绝密★本科目考试启用前

2023 北京高考真题

数　　学

本试卷共 5 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分(选择题　共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知集合 $M=\{x|x+2\geq 0\}$，$N=\{x|x-1<0\}$. 则 $M\cap N=$（　　）

A. $\{x|-2\leq x<1\}$　　B. $\{x|-2<x\leq 1\}$

C. $\{x|x\geq -2\}$　　D. $\{x|x<1\}$

【解析】

答案：A.

2. 在复平面内，复数 z 对应的点的坐标是 $(-1,\sqrt{3})$. 则 z 的共轭复数 $z=$（　　）

A. $1+\sqrt{3}i$　　B. $1-\sqrt{3}i$　C. $-1+\sqrt{3}i$　D. $-1-\sqrt{3}i$

【解析】

$z=-1+\sqrt{3}i$，则 $z=-1-\sqrt{3}i$，本题选 D.

3. 已知向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(2,3)$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(-2,1)$，则$|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2=$（　　）

A. -2　　B. -1　　C. 0　　D. 1

【解析】

$\boldsymbol{a}=(0,2)$，$\boldsymbol{b}=(2,1)$，$|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2=7$.

回忆版就是上面的内容，一看就不是原题，不严谨。

4. 下列函数中在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增的是（　　）

A. $f(x)=-\ln x$　　B.　　C.　　D.

【解析】

这道题不清楚后面三个选项，回忆不起来了。不过难度应该一般般。

5. $\left(2x-\dfrac{1}{x}\right)^5$ 的展开式中，x 的系数是（　　）

A. -40　　B. 40　C. -80　D. 80

【解析】

$$T_{r+1}=C_5^r\left(2x\right)^{5-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r=(-1)^r2^{5-r}C_5^rx^{5-2r},$$

$r=2$，$(-1)^2 2^3C_5^2=80$，故选 D。

这道题是回忆版，真实性有待核实。

6. 已知抛物线 C：$y^2=8x$ 的焦点为 F，点 M 在 C 上，若 M 到直线 $x=-3$ 的距离为 5，则 $|MF|=$（　　）

A. 7　　B. 6　　C. 5　　D. 4

【解析】

准线 $x=-2$，若 M 到直线 $x=-3$ 的距离为 5，

则 M 到直线 $x=-2$ 的距离为 4，则 $|MF|=4$，故本题选 D。

7. 在△ABC 中，$(a+c)(\sin A-\sin C)=b(\sin A-\sin B)$，则∠C=（　　）

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{2\pi}{3}$　　D. $\frac{5\pi}{6}$

【解析】

$(a+c)(a-c)=b(a-b)$，$a^2-c^2=ab-b^2$，

即 $a^2+b^2-c^2=ab$，$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{1}{2}$，

$C\in(0,\pi)$，可得 $C=\frac{\pi}{3}$，故选 B。

8. 若 $xy\neq 0$，则“$x+y=0$”是“$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=-2$”的（　　）

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

【解析】

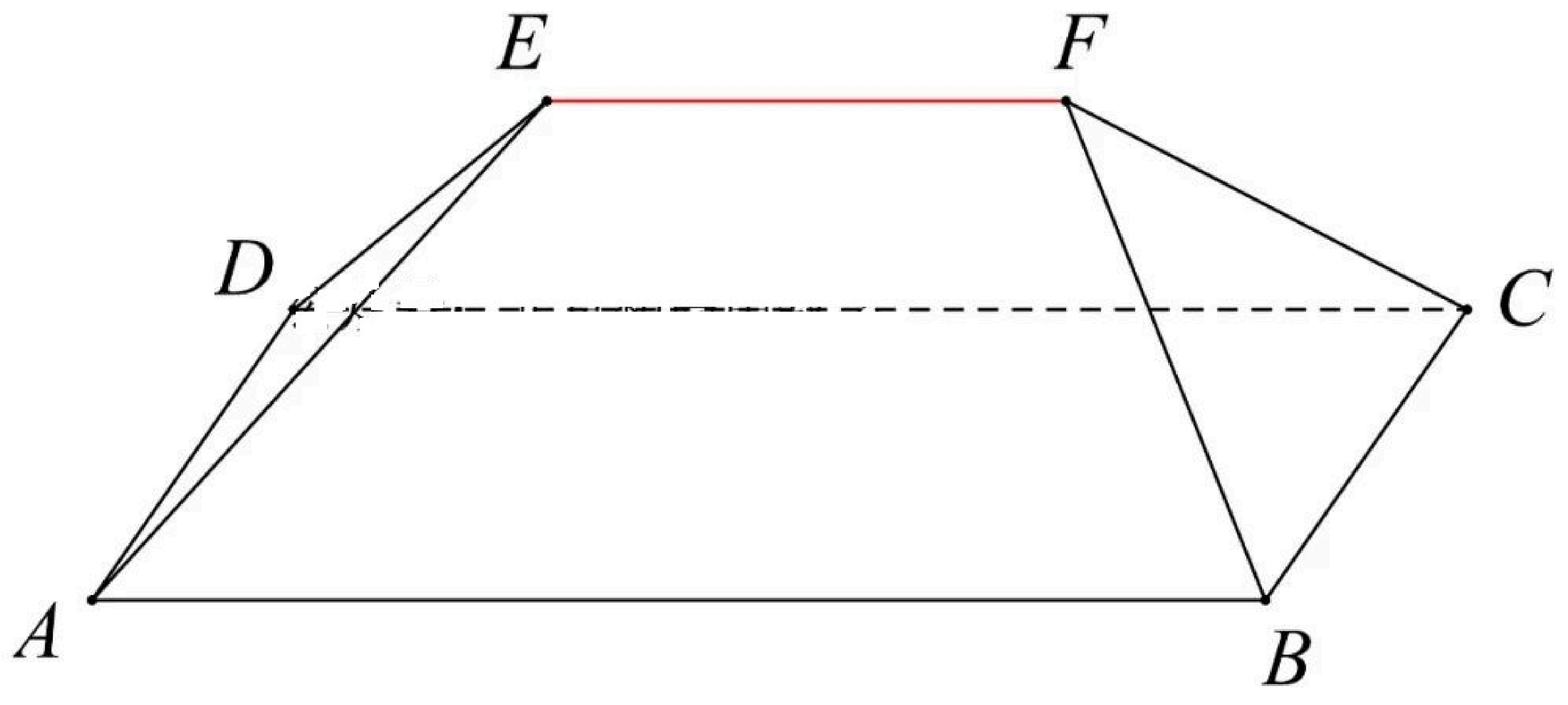
若 $x+y=0$，则 $x=-y$，即二者互为相反数，可得 $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=-2$ 成立；

若 $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=-2$，则 $\frac{x^2+y^2}{xy}=-2$，即 $(x+y)^2=0$，得 $x+y=0$.

故本题选 C。

9. 刍甍是我国传统建筑造型之一，蕴含着丰富的数学元素。安装灯带可以勾勒出建筑轮廓，展现造型之美。如图，某屋顶可视为五面体 ABCDEF，四边形 ABFE 和 CDEF 是全等的等腰梯形，△ADE 和△BCF 是全等的等腰三角形。若 AB=25m，BC=AD=10m，且等腰梯形所在的面、等腰三角形所在的面与底面夹角的正切值均为 $\frac{\sqrt{14}}{5}$。某学习小组为这个模型的轮廓安装灯带（不计损耗），则所需灯带的长度为（　　）

A. 102m　　B. 112m　　C. 117m　　D. 125m



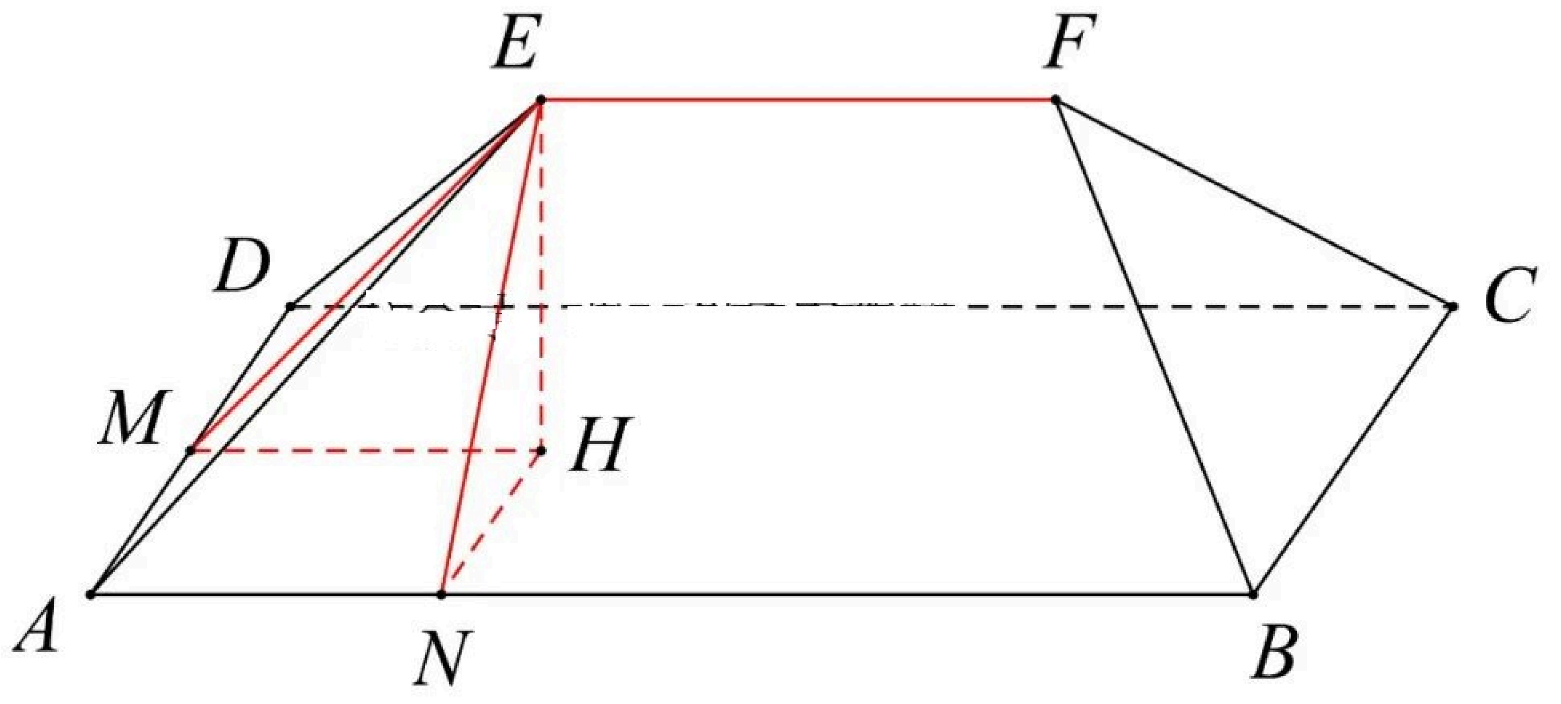
【解析】

如图，作点 E 在底面 ABCD 的投影，

过点 H 向 AD 和 AB 作垂线，垂足分别为 M，N。

则∠ENH 和∠EMH 为侧面与底面所成角的平面角，

有 $\tan\angle ENH=\tan\angle EMH=\dfrac{\sqrt{14}}{5}$。



分析可知，由 AD=10，可得 NH=5，于是 $EH=\sqrt{14}$，可得 MH=5,。

在 Rt△EMH 中，$EM=\sqrt{MH^2+EH^2}=\sqrt{5^2+(\sqrt{14})^2}=\sqrt{39}$。

在 RT△AEM 中，AM=NH=5，$AE=\sqrt{AM^2+EM^2}=\sqrt{5^2+(\sqrt{39})^2}=8$。

又 $EF=AB-2AN=AB-2MH=25-10=15$。

于是，灯带的长度即所有棱长为：

$2\times25+2\times10+4\times8+15=117$ m，故本题选 C。

10. 数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=\dfrac{1}{4}(a_n-6)^3+6$，下列说法正确的是（　　）

