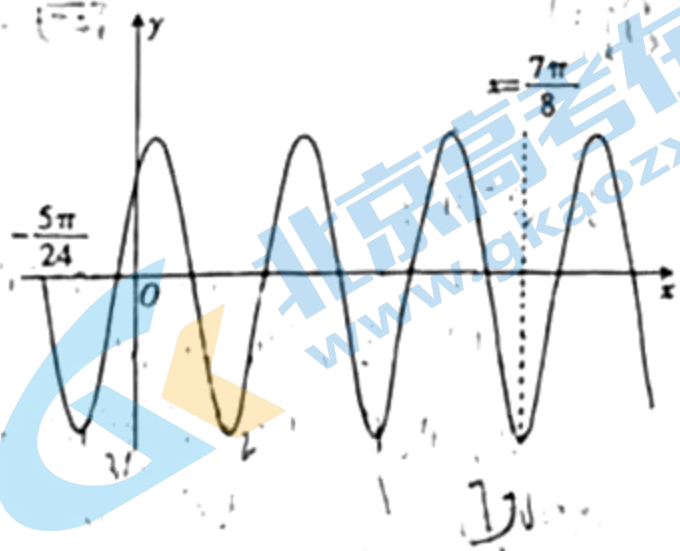
- (1) 设  $AB = x$  米, 三棱锥  $A-PBC$  的侧面共需要油漆  $y$  升, 试写出  $y$  关于  $x$  的函数表达式;  
 (2) 刷油漆需要请油漆工来完成, 工费按照每平方米 10 元计算, 若油漆工工费及油漆费用的总预算为 400 元, 试问最后油漆工工费及油漆费用是否有可能超预算? 说明你的理由.



9. (12分)

已知函数  $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$  ( $\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$ ) 的部分

图象如图所示.



(1) 求  $f(x)$  的解析式.

(2) 把  $y = f(x)$  的图象上所有点的横坐标伸长到原来的  $m$  ( $m > 1$ ) 倍 (纵坐标不变), 得到函数  $y = g(x)$  的图象, 证明:  $g(x)$  在  $(0, \frac{\pi}{3})$  上有最大值的充要条件是  $1 < m < 8$ .

20. (12分)

已知函数  $f(x) = x - a\sqrt{x-1}$  ( $a \neq 0$ ).

(1) 讨论  $f(x)$  在  $(1, +\infty)$  上的单调性.

(2) 若曲线  $y = f(x)$  的一条切线的斜率为  $1-a$ , 证明: 这条切线与曲线  $y = f(x)$  只有一个公共点.

21. (12分)

已知函数  $p(x) = m^{x-1} + 1$  ( $m > 0$  且  $m \neq 1$ ) 经过定点 A, 函数  $f(x) = \log_a x$  ( $a > 0$  且  $a \neq 1$ ) 的图象经过点 A.

(1) 求函数  $y = f(2a - 2^x)$  的定义域与值域;

(2) 若函数  $g(x) = f(2x^{\lambda}) \cdot f(x^2) - 4$  在  $[\frac{1}{4}, 4]$  上有两个零点, 求  $\lambda$  的取值范围.

22. (12分)

已知函数  $f(x) = \ln x + x^2 + x$ .

(1) 若  $f(x) \leq ax^2$ , 求  $a$  的取值范围.

(2) 若  $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{x_1 x_2} = -1$ , 证明:  $x_1 + x_2 > \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ .

密封线内不要答题