考号________ 姓名________ 班级________ 学校________

密封线内不要答题

2024届高三考试
数学试题(理科)

考生注意：

1. 本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分，共150分。考试时间120分钟。
2. 请将各题答案填写在答题卡上。
3. 本试卷主要考试内容：高考全部内容。

第Ⅰ卷

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知全集 $U=\{-2,-1,0,1,2\}$，集合 $A=\{-1,1,2\}$，$B=\{-2,1\}$，则 $A\cap(\complement_U B)=$

A. $\{2\}$　　B. $\{-2\}$　　C. $\{-1,2\}$　　D. $\{-1,0,2\}$

2. 已知复数 z 满足 $(1-3i)z=7-i$，则 $z=$

A. $1+2i$　　B. $1-2i$　　C. $-1+2i$　　D. $-1-2i$

3. 已知函数 $f(x)=\sin(2x+\frac{3\pi}{10})$，则下列说法正确的是

A. $f(x)$的图象关于直线 $x=\frac{3\pi}{10}$ 对称

B. $f(x)$的图象关于点$(\frac{\pi}{4},0)$对称

C. $f(x)$的最小正周期为$\frac{\pi}{2}$

D. 若将 $f(x)$图象上所有点的横坐标伸长到原来的2倍，纵坐标不变，可得函数 $y=\sin(x+\frac{3\pi}{10})$的图象

4. 已知△ABC的每条边长均为2，D，E分别是BC，AC的中点，则$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DE}=$

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. $\frac{3}{2}$　　D. 3

5. 曲线 $y=\frac{x}{x-3}$ 在点$(2,-2)$处的切线方程为

A. $y=-3x+4$　　B. $y=x-4$　　C. $y=3x-8$　　D. $y=3x-4$

6. 设椭圆 $C_1:\frac{x^2}{5}+y^2=1$，$C_2:\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{b^2}=1(0<b<3)$的离心率分别为 e_1，e_2，若 $e_2=\frac{5}{6}e_1$，则 $b=$

A. 1　　B. 2　　C. $\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{3}$

7. 已知函数 $f(x)=3^{x(2x-a)}$ 在区间$(-\infty,1)$上单调递减，则 a 的最小值为

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

8. △ABC的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知 $b\cos C-c\cos B=a$，且 $A=2C$，则 $C=$

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{4}$　　C. $\frac{\pi}{8}$　　D. $\frac{\pi}{3}$

9. 已知某圆柱的轴截面是边长为2的正方形$ABCD$，在该圆柱的底面内任取一点E，则当四棱锥$E-ABCD$的体积最大时，该四棱锥的侧面积为

A. $1+\sqrt{2}+\sqrt{5}$　　B. $1+2\sqrt{2}+\sqrt{5}$　　C. $1+\sqrt{2}+2\sqrt{5}$　　D. $\sqrt{2}+2\sqrt{5}$

10. 甲、乙两个家庭周末到附近景区游玩，其中甲家庭有2个大人和2个小孩，乙家庭有2个大人和3个小孩，他们9人在景区门口站成一排照相，要求每个家庭的成员要站在一起，且同一家庭的大人不能相邻，则所有不同站法的种数为

A. 144　　B. 864　　C. 1728　　D. 2880

11. 第19届亚运会将于2023年9月23日至10月8日在杭州举行，某网络直播平台调研"大学生是否喜欢观看体育比赛直播与性别有关"，从某高校男、女生中各随机抽取100人进行问卷调查，得到如下数据($5\leqslant m\leqslant15$，$m\in\mathbf{N}$).