A. 若$a_1=3$，则$\{a_n\}$是递减数列，$\exists M\in R$，使得$n>m$时，$a_n>M$

B. 若$a_1=5$，则$\{a_n\}$是递增数列，$\exists M\le 6$，使得$n>m$时，$a_n<M$

C. 若$a_1=7$，则$\{a_n\}$是递减数列，$\exists M>6$，使得$n>m$时，$a_n>M$

D. 若$a_1=9$，则$\{a_n\}$是递增数列，$\exists M\in R$，使得$n>m$时，$a_n<M$

【解析】

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{4}(a_n-6)^3+6-a_n$$

$$=\frac{1}{4}(a_n-6)^3-(a_n-6)=(a_n-6)\left[\frac{1}{4}(a_n-6)^2-1\right],$$

A 选项，若$a_1=3$，$a_2=-\dfrac{27}{4}+6=-\dfrac{3}{4}$，$a_3<\dfrac{1}{4}\times(-6)^3+6=-48$，……，

显然$a_n-6<0$，且$\dfrac{1}{4}(a_n-6)^2-1>0$，得$a_{n+1}-a_n<0$，

即$\{a_n\}$是递减数列。

又$a_2-a_1=-\frac{3}{4}-3=-\frac{15}{4}$，

$a_3-a_2<-48-\frac{3}{4}<-48$，

$a_4-a_3<a_3<-48$，

……

$a_n-a_{n-1}<-48$，

累加可得$a_n-a_1<-48(n-2)-\frac{15}{4}$，则$a_n<-48(n-2)-\frac{3}{4}$，

显然，当$n\to+\infty$时，$a_n\to-\infty$，即a_n没有最小值，

因此当"$n>m$时，$a_n>M$"不成立。故A选项错误。

B选项，$a_1=5$，由$a_{n+1}=\frac{1}{4}(a_n-6)^3+6$，

得$a_2=-\frac{1}{4}+6$，$a_3=\frac{1}{4}\left[\left(-\frac{1}{4}+6\right)-6\right]^3+6=-\left(\frac{1}{4}\right)^4+6$，

$$a_4=\frac{1}{4}\left[\left(-\left(\frac{1}{4}\right)^4+6\right)-6\right]^3+6=-\left(\frac{1}{4}\right)^{13}+6,$$

$$a_5=\frac{1}{4}\left[\left(-\left(\frac{1}{4}\right)^{13}+6\right)-6\right]^3+6=-\left(\frac{1}{4}\right)^{40}+6,$$

……

观察可得，$\{a_n\}$是递增数列，且当$n\to+\infty$时，$a_n\to6$，

若$M=6$，则$n>m$时，$a_n<6$恒成立，故选项B正确。

C选项，$a_1=7$，由$a_{n+1}=\frac{1}{4}(a_n-6)^3+6$，

得$a_2=\frac{1}{4}+6$，$a_3=\frac{1}{4}\left[(\frac{1}{4}+6)-6\right]^3+6=(\frac{1}{4})^4+6$，

$a_4=\frac{1}{4}\left[((\frac{1}{4})^4+6)-6\right]^3+6=(\frac{1}{4})^{13}+6$，……，

观察可知，$\{a_n\}$是递减数列，且当$n\to+\infty$时，$a_n\to6$，

故不存在$M>6$，当$n>m$时，$a_n>M$成立。故选项C不正确。

D选项，$a_1=9$，由$a_{n+1}=\frac{1}{4}(a_n-6)^3+6$，

得$a_2=\frac{27}{4}+6$，$a_3=\frac{1}{4}\left[(\frac{27}{4}+6)-6\right]^3+6=\frac{1}{4}(\frac{27}{4})^3+6$，

$$a_4=\frac{1}{4}\left[(\frac{1}{4}(\frac{27}{4})^3+6)-6\right]^3+6=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{4}(\frac{27}{4})^3\right]^3+6=(\frac{1}{4})^4(\frac{27}{4})^9+6,$$

……，

结合$a_{n+1}-a_n=(a_n-6)\left[\frac{1}{4}(a_n-6)^2-1\right]$，可知$a_{n+1}-a_n>0$，

于是可得$\{a_n\}$是递增数列，结合各项特点，

可知不存在$M \in R$，使得$n > m$时，$a_n < M$。

综上可得，本题正确选项为B。

【反思】

去年数列题在填空题最后一题，今年在选择题最后一题。

本题是难度较大的一道题，对部分考生预定的答题节奏会产生一定影响。

在四个选项中，正确的B选项，难度好像最小。

数列的选填压轴题一直都是高频类型，2022年北京高考数列填空题的特点是“反证法”，今年的特点可能要算是“极限”和“单调性”，都是函数的特点。有代表性的类似题目有：
2023年上海春考，2022年海淀二模，朝阳和东城的高三期末，还有2019东城一模和实验中学的高三期中试题，等等。

第二部分（非选择题共110分）

二、填空题共5小题，每小题5分，共25分。

11. 已知函数$f(x)=4^x+\log_2 x$，则$f(\frac{1}{2})=$__________.

【解析】

$f(\frac{1}{2})=4^{\frac{1}{2}}+\log_2\frac{1}{2}=\sqrt{4}+\log_2 2^{-1}=2-1=1$.

12. 已知双曲线C的焦点为$(-2,0)$和$(2,0)$，离心率为$\sqrt{2}$，则C的方程为______________.

【解析】

结合题意，$c=2$，$e=\frac{c}{a}=\frac{2}{a}=\sqrt{2}$，解得$a=\sqrt{2}$，

$b^2=c^2-a^2=2$，

可得C的解析式为：$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$.

13. 已知命题p：若α，β为第一象限角，且$\alpha > \beta$，则$\tan\alpha > \tan\beta$. 能说明命题p为假命题的一组α，β的值可以是$\alpha=$__________，$\beta=$______.

【解析】

答案是开放性的，比如$\alpha=2\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{9\pi}{4}$，$\beta=\frac{\pi}{3}$.

填空题中的三角函数开放题考过好几次了。

14. 我国度量衡的发展有着悠久的历史，战国时期就出现了类似于砝码的用来测量物体质量的“环权”. 已知 9 枚环权的质量（单位：铢）从小到大构成项数为 9 的数列$\{a_n\}$，该数列的前 3 项成等差数列，后 7 项成等比数列，且$a_1=1$，$a_5=12$，$a_9=192$，则$a_7=$_______，公众号：北京初高中数学数列$\{a_n\}$的所有项的和为_______.

【解析】

结合题意，$a_9=a_5q^4$，即$192=12q^4$，解得$q=2$（舍负）。

则$a_7=a_5q^2=12\times4=48$，$a_4=\dfrac{a_5}{q}=6$，$a_3=3$，可得$a_2=2$。

于是，该数列为 1，2，3，6，12，24，48，96，192，

可得$S_9=3+\dfrac{3\times(1-2^7)}{1-2}=3+381=384$。

15. 设$a>0$，函数$f(x)=\begin{cases}x+2, x<-a,\\ \sqrt{a^2-x^2}, -a\le x\le a,\\ -\sqrt{x}-1, x>a.\end{cases}$，公众号：北京初高中数学给出下列四个结论：

① $f(x)$在区间$(a-1,+\infty)$上单调递减；

② 当$a\ge1$时，$f(x)$存在最大值；

③ 设$M(x_1,f(x_1))(x_1\le a)$，$N(x_2,f(x_2))(x_2>a)$，则$|MN|>1$；

④ 设$P(x_3,f(x_3))(x_3<-a)$，$Q(x_4,f(x_4))(x_4\ge-a)$，若$|PQ|$存在最小值，则a的取值范围时$\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$.

【解析】

分段函数中间一段为圆弧，由$y=\sqrt{a^2-x^2}$，

可得$x^2+y^2=a^2(-a\le x\le a, y\ge0)$。

选项①，可以取特殊值进行分析，$a-1=-a$时，$a=\dfrac{1}{2}$，此时$f(x)$在区间$(a-1,0)$上单调递增，故①错误；事实上，当$a-1\le-a$时，即$a\le\dfrac{1}{2}$时，均可否定选项①；

选项②，当$a\ge1$时，对于函数$y=x+2(x<-a)$，

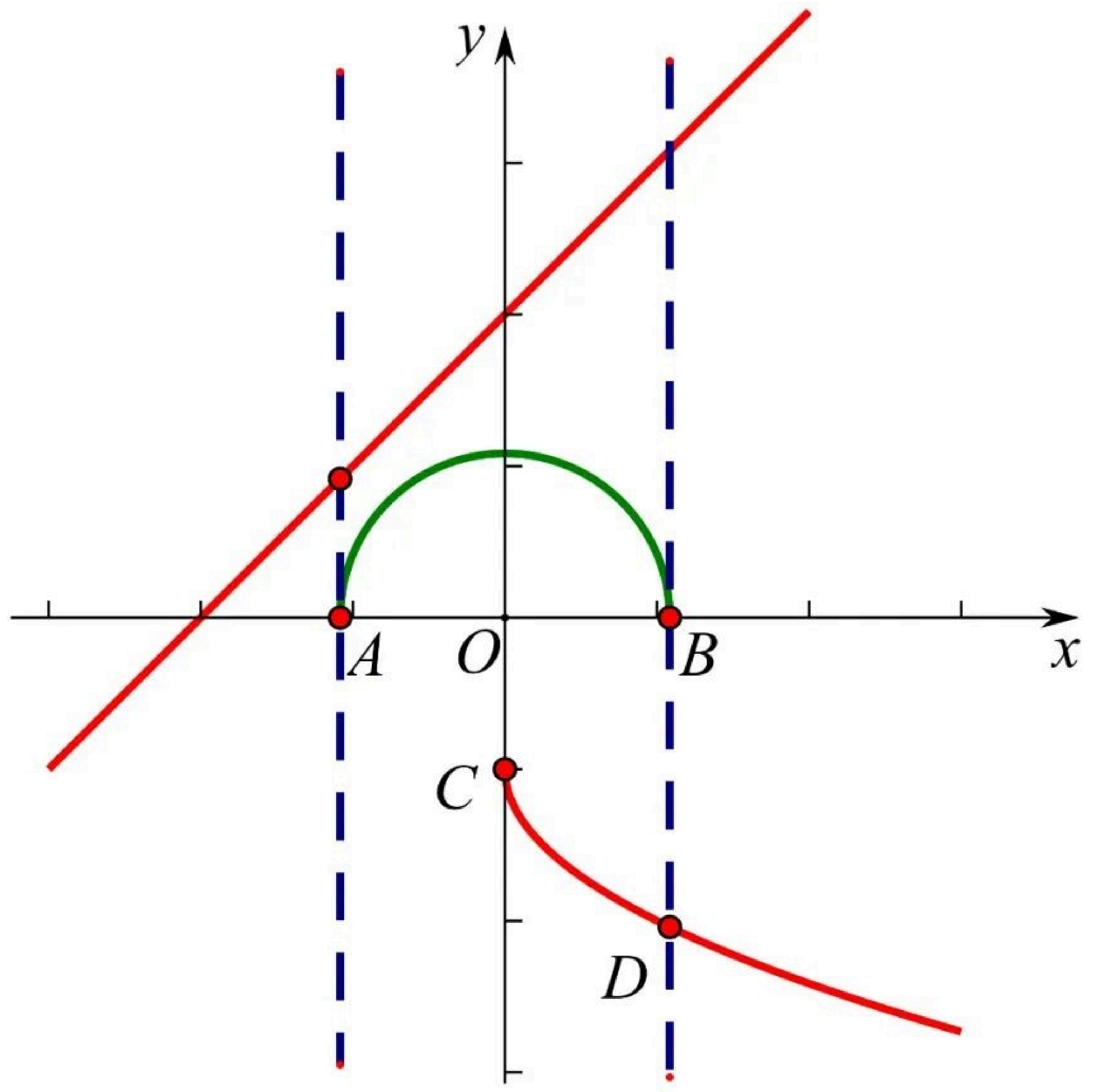
可知函数值$y<2-a\le a$，而$y=\sqrt{a^2-x^2}$，当$x=0$时，$y_{\max}=a$。

因此$f(x)$存在最大值，故②正确。

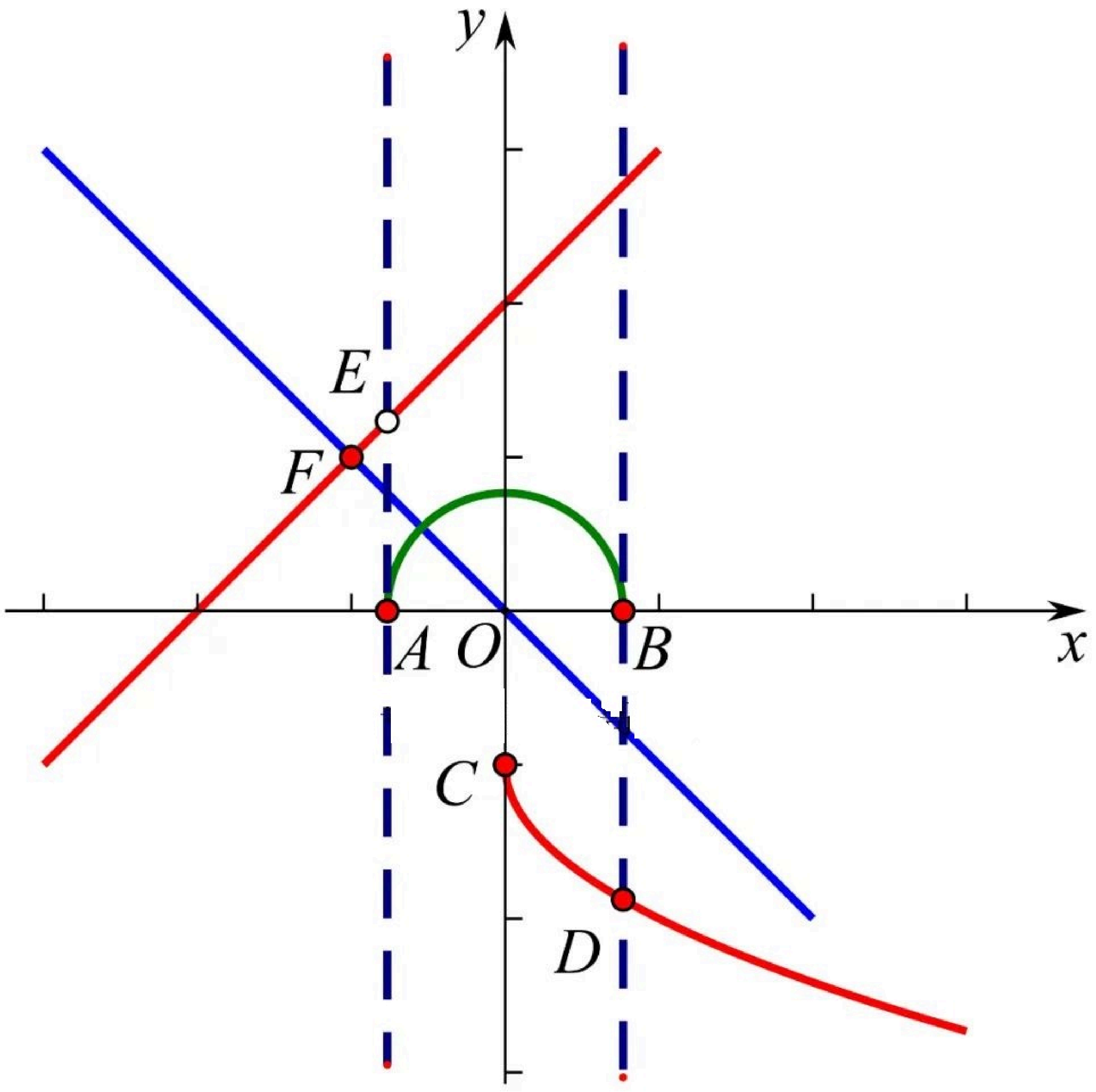
选项③，如图，OA=OC=1，BD＞1，

考虑到a变大时，BD 距离变大，

因此$|MN|>1$恒成立，故③正确。



选项④，如图，$E(-a,2-a)$，$F(-1,1)$，若$|PQ|$存在最小值，则点 E 需在点 F 上方，则$2-a>1$，解得$0<a<1$，故④错误。



综上可得，本题应填②③。

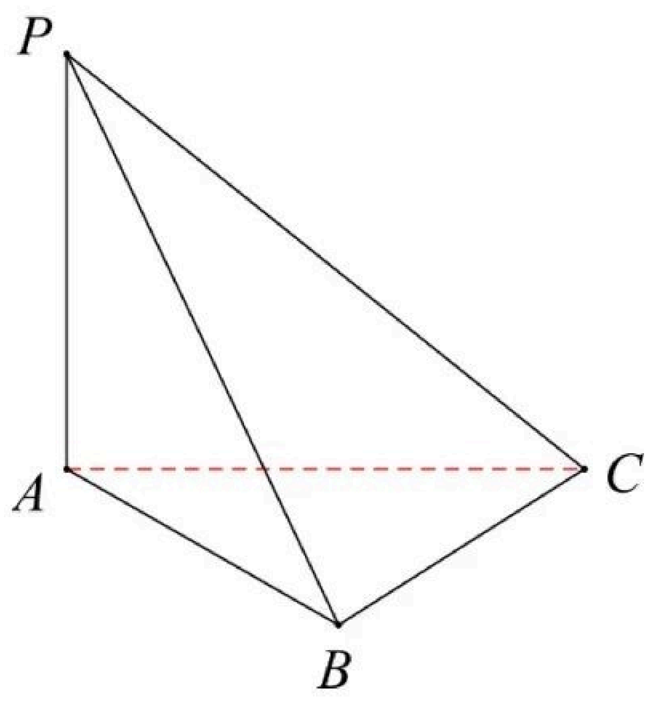
本题也是一道略有难度的题目，分段函数中增加一段“圆弧”算是北京高考的一个创新。与此类似的题目有 2019 年江苏高考数学的题目，101 在同年的高三期中考了这道题。

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

16. 如图，四面体 $P\text{-}ABC$ 中，$PA=AB=BC=1$，$PC=\sqrt{3}$，$PA\perp$平面 ABC.

（I）求证：$BC\perp$平面 PAB;

（II）求二面角 $A\text{-}PC\text{-}B$ 的大小.



【解析】

（I）证明：因为 $PA\perp$ 平面 ABC，所以 $PA\perp AC$，$PA\perp BC$。

因为在 Rt$\triangle PAC$ 中，$PA=1$，$PC=\sqrt{3}$，由勾股定理可得

$AC=\sqrt{PC^2-PA^2}=\sqrt{3-1}=\sqrt{2}$。

在$\triangle ABC$ 中，$AB=BC=1$，$AC=\sqrt{2}$，则 $AB^2+BC^2=AC^2$，

可得∠ABC=90°，即 $AB\perp BC$。

因为 $PA\cap AB=A$，PA，$AB\subset$ 平面 PAC，

可得 $BC\perp$ 平面 PAB。

（II）**方法一：**

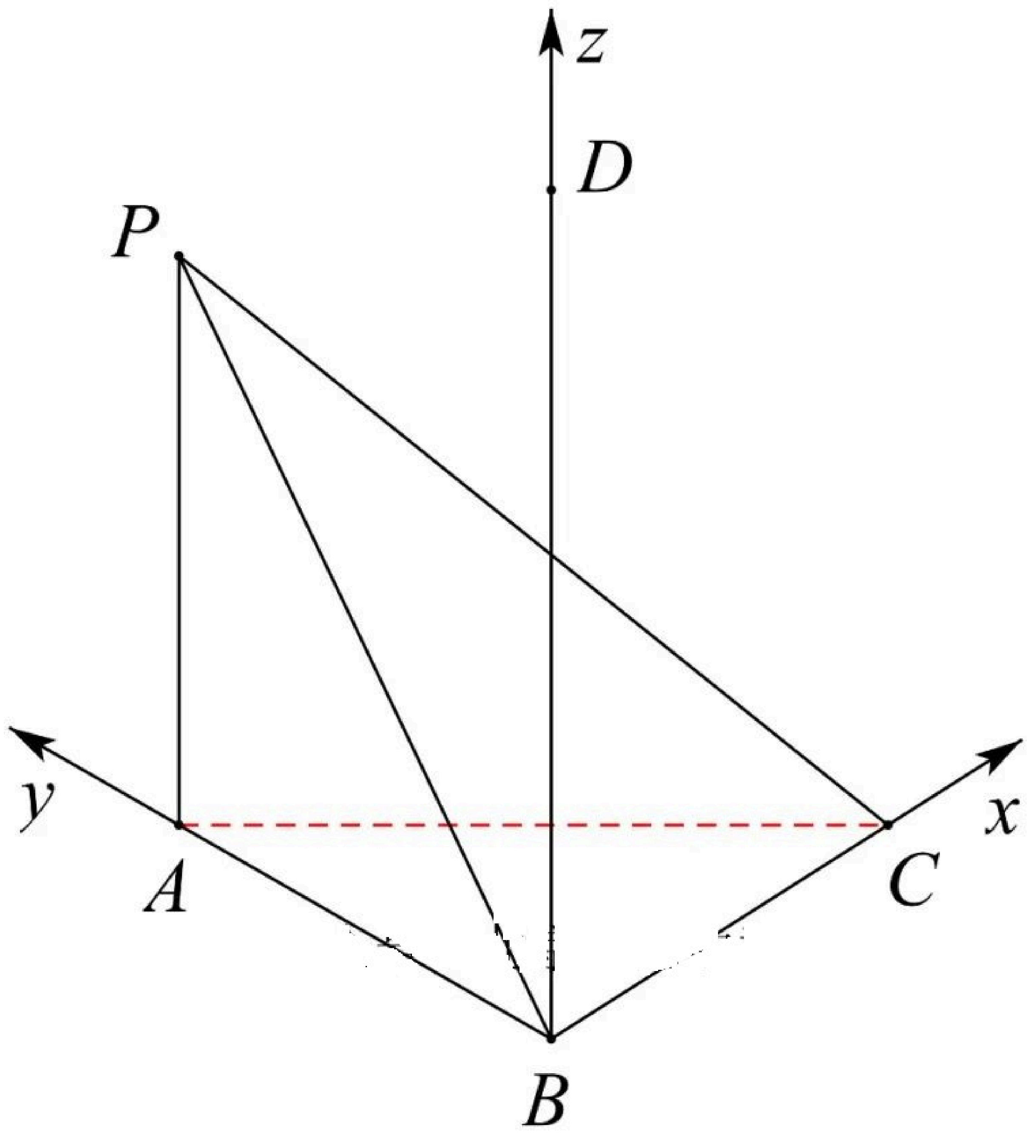
过点 B 作 BD∥PA。则 BD⊥平面 ABC，BD⊥BA，BD⊥BC，

又 AB⊥BC，分别为 BC、BA 和 BD 为 x 轴、y 轴、z 轴，建立空间直角坐标系如图所示。

依题意，可得 $A(0,1,0)$，$B(0,0,0)$，$C(1,0,0)$，$P(0,1,1)$。

$\overrightarrow{AP}=(0,0,1)$，$\overrightarrow{CP}=(-1,1,1)$，$\overrightarrow{BC}=(1,0,0)$。

设平面 PAC 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，



则 $\begin{cases}\overrightarrow{AP}\cdot\vec{m}=0\\ \overrightarrow{CP}\cdot\vec{m}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}z=0\\ -x+y+z=0\end{cases}$，

令 $x=1$，可得 $\vec{m}=(1,1,0)$.

设平面 PBC 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{BC}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{CP}\cdot\vec{n}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}x=0\\ -x+y+z=0\end{cases}$，

令 $y=1$，可得 $\vec{n}=(0,1,-1)$．

所以 $\cos\left\langle\vec{m},\vec{n}\right\rangle=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{\left|\vec{m}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$，

结合图示可知二面角 $A\text{-}PC\text{-}B$ 为锐角，

所以二面角 $A\text{-}PC\text{-}B$ 的大小为 $\dfrac{\pi}{3}$。

在求平面 PAC 的法向量时，也可取 AC 的中点 E，连接 BE，可证 $\overrightarrow{BE}$ 即为平面 PAC 的法向量。或者有方法二：

方法二：

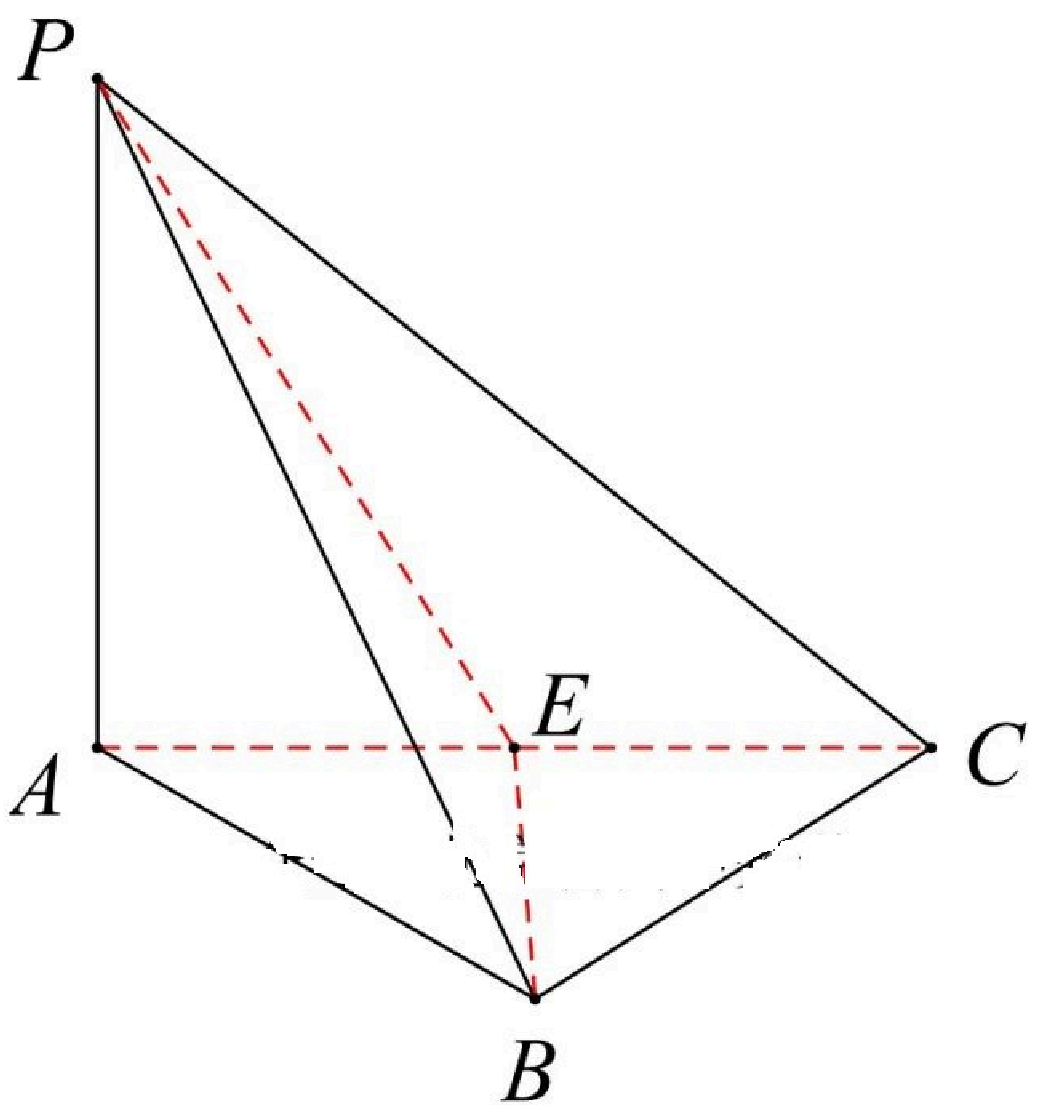
如图，过点 B 作 BE⊥AC 于 E，连接 PE。

因为 PA⊥平面 ABC，PA⊂平面 PAC，

可得平面 PAC⊥平面 ABC，

又平面 PAC⋂平面 ABC，BE⊂平面 ABC，

所以 BE⊥平面 PAC，则点 E 为点 B 在平面 PAC 内的投影。



可得 $CE=\dfrac{1}{2}AC=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，△PCE 的面积为

$S_{\Delta PCE}=\dfrac{1}{2}CE\cdot PA=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times1=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$。

△BCP 的面积为 $S_{\Delta BCP}=\dfrac{1}{2}\times BC\times BP=\dfrac{1}{2}\times1\times\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$。

设二面角 $A\text{-}PC\text{-}B$ 的大小为 θ，则 $S_{\Delta PCE}=S_{\Delta BCP}\cdot\cos\theta$，

即 $\dfrac{\sqrt{2}}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos\theta$，

解得 $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$，结合图示可知二面角 $A\text{-}PC\text{-}B$ 为锐角，

所以二面角 $A\text{-}PC\text{-}B$ 的大小为 $\dfrac{\pi}{3}$。

方法三：

如图，仿照方法二，

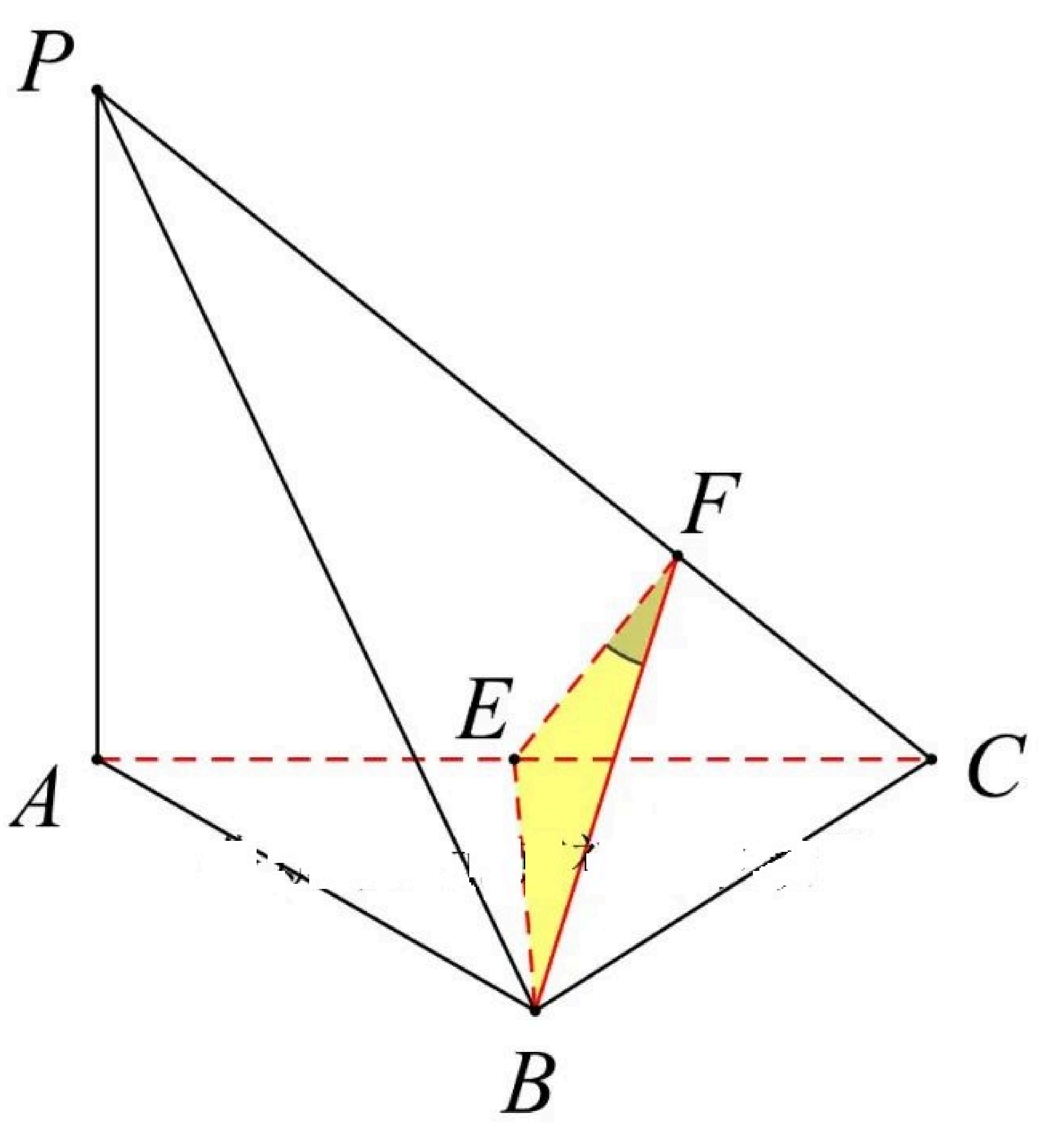
过点 B 作 BE⊥AC 于 E，连接 PE。

可得 BE⊥平面 PAC，BE⊥PC。

在平面 PAC 中，过点 E 作 EF⊥PC 于 F，连接 BF。

由 $BE \bigcap EF = E$，可得 PC⊥平面 BEF，

则∠BFE 即为二面角 *A-PC-B* 的平面角。



由△CEF∽△CPA，可得 $\dfrac{CE}{CP} = \dfrac{EF}{PA}$，即 $\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{EF}{1}$，$EF = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$。

又 $BE = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$，则 $\tan\angle BFE = \dfrac{BE}{EF} = \sqrt{3}$，

二面角 *A-PC-B* 为锐角，所以二面角 *A-PC-B* 的大小为 $\dfrac{\pi}{3}$。

【反思】

1. 海淀高三一模二模的立体几何解答题，都可以采用不同的方法进行分析。

2. 四面体 P-ABC 是“鳖臑”，为非常重要的几何。由四个直角三角形组成的四面体称为“鳖臑”。顺便查了一下，北京高考这道题居然是一道“原题”。参考如下：

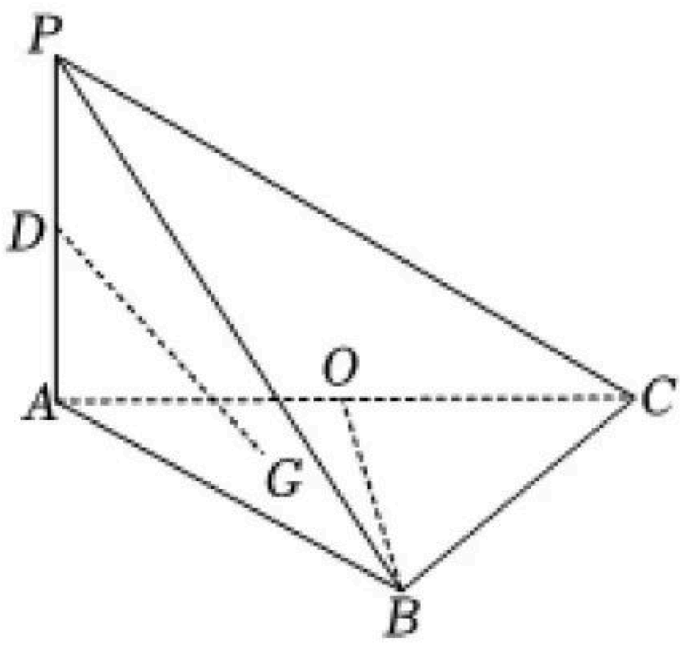
【2021.1 宁夏高一期末】

如图，在三棱锥 P-ABC 中，PA⊥平面 ABC，底面 ABC 是直角三角形，PA=AB=BC=4，O 是棱 AC 的中点，G 是△AOB 的重心，D 是 PA 的中点.

（1）求证：BC⊥平面 PAB；

（2）求证：DG∥平面 PBC；

（3）求二面角 A-PC-B 的大小.

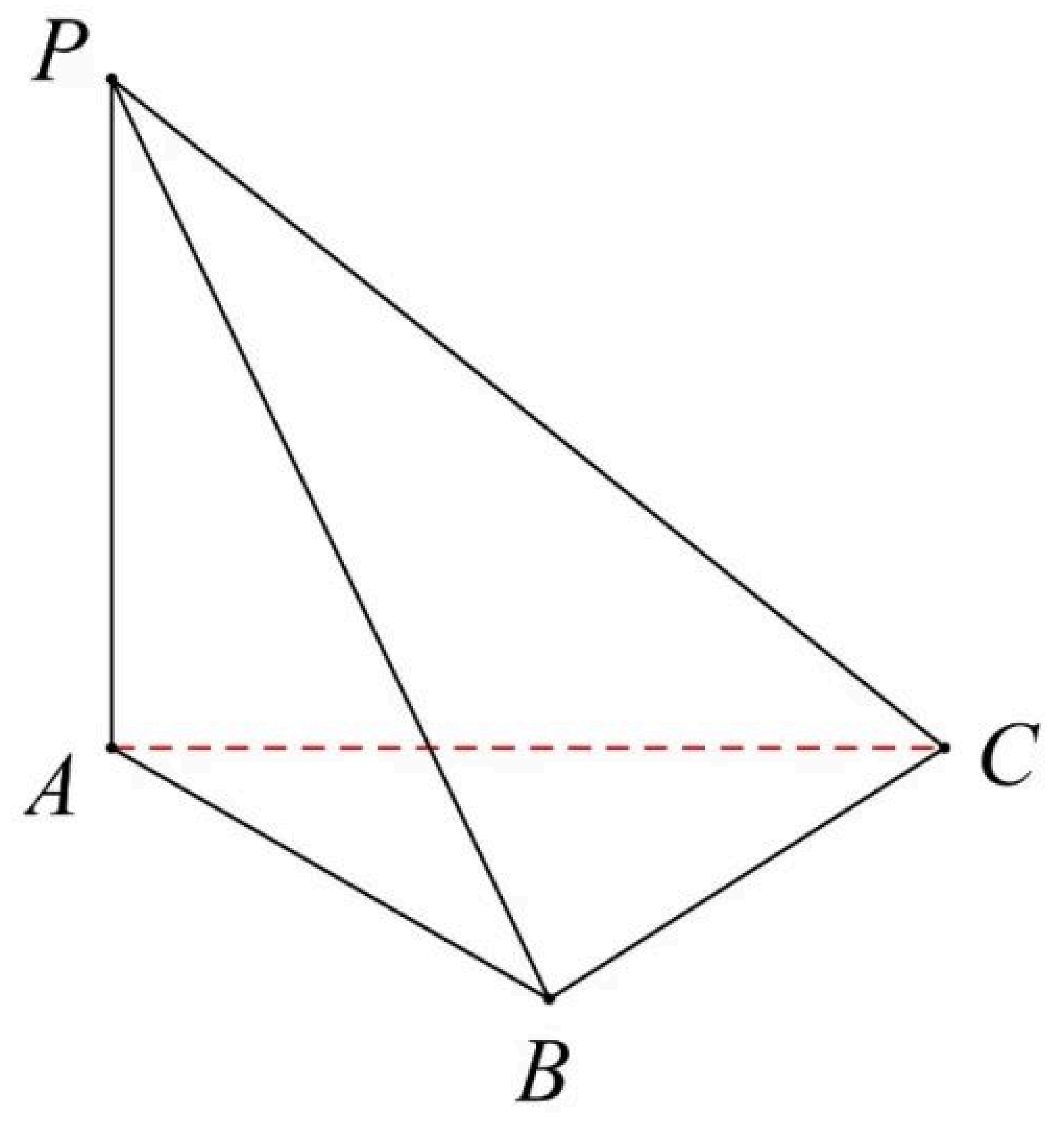


【2022 年广州市天河区三模】

如图，在三棱锥 P-ABC 中，平面 PAC⊥平面 PBC，PA⊥平面 ABC．

（1）求证：BC⊥平面 PAC；

（2）若 AC=BC=PA，求二面角 A-PB-C 的大小．

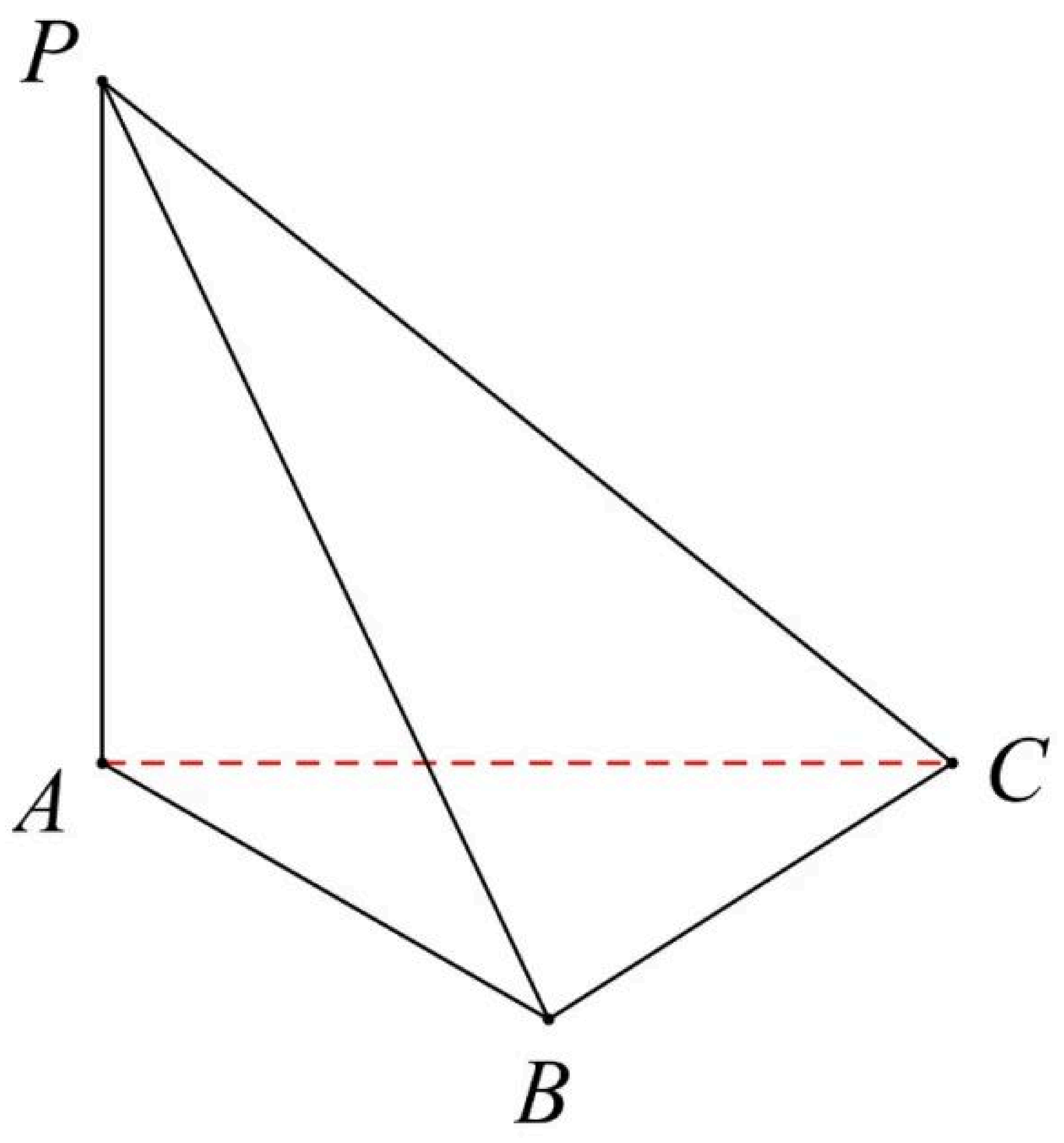


【2022 湖北高一期末】

《九章算术》是中国古代的一部数学专著，是《算经十书》中最重要的一部，是当时世界上最简练有效的应用数学，它的出现标志着中国古代数学形成了完整的体系．《九章算术》中将由四个直角三角形组成的四面体称为“鳖臑”，已知在四面体 P-ABC 中，PA⊥平面 ABC，平面 PAB⊥平面 PBC．

（1）求证四面体 P-ABC 为“鳖臑”；

（2）若 PA=2，∠BAC=45°，当二面角 A-PC-B 的平面角为 $\frac{\pi}{3}$ 时，求 AB 的长度．



17．（本题 14 分）

已知函数 $f(x)=\sin\omega x\cos\varphi+\cos\omega x\sin\varphi,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}$.

（I）若 $f(0)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，求 φ 的值；

（II）若 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$ 上单调递增，且 $f(\frac{2\pi}{3})=1$，再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知，求 ω、φ 的值．

条件①：$f(\frac{\pi}{3})=1$；

条件②：$f(-\frac{\pi}{3})=-1$；

条件③：$f(x)$ 在 $\left[-\frac{4\pi}{3},-\frac{\pi}{3}\right]$ 上单调递减.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

【解析】

$f(x)=\sin\omega x\cos\varphi+\cos\omega x\sin\varphi=\sin(\omega x+\varphi)$.

（I）若 $f(0)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，即 $f(0)=\sin\varphi=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，

又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，可得 $\varphi=-\frac{\pi}{3}$.

（II）若选条件①：$f(\frac{\pi}{3})=1$，

考虑到 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$ 上单调递增，且 $f(\frac{2\pi}{3})=1$，

显然与已知矛盾，故不能选择条件①。

若选条件②： $f(-\frac{\pi}{3})=-1$，

则 $\frac{T}{2}=\frac{2\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\pi$，即 $T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi$，得 $\omega=1$，

即 $f(x)=\sin(x+\varphi)$，又 $f(\frac{2\pi}{3})=1$，可得 $\frac{2\pi}{3}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi$，

解得 $\varphi=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$，又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，可得 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$，$f(x)=\sin(x-\frac{\pi}{6})$.

检验一下 $\omega=1$，$\varphi=-\frac{\pi}{6}$ 符合题意。

若选择条件③： $f(x)$ 在 $\left[-\frac{4\pi}{3},-\frac{\pi}{3}\right]$ 上单调递减.

因为 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$ 上单调递增，且 $f(\frac{2\pi}{3})=1$，

可得 $f(-\frac{\pi}{3})=-1$，又回到了条件②，下略。

18. 为了研究某种农产品价格变化的规律，收集到了该农产品连续 40 天的价格变化数据，如下表所示，在描述价格变化时，用“+”表示“上涨”；即当天价格比前一天价格高，用“—”表示“下跌”，即当天价格比前一天价格低；用“0”表示“不变”，即当天价格与前一天价格相同.

时段	价格变化																			
第 1 天到第 20 天	—	+	+	0	—	—	—	+	+	0	+	0	—	—	+	—	+	0	0	+
第 21 天到第 40 天	0	+	+	0	—	—	—	+	+	0	+	0	+	—	—	—	+	0	—	+

时段	价格变化														
第 1 天到第 20 天	—	+	+	0	—	—	—	+	+	0	+	0	—	—	+
第 21 天到第 40 天	0	+	+	0	—	—	—	+	+	0	+	0	+	—	—

用频率估计概率.

（I）试估计该农产品“上涨”的概率；

（II）假设该农产品每天的价格变化是相互独立的，在未来的日子里任取 4 天，试估计该农产品价格在这 4 天中 2 天“上涨”、1 天“下跌”、1 天“不变”的概率；

（III）假设该农产品每天的价格变化只受前一天价格的影响，判断第 41 天该农产品价格“上涨”、“下跌”和“不变”的概率估计值哪个最大.（结论不要求证明）

【解析】

回忆版，可能会和原题有出入，拿到正版真题再来解析。

19. 椭圆 E：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，离心率 $e=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，点 A、C 分别为 E 的上、下顶点，点 B、D 分别为 E 的左、右顶点，$|AC|=4$.

（1）求椭圆 E 的解析式；

（2）点 P 为第一象限内椭圆上的一个动点，直线 PD 与 BC 交于点 M，直线 PA 与直线 $y=-2$ 交于点 N，**求证：MN∥CD.**

【解析】

(1)依题意：$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，$b=2$，则 $e^2=\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{a^2-b^2}{a^2}=\dfrac{a^2-4}{a^2}=\dfrac{5}{9}$，

解得 $a^2=9$，解析式为 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$。

直接设含参系数计算也可以。

（2）设点或者设线均可。

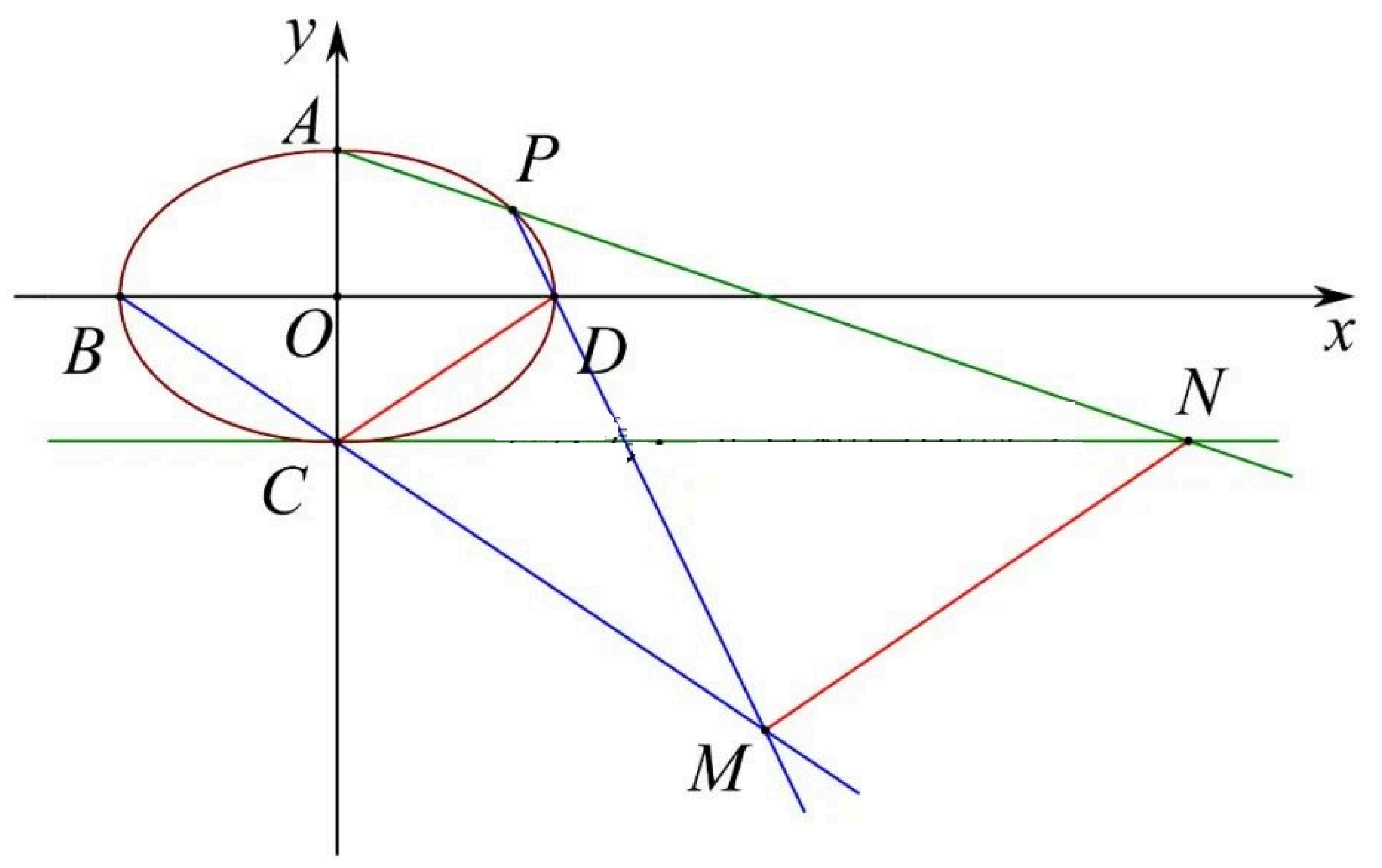
方法一：设点

设 $P(m,n)$，则 $4m^2+9n^2=36$.

由 $P(m,n)$，$D(3,0)$，可得直线 PD：$y=\dfrac{n}{m-3}(x-3)$，

由 $B(-3,0)$，$C(0,-2)$，可得直线 BC：$y=-\dfrac{2}{3}x-2$.

联立可得 $M(\dfrac{3(-2m+3n+6)}{3n+2m-6},\dfrac{-12n}{3n+2m-6})$.



由 $A(0,2)$，$P(m,n)$，可得直线 AP：$y=\dfrac{n-2}{m}x+2$，

与直线 $y=-2$ 联立，可得 $N(\dfrac{4m}{2-n},-2)$.

可得直线 MN 斜率为：

$$k=\frac{\dfrac{-12n}{3n+2m-6}+2}{\dfrac{3(-2m+3n+6)}{3n+2m-6}-\dfrac{4m}{2-n}}=\frac{6n^2-4mn+8m-24}{-9n^2-8m^2-6mn+12m},$$

代入 $4m^2=36-9n^2$，可得 $k=\dfrac{6n^2-4mn+8m-24}{-36+9n^2-6mn+12m}=\dfrac{2}{3}$，

而直线 CD 的斜率为 $k=\dfrac{2}{3}$，于是可得 MN∥CD.

方法二：设线

设直线 DP 为 $y=k(x-3)$，直线 BC 解析式为：$y=-\dfrac{2}{3}x-2$，

二者联立可得 $x_M=\dfrac{9k-6}{3k+2}$，代入直线 BC 可得 $y_M=\dfrac{-12k}{3k+2}$，

即点 $M(\dfrac{9k-6}{3k+2},\dfrac{-12k}{3k+2})$.

直线 DP 解析式与椭圆解析式联立，

可得 $(4+9k^2)x^2-54k^2x+81k^2-36=0$，

韦达定理可得 $x_1x_2=\dfrac{81k^2-36}{4+9k^2}=3x_P$，解得 $x_P=\dfrac{27k^2-12}{4+9k^2}$，

代入直线 DP 可得 $y_P=\dfrac{-24k}{4+9k^2}$，即 $P(\dfrac{27k^2-12}{4+9k^2},\dfrac{-24k}{4+9k^2})$。

直线 AP 斜率为：

$$k=\frac{\dfrac{-24k}{4+9k^2}-2}{\dfrac{27k^2-12}{4+9k^2}}=\frac{-24k-8-18k^2}{27k^2-12}=\frac{-2(3k+2)^2}{3(3k+2)(3k-2)}=\frac{-2(3k+2)}{3(3k-2)},$$

【这里因式分解，简化了直线 AP 的斜率】

可得直线 AP 的解析式为：$y=\dfrac{-2(3k+2)}{3(3k-2)}x+2$，

联立直线 $y=-2$ 联立，可得 $N(\dfrac{18k-12}{3k+2},-2)$.

由 $M(\dfrac{9k-6}{3k+2},\dfrac{-12k}{3k+2})$，$N(\dfrac{18k-12}{3k+2},-2)$，可得直线 MN 的斜率为：

$$k=\frac{\dfrac{-12k}{3k+2}+2}{\dfrac{9k-6}{3k+2}-\dfrac{18k-12}{3k+2}}=\frac{-6k+4}{-9k+6}=\frac{2}{3},$$

直线 CD 的斜率为 $k=\dfrac{2}{3}$，于是可得 MN // CD.

方法三：反设直线

设直线 PD：$x=ty+3$，

直线 BC 解析式为：$y=-\dfrac{2}{3}x-2$，

二者联立，$x_M=\dfrac{-6t+9}{3+2t}$，$y_M=\dfrac{-12}{3+2t}$，$M(\dfrac{-6t+9}{3+2t},\dfrac{-12}{3+2t})$。

直线 PD：$x=ty+3$，与椭圆解析式联立，可得 $(4t^2+9)y^2+24ty=0$，

可得 $y_P=\dfrac{-24t}{4t^2+9}$，代入 PD 解析式可得 $x_P=\dfrac{-12t^2+27}{4t^2+9}$。

直线 AP 斜率为：

$$k=\frac{\dfrac{-24t}{4t^2+9}-2}{\dfrac{-12t^2+27}{4t^2+9}}=\frac{8t^2+24t+18}{12t^2-27}=\frac{2(2t+3)^2}{3(2t+3)(2t-3)}=\frac{2(2t+3)}{3(2t-3)},$$

直线 AP 解析式为：$y=\dfrac{2(2t+3)}{3(2t-3)}x+2$，

联立直线 $y=-2$ 联立，可得 $N(\dfrac{-12t+18}{2t+3},-2)$.

由 $M(\dfrac{-6t+9}{3+2t},\dfrac{-12}{3+2t})$，$N(\dfrac{-12t+18}{2t+3},-2)$ 可得直线 MN 的斜率为：

$$k=\frac{\dfrac{-12}{3+2t}+2}{\dfrac{-6t+9}{3+2t}-\dfrac{-12t+18}{2t+3}}=\frac{-12+6+4t}{-6t+9+12t-18}=\frac{4t-6}{6t-9}=\frac{2}{3},$$

直线 CD 的斜率为 $k=\dfrac{2}{3}$，于是可得 MN // CD.

【反思】

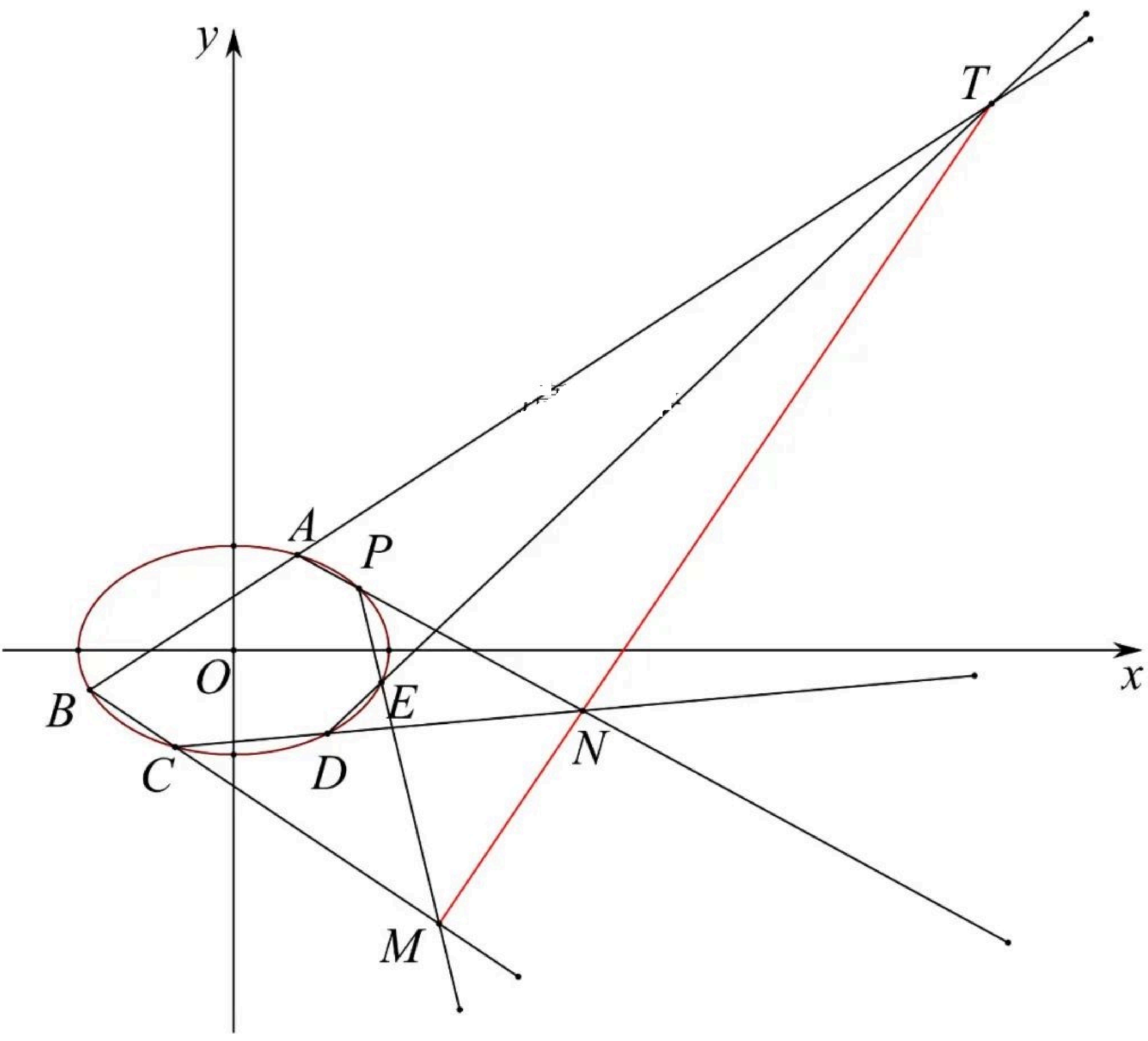
1. 本题重点考察“数学运算”，如何运算都知道，能否运算正确是关键；并不侧重于“解析”，而在于“算准”。考察“数学运算”，注重运算的严谨性，是这两年北京高考解析几何的显著特征。

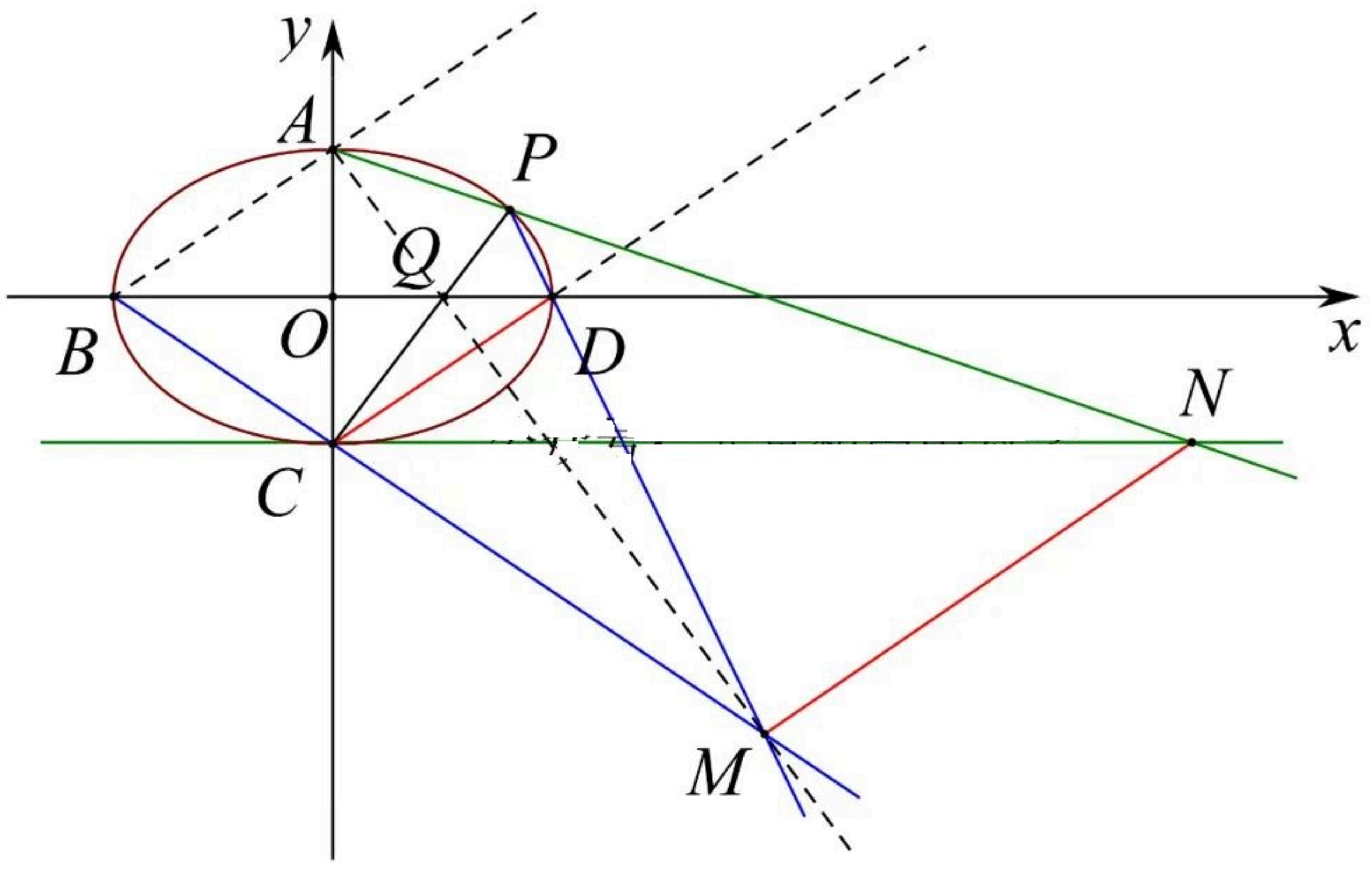
2. 在具体计算上，“设点”或者“设线”并没有明显的差别，“设点”可能更容易想到。

3. 本题在本质上是“帕斯卡定理”的特殊形态。

帕斯卡定理，约于公元 1639 年为法国数学家布莱士·帕斯卡(Blaise Pascal)所发现，指圆锥曲线内接六边形（包括退化的六边形）其三对边的交点共线，是射影几何中的一个重要定理。

定理的一般形式如下图所示，北京高考这道题，是定理的一种特殊的退化形式。事实上，不知道这个定理也不影响正确运算。





20. 函数 $f(x)=x-x^3e^{ax+b}$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=-x+1$.

（I）求 a，b 的值；

（II）设 $g(x)=f'(x)$，求 $g(x)$ 的单调区间；

（III）求 $f(x)$ 的极值点的个数.

【解析】

（I） $f'(x)=1-(3x^2e^{ax+b}+ax^3e^{ax+b})$，

函数 $f(x)=x-x^3e^{ax+b}$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=-x+1$，

可得切点为 $(1,0)$。

可得：

$f(1)=0$，即 $1-e^{a+b}=0$，解得 $e^{a+b}=1$。

$f'(1)=-1$，即 $1-(3e^{a+b}+ae^{a+b})=-1$，即 $1-3-a=-1$，

解得 $a=-1$，$b=1$。

（II）函数 $f(x)=x-x^3e^{-x+1}$， $f'(x)=1+e^{-x+1}(x^3-3x^2)$，

则 $g(x)=1+e^{-x+1}(x^3-3x^2)$，

$$g'(x)=-e^{-x+1}(x^3-3x^2)+e^{-x+1}(3x^2-6x)$$

$$=-e^{-x+1}(x^3-6x^2+6x)=-xe^{-x+1}(x^2-6x+6),$$

令 $g'(x)=0$，解得 $x_1=0$， $x_2=3-\sqrt{3}$， $x_3=3+\sqrt{3}$.

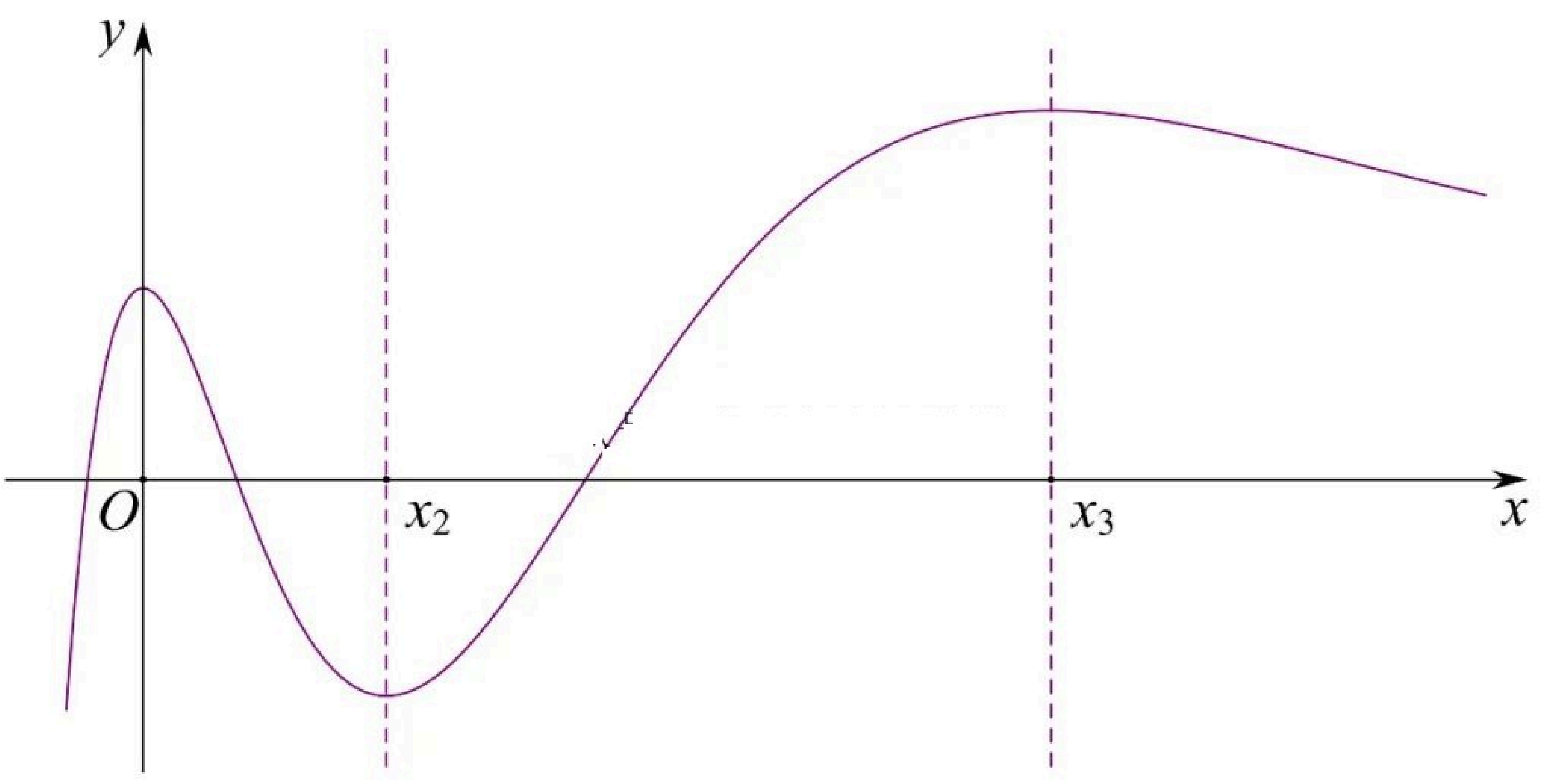
随着 x 变化， $g'(x)$， $g(x)$ 的变化情况如下：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,3-\sqrt{3})$	$3-\sqrt{3}$	$(3-\sqrt{3},3+\sqrt{3})$	$3+\sqrt{3}$	$(3+\sqrt{3},+\infty)$
$g'(x)$	+	0	−	0	+	0	−
$g(x)$	↗	1	↘	极小值	↗	极大值	↘

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,3-\sqrt{3})$	$3-\sqrt{3}$	$(3-\sqrt{3},3+\sqrt{3})$	$3+\sqrt{3}$	$(3+\sqrt{3},+\infty)$
$g'(x)$	+	0	−	0	+	0	−
$g(x)$	↗	1	↘	极小值	↗	极大值	↘

综上可得， $g(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,0)$， $(3-\sqrt{3},3+\sqrt{3})$；

单调递减区间为 $(0,3-\sqrt{3})$， $(3+\sqrt{3},+\infty)$。



（III）求 $f(x)$ 的极值点的个数.

重点分析 $g(x)=f'(x)$ 的变号零点。

①在 $(-\infty,0)$ 上 $f'(x)$ 单调递增， $f'(0)=1>0$， $f'(-1)=-4e^2+1<0$，

因此在 $(-\infty,0)$ 上 $f'(x)$ 有且仅有一个变号零点，

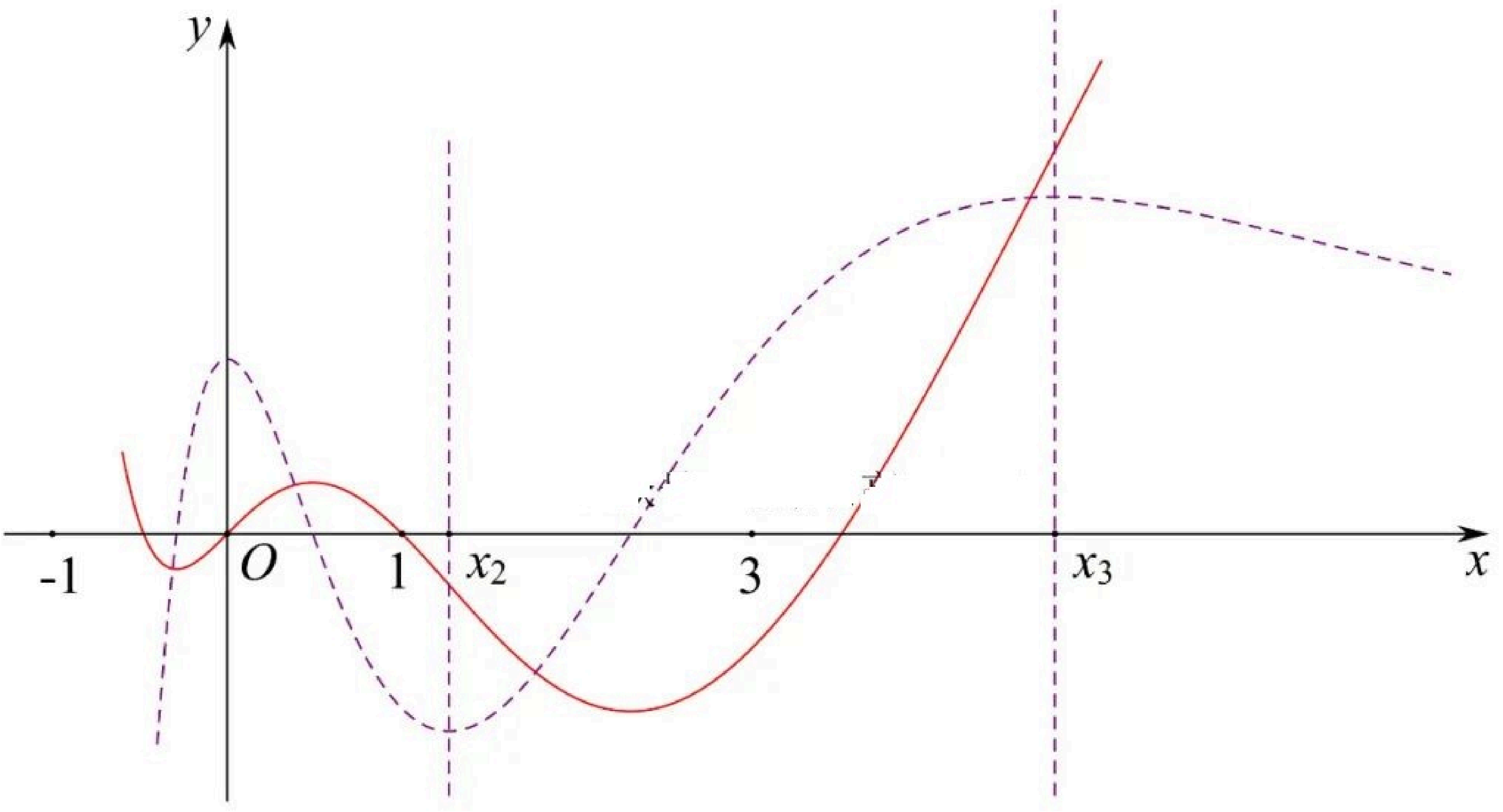
因此 $f(x)$ 有且仅有一个极小值。

②在 $(0,3-\sqrt{3})$ $f'(x)$ 单调递减， $f'(0)=1>0$， $1\in(0,3-\sqrt{3})$，

且 $f'(1)=-2+1=-1<0$，

因此在 $(0,3-\sqrt{3})$ 上 $f'(x)$ 有且仅有一个变号零点，

因此 $f(x)$ 有且仅有一个极大值。



③在 $(3-\sqrt{3},3+\sqrt{3})$ 上 $f'(x)$ 单调递增，

$g(3-\sqrt{3})<g(1)<0$，即 $f'(3-\sqrt{3})<0$，

又 $3\in(0,3-\sqrt{3})$ 且 $f'(3)=1>0$，

因此在 $(3-\sqrt{3},3+\sqrt{3})$ 上 $f'(x)$ 有且仅有一个变号零点，

因此 $f(x)$ 有且仅有一个极小值。

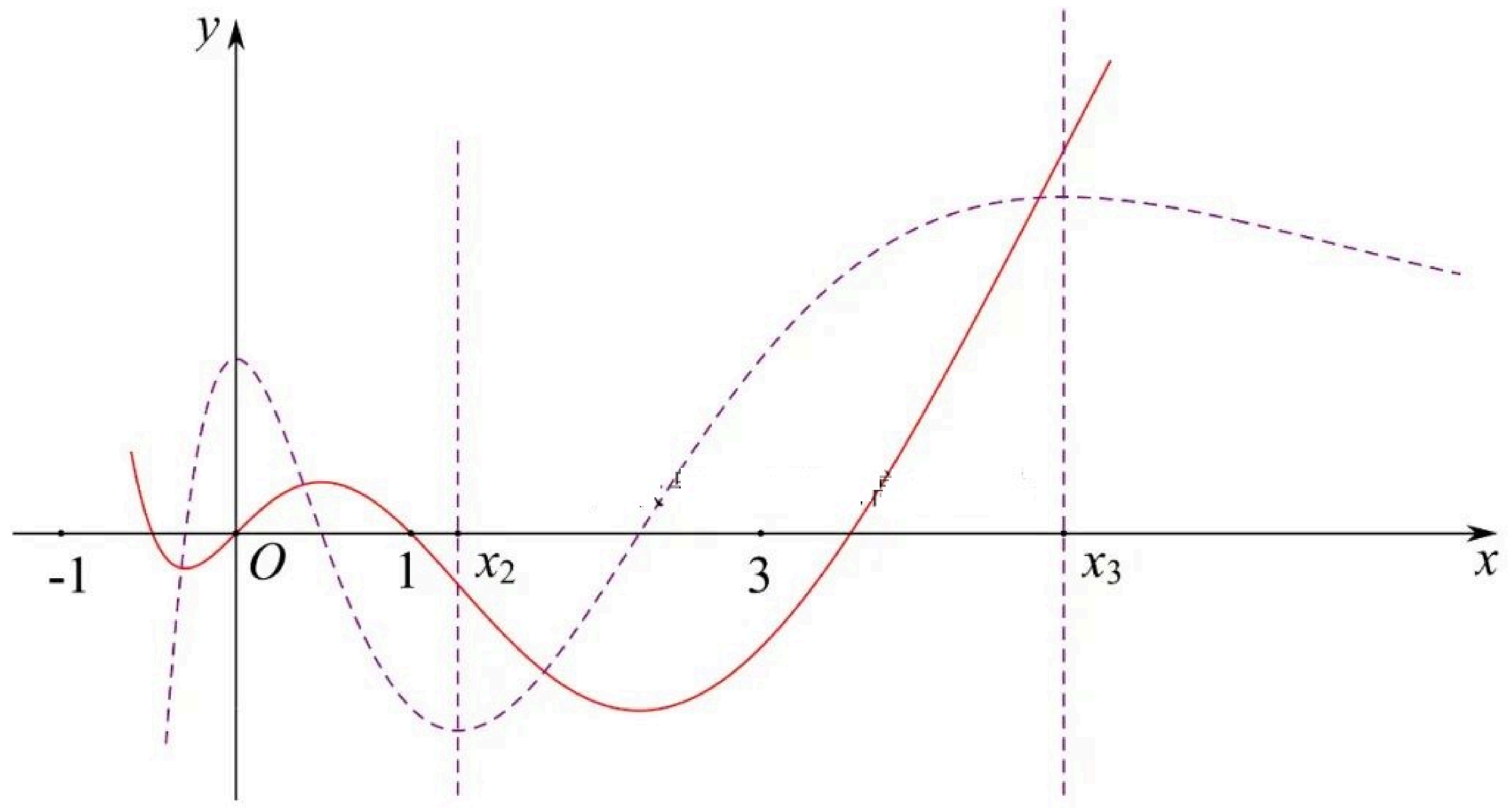
④在 $(3+\sqrt{3},+\infty)$ 上 $f'(x)$ 单调递减，

当 $x>3$ 时，$g(x)=1+e^{-x+1}(x^3-3x^2)=1+x^2e^{-x+1}(x-3)>0$，

即 $f'(x)>0$，在 $(3-\sqrt{3},3+\sqrt{3})$ 上 $f'(x)$ 不存在变号零点，

因此 $f(x)$ 没有极大值和极小值。

综上可得，$f(x)$ 有一个极大值和两个极小值，即 $f(x)$ 有 3 个极值点。



【反思】

1.（1）对于基础不牢的考生，可能第一步，复合函数求导就止步不前了，对于这部分考生，希望只拿第一问的分数就不太可能了。今年各城区的模拟试题中，对数函数和对数函数的复合函数求导类型，都出现过。

2.（2）求解函数的单调区间是导数的重要应用，如果能够正确求导，单调区间的确定就显得非常容易了。

3.（3）确定极值点的个数与（2）紧密相连，是在（2）的基础上进行的，而且本题的"卡点"判断函数值的正负，难度不大，所找的点都是非常特殊、方便计算的点。（3）属于分类讨论，如果考生做到这里，还能沉着冷静按照区间、分步骤进行分析，难度也不算大。

21.（本题 15 分）

数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 是两个 m 项有穷数列，且 $\forall a_i,b_i\in\{1,2,\cdots,m\}$，$i\in\{1,2,\cdots,m\}$. 记 A_n，B_n 分别为数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的前 n 项和，且 $A_0=B_0=0$. 另记 $r_k=\max\{i\,|\,B_i\le A_k,k\in\{0,1,\cdots,m\}\}$.

（I）若 $a_1=2$，$a_2=1$，$a_3=3$；$b_1=1$，$b_2=3$，$b_3=3$，求 r_0，r_1，r_2，r_3 的值；

（II）若 $a_1\ge b_1$，且 $2r_i\le r_{i-1}+r_{i+1}$，求 r_n；

（III）证明：存在 $0\le p<q\le m$，$0\le r<s\le m$，使得 $A_p+B_s=A_q+B_r$.

【解析】

题干部分重点是理解 $r_k=\max\left\{i\middle|B_i\le A_k,k\in\{0,1,\cdots,m\}\right\}$，是对比两组数列前 n 项和，符合条件的下标。

（I）列表如下，对比可知 $r_0=0$，$r_1=1$，$r_2=2$，$r_3=3$。

i	0	1	2	3
a_i		2	1	3
A_i	0	2	3	6
b_i		1	3	3
B_i	0	1	4	7
r_k	0	1	1	2

（II）若 $a_1\ge b_1$，且 $2r_1\le r_{i-1}+r_{i+1}$，求 r_n；

$A_0=B_0=0$，可得 $r_0=0$；

因为 $a_1\ge b_1$，所以 $A_1=a_1\ge B_1=b_1$，因此 $r_1=1$，则有 $r_1-r_0\ge 1$，

又 $2r_1\le r_{i-1}+r_{i+1}$，可得 $r_i-r_{i-1}\le r_{i+1}-r_i$，

即 $1\le r_1-r_0\le\cdots\le r_i-r_{i-1}\le r_{i+1}-r_i$，

则 $r_m=r_m-r_{m-1}+r_{m-1}-r_{m-2}+\cdots+r_1-r_0\ge 1+1+\cdots+1=m$，

又 $r_k=\max\left\{i\middle|B_i\le A_k,k\in\{0,1,\cdots,m\}\right\}$，且 $\{B_i\}$ 共有 n 项，

则 $r_m=m$，得 $r_{i+1}-r_i=r_i-r_{i-1}=\cdots=r_1-r_0=1$，则 $r_n=n$。

（III）证明：存在 $0\le p<q\le m$，$0\le s<t\le m$，

使得 $A_p+B_t=A_q+B_s$.

要证：$A_p+B_s=A_q+B_t$，即证：$A_p-A_q=B_t-B_s$.

若 $B_m=A_m$，则取 $p=s=0$，$q=t=m$ 即可.

若 $B_m\ne A_m$，不妨设 $B_m>A_m$，则有 $r_k<m\left(k=0,1,2,\cdots,m\right)$，

又 $0\le A_k-B_k<m$，

否则 $A_k-B_{r_k+1}=A_k-B_{r_k}-b_{r_k+1}\ge m-b_{r_k+1}\ge 0$，这与 r_k 的定义矛盾.

考虑到 $A_k-B_{r_k+1}$，共有 $m+1$ 个数，且值只能从 m 个数中取得，

由抽屉原理，必有相等的两个数存在，设其对应的下标为 $p,q(p<q)$.

由于 r_k 是关于 k 单调递增，则 $r_p\le r_q$.

又因为 $A_p<A_q$，有 $r_p<r_q$.

记 $s=r_p$，$t=r_q$，

有 $A_p-B_s=A_q-B_t$，

即 $A_p+B_t=A_q+B_s$.

【反思】

对于很多考生而言，21 题的备考策略基本上就是：

第一问必做，第二问选做，第三问不做。

第三问的抽屉原理，是创新试题的重要方法之一，典型的题目如 2018 年北京高考真题。