	喜欢观看	不喜欢观看
男生	$80-m$	$20+m$
女生	$50+m$	$50-m$

通过计算，有95%以上的把握认为大学生喜欢观看直播体育比赛与性别有关，则在被调查的100名女生中喜欢观看体育比赛直播的人数的最大值为

附：$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

$P(K^2\geqslant k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.010	0.001
k_0	2.072	2.706	3.841	6.635	10.828

A. 55　　B. 57　　C. 58　　D. 60

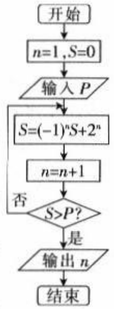
12. 已知 F_1，F_2 分别是双曲线 $\Gamma:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点，过 F_1 的直线分别交双曲线左、右两支于A，B两点，点C在x轴上，$\overrightarrow{CB}=4\overrightarrow{F_2A}$，$BF_2$平分$\angle F_1BC$，则双曲线$\Gamma$的渐近线方程为

A. $y=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}x$　　B. $y=\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}x$　　C. $y=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}x$　　D. $y=\pm\frac{2\sqrt{6}}{3}x$

第Ⅱ卷

二、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分. 把答案填在答题卡中的横线上.

13. 若 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y\geqslant-1,\\ \frac{x}{3}-y\leqslant1,\\ x+y\leqslant-1,\end{cases}$ 则 $z=2x-y$ 的最小值为___▲___.



14. 执行如图所示的程序框图，若输出的 $n=5$，则输入的正整数 P 的最小值为___▲___，最大值为___▲___.(本题第一空3分，第二空2分)

15. 黄金比又称黄金律，是指事物各部分间一定的数学比例关系，即将整体一分为二，较小部分与较大部分之比等于较大部分与整体之比，其比值为$\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx0.618$，上述比例又被称为黄金分割. 将底和腰之比等于$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$的等腰三角形称为黄金三角形，若某黄金三角形的一个底角为C，则 $\cos 2C=$___▲___.

16. 已知正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 内接于半径为2的球，则该正三棱柱体积的最大值为___▲___.

三、解答题：共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答．

（一）必考题：共 60 分．

17.（12 分）

已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=3$，$na_{n+1}=3(n+1)a_n$．

（1）证明：$\{\frac{a_n}{n}\}$是等比数列．

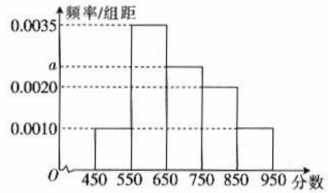
（2）设 $b_n=\frac{n^2}{a_n}$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 T_n．

18.（12 分）

人工智能（AI）是当今科技领域最热门的话题之一，某学校组织学生参加以人工智能（AI）为主题的知识竞赛，为了解该校学生在该知识竞赛中的情况，现采用随机抽样的方法抽取了 600 名学生进行调查，分数分布在 450～950 分之间，根据调查的结果绘制的学生分数频率分布直方图如图所示．将分数不低于 850 分的学生称为“最佳选手”．

（1）求频率分布直方图中 a 的值，并估计该校学生分数的中位数；

（2）现采用分层抽样的方法从分数落在$[650,750)$，$[850,950]$内的两组学生中抽取 7 人，再从这 7 人中随机抽取 3 人，记被抽取的 3 名学生中属于“最佳选手”的学生人数为随机变量 X，求 X 的分布列及数学期望．

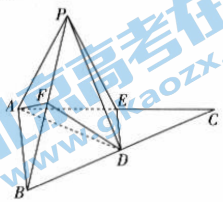


19.（12 分）

将$\triangle ABC$沿它的中位线 DE 折起，使顶点 C 到达点 P 的位置，使得 $PA=PE$，得到如图所示的四棱锥 $P-ABDE$，且 $AC=\sqrt{2}AB=2$，$AC\perp AB$，F 为 PB 的中点．

（1）证明：平面 $PAE\perp$平面 $ABDE$．

（2）求直线 PA 与平面 ADF 所成角的正弦值．



20.（12 分）

设函数 $f(x)=a^x+(1-a)x-1(a>0$ 且 $a\neq1)$．

（1）当 $a=\mathrm{e}$ 时，求 $f(x)$的单调区间；

（2）设 $a>1$，证明：当 $x\in(0,1)$时，$f(x)<0$．

21.（12 分）

已知抛物线 C_1 的方程为 $y^2=8x$．

（1）若 M 是 C_1 上的一点，点 N 在 C_1 的准线 l 上，C_1 的焦点为 F，且 $FM\perp FN$，$|MF|=10$，求$|NF|$；

（2）设 $P(x_0,y_0)(x_0\neq m\pm r,y_0\neq\pm m)$为圆 $C_2:(x-m)^2+y^2=r^2$ 外一点，过 P 作 C_2 的两条切线，分别与 C_1 相交于点 A,B 和 C,D，证明：当 P 在定直线 $x=t$ 上运动时，A,B,C,D 四点的纵坐标乘积为定值的充要条件为 $m^2=t^2+r^2(r\neq0)$．

（二）选考题：共 10 分．请考生在第 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分．

22.［选修 4－4：坐标系与参数方程］（10 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为$\begin{cases}x=1+3\cos\alpha,\\y=-2+3\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为参数），直线 C_2 的方程为 $y=\sqrt{3}x$，以 O 为极点，以 x 轴非负半轴为极轴建立极坐标系．

（1）求曲线 C_1 和直线 C_2 的极坐标方程；

（2）若直线 C_2 与曲线 C_1 交于 M,N 两点，求$|OM|\cdot|ON|$的值．

23.［选修 4－5：不等式选讲］（10 分）

已知函数 $f(x)=|x+2|-|x-1|$．

（1）求不等式 $f(x)>|x-1|-3$ 的解集；

（2）若存在 $x\in\mathbf{R}$，使得 $f(x)\geq|1-m|$成立，求 m 的取值范围．

2024 届高三考试

数学试题参考答案(理科)

1. C　因为$\complement_U B=\{-1,0,2\}$，$A=\{-1,1,2\}$，所以$A\cap(\complement_U B)=\{-1,2\}$.

2. A　$z=\dfrac{7-\mathrm{i}}{1-3\mathrm{i}}=\dfrac{(7-\mathrm{i})(1+3\mathrm{i})}{10}=\dfrac{10+20\mathrm{i}}{10}=1+2\mathrm{i}$.

3. D　因为$f(x)=\sin(2x+\dfrac{3\pi}{10})$，所以$f(\dfrac{3\pi}{10})=\sin(2\times\dfrac{3\pi}{10}+\dfrac{3\pi}{10})\neq\pm1$，$f(\dfrac{\pi}{4})=\sin(2\times\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{3\pi}{10})\neq0$，A 错误，B 错误. 显然$f(x)$的最小正周期为$\pi$，C 错误. 将$f(x)$图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍，纵坐标不变，可得函数$y=\sin(x+\dfrac{3\pi}{10})$的图象，D 正确.

4. C　因为DE是$\triangle ABC$的中位线，所以$DE/\!/AB$，$DE=\dfrac{1}{2}AB=1$，$\angle ADE=\angle BAD=\dfrac{\pi}{6}$. 又$AD=\sqrt{3}$，所以$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DE}=\sqrt{3}\times1\times\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{3}{2}$.

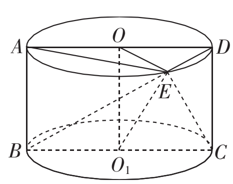
5. A　因为$y'=-\dfrac{3}{(x-3)^2}$，所以所求切线的斜率$k=-\dfrac{3}{(2-3)^2}=-3$，故该切线的方程为$y=-3x+4$.

6. B　因为$e_2=\dfrac{5}{6}e_1$，所以$\sqrt{1-\dfrac{b^2}{9}}=\dfrac{5}{6}\times\sqrt{1-\dfrac{1}{5}}$，解得$b=2$.

7. D　令$u=x(2x-a)$，因为$y=3^u$是增函数，所以$u=x(2x-a)$在区间$(-\infty,1)$上单调递减，所以$\dfrac{a}{4}\geqslant1$，解得$a\geqslant4$.

8. A　因为$b\cos C-c\cos B=a$，所以$\sin B\cos C-\cos B\sin C=\sin A$，整理得$\sin B\cos C-\cos B\sin C=\sin B\cos C+\cos B\sin C$，所以$\cos B\sin C=0$. 因为$\sin C>0$，所以$\cos B=0$. 又$B\in(0,\pi)$，所以$B=\dfrac{\pi}{2}$，从而$A+C=\dfrac{\pi}{2}$. 又$A=2C$，所以$C=\dfrac{\pi}{6}$.

9. B　四棱锥体积$V_{E-ABCD}=\dfrac{1}{3}S_{ABCD}\cdot d$，其中$d$为$E$到$AD$的距离，因为正方形$ABCD$的面积为定值，所以当$E$为$\overset{\frown}{AD}$的中点时，四棱锥的体积最大，连接$OE$，$O_1E$，此时其侧面积$S=\dfrac{1}{2}AD\cdot OE+\dfrac{1}{2}AB\cdot AE+\dfrac{1}{2}CD\cdot DE+\dfrac{1}{2}BC\cdot O_1E=1+2\sqrt{2}+\sqrt{5}$.



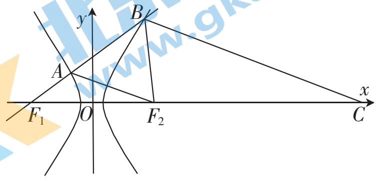
10. C　甲家庭的站法有$A_2^2A_3^2=12$种，乙家庭的站法有$A_3^3A_4^2=72$种，最后将两个家庭的整体全排列，有$A_2^2=2$种站法，则所有不同站法的种数为$12\times72\times2=1728$.

11. C　因为$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\dfrac{200[(80-m)(50-m)-(20+m)(50+m)]^2}{100\times100\times130\times70}$

$=\frac{8(15-m)^2}{91}\geqslant 3.841$，所以$(15-m)^2\geqslant 43.7$，又 $5\leqslant m\leqslant 15$，所以 $15-m\geqslant 7$，解得 $m\leqslant 8$，

故在被调查的 100 名女生中喜欢观看体育比赛直播的人数的最大值为 58.

12. D　因为$\overrightarrow{CB}=4\overrightarrow{F_2A}$，所以$\triangle F_1AF_2\backsim\triangle F_1BC$. 设$|F_1F_2|=2c$，则$|F_2C|=6c$，设$|AF_1|=t$，则$|BF_1|=4t$，$|AB|=3t$. 因为 BF_2 平分$\angle F_1BC$，由角平分线定理可知，$\frac{|BF_1|}{|BC|}=\frac{|F_1F_2|}{|F_2C|}=\frac{2c}{6c}=\frac{1}{3}$，所以$|BC|=3|BF_1|=12t$，所以$|AF_2|=\frac{1}{4}|BC|=3t$. 由双曲线定义知$|AF_2|-|AF_1|=2a$，即 $3t-t=2a$，解得 $t=a$. 又由$|BF_1|-|BF_2|=2a$，得$|BF_2|=4t-2a=2t=2a$，所以$|AB|=|AF_2|=3a$，即$\triangle ABF_2$ 是等腰三角形. 由余弦定理知 $\cos\angle F_1BF_2=\frac{|BF_1|^2+|BF_2|^2-|F_1F_2|^2}{2|BF_1||BF_2|}=\frac{|BA|^2+|BF_2|^2-|AF_2|^2}{2|AB||BF_2|}$，即$\frac{16a^2+4a^2-4c^2}{16a^2}=\frac{1}{3}$，化简得 $11a^2=3c^2$，所以 $8a^2=3b^2$，则双曲线 Γ 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{2\sqrt{6}}{3}x$.



13. -4　画出可行域(图略)知，当直线 $z=2x-y$ 过点$(-3,-2)$时，z 取得最小值-4.

14. 6;17　执行程序框图，

$n=1,S=0,S=-S+2^1=2,n=2$，满足 $2\leqslant P$；

$S=(-1)^2S+2^2=6,n=3$，满足 $6\leqslant P$；

$S=(-1)^3S+2^3=2,n=4$，满足 $2\leqslant P$；

$S=(-1)^4S+2^4=18,n=5$，满足 $18>P$.

所以 $6\leqslant P\leqslant 17$，$P\in\mathbf{N}^*$，所以正整数 P 的最小值和最大值分别为 6 和 17.

15. $-\frac{\sqrt{5}+1}{4}$　设这个黄金三角形的另一个底角为 B，顶角为 A，因为$\frac{BC}{AC}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，所以 $\cos C=\frac{BC}{2AC}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$，则 $\cos 2C=2\cos^2C-1=-\frac{\sqrt{5}+1}{4}$.

16. 8　设$\triangle ABC$ 的外接圆半径为 r，边长为 a，正三棱柱的高为 $2h$，则 $S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$，$(\frac{\sqrt{3}}{3}a)^2=2^2-h^2$，即 $a^2=12-3h^2$，所以正三棱柱的体积 $V=S_{\triangle ABC}\times 2h=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 3(4-h^2)h=\frac{3\sqrt{3}}{2}(-h^3+4h)$. 又 $V'=\frac{3\sqrt{3}}{2}(-3h^2+4)$，当 $h\in(0,\frac{2\sqrt{3}}{3})$时，$V'>0$，此时函数单调递增，当 $h\in(\frac{2\sqrt{3}}{3},2)$时，$V'<0$，此时函数单调递减，所以当 $h=\frac{2\sqrt{3}}{3}$时，函数 $V=\frac{3\sqrt{3}}{2}(-h^3+4h)$取得最大值$\frac{3\sqrt{3}}{2}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}\times(4-\frac{4}{3})=8$.

17.(1)证明:由 $na_{n+1}=3(n+1)a_n$,得 $a_{n+1}=\frac{3(n+1)a_n}{n}$, ………………………………………… 1 分

所以$\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{3a_n}{n}$, ……………………………………………………………………… 3 分

故$\{\frac{a_n}{n}\}$是公比为 3 的等比数列. ……………………………………………………………… 4 分

(2)解:由(1)得$\frac{a_n}{n}=\frac{3}{1}\times3^{n-1}=3^n$,则 $a_n=n\times3^n$,$b_n=\frac{n}{3^n}$. ………………………… 6 分

所以 $T_n=\frac{1}{3^1}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\cdots+\frac{n}{3^n}$,

所以$\frac{1}{3}T_n=\frac{1}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\frac{3}{3^4}+\cdots+\frac{n}{3^{n+1}}$. ……………………………………………… 7 分

两式相减,得$\frac{2}{3}T_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^n}-\frac{n}{3^{n+1}}$, ……………………………… 9 分

所以$\frac{2}{3}T_n=\frac{\frac{1}{3}(1-\frac{1}{3^n})}{1-\frac{1}{3}}-\frac{n}{3^{n+1}}$, ………………………………………………………… 11 分

解得 $T_n=\frac{3}{4}-\frac{2n+3}{4\times3^n}$. ……………………………………………………………………… 12 分

18.解:(1)由题意知 $100\times(0.0010\times2+0.0035+a+0.0020)=1$,

解得 $a=0.0025$, ……………………………………………………………………………………… 1 分

分数段[450,550)对应的频率为 0.1,[550,650)对应的频率为 0.35,[650,750)对应的频率为 0.25,设中位数为 x,则 $x\in[650,750)$. ………………………………………………………… 3 分

由 $0.1+0.35+(x-650)\times0.0025=0.5$,解得 $x=670$. …………………………………………… 5 分

(2)由题意知从分数段[650,750)对应的学生中抽取 5 人,从[850,950]对应的学生中抽取 2 人,随机变量 X 的所有可能取值为 0,1,2. ………………………………………………………… 7 分

则 $P(X=0)=\frac{C_2^0C_5^3}{C_7^3}=\frac{2}{7}$, ……………………………………………………………………… 8 分

$P(X=1)=\frac{C_2^1C_5^2}{C_7^3}=\frac{4}{7}$, ……………………………………………………………………………… 9 分

$P(X=2)=\frac{C_2^2C_5^1}{C_7^3}=\frac{1}{7}$, ……………………………………………………………………………… 10 分

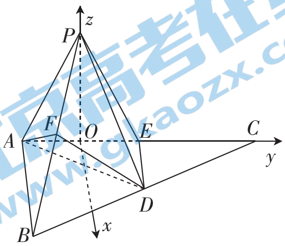
随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$

…… 11 分

所以 $E(X)=0\times\frac{2}{7}+1\times\frac{4}{7}+2\times\frac{1}{7}=\frac{6}{7}$. …………………………………………………… 12 分

19.(1)证明：因为 DE 为$\triangle ABC$的中位线，



所以 $DE/\!/AB$. ………………………………………… 1 分

因为 $AC\perp AB$，所以 $DE\perp AE$，$DE\perp PE$， ………………… 3 分

又 $AE\cap PE=E$，所以 $DE\perp$平面 PAE， …………………… 4 分

因为 $DE\subset$平面 $ABDE$，所以平面 $PAE\perp$平面 $ABDE$. …… 5 分

(2)解：取 AE 的中点 O，连接 PO，因为 $PA=PE=AE$，所以 $PO\perp AE$.

因为平面 $PAE\perp$平面 $ABDE$，所以 $PO\perp$平面 $ABDE$，且 $PO=\frac{\sqrt{3}}{2}$. …………………… 6 分

分别以$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OP}$的方向为 y，z 轴的正方向，建立如图所示的空间直角坐标系，

则 $P(0,0,\frac{\sqrt{3}}{2})$，$B(\sqrt{2},-\frac{1}{2},0)$，$D(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2},0)$，$A(0,-\frac{1}{2},0)$，$F(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{4})$，

所以$\overrightarrow{AP}=(0,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$，$\overrightarrow{AD}=(\frac{\sqrt{2}}{2},1,0)$，$\overrightarrow{AF}=(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{4})$. ……………………………… 8 分

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$是平面 ADF 的法向量，可得$\begin{cases}\frac{\sqrt{2}}{2}x+y=0,\\ \frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{1}{4}y+\frac{\sqrt{3}}{4}z=0,\end{cases}$ 令 $x=\sqrt{2}$，得 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{2}$，

$-1,-\sqrt{3})$，………………………………………………………………………… 10 分

则 $\cos\langle\overrightarrow{AP},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AP}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{AP}|}=\frac{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{\sqrt{6}\times 1}=-\frac{\sqrt{6}}{3}$，

所以 PA 与平面 ADF 所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{6}}{3}$. ……………………………………… 12 分

20.(1)解：当 $a=\mathrm{e}$ 时，因为 $f(x)=\mathrm{e}^x+(1-\mathrm{e})x-1$，所以 $f'(x)=\mathrm{e}^x+1-\mathrm{e}$， ………… 1 分

令 $f'(x)=0$，得 $x=\ln(\mathrm{e}-1)$， ……………………………………………… 2 分

所以 $f(x)$在$(-\infty,\ln(\mathrm{e}-1))$上单调递减，在$(\ln(\mathrm{e}-1),+\infty)$上单调递增. ………… 4 分

(2)证明：(法一)易知当 $x\in(1,+\infty)$时，$\ln x<x-1$，$\ln\frac{1}{x}<\frac{1}{x}-1$，所以 $1<\frac{x-1}{\ln x}<x$. …

………………………………………………………………………………… 6 分

由题设知 $a>1$，$f'(x)=a^x\ln a+1-a$. ………………………………………… 7 分

令 $f'(x)=0$，得 $x_0=\frac{\ln\frac{a-1}{\ln a}}{\ln a}$， ……………………………………………… 8 分

由上可知 $1<\frac{a-1}{\ln a}<a$，$0<\ln\frac{a-1}{\ln a}<\ln a$，故 $0<x_0<1$. …………………………… 10 分

当 $x<x_0$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，当 $x>x_0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增. …… 11 分

又 $f(0)=f(1)=0$，所以当 $0<x<1$ 时，$f(x)<0$. ………………………………… 12 分

(法二)因为 $f'(x)=a^x\ln a+1-a$，且 $a>1$，所以 $f'(x)$在$(0,1)$上单调递增. ………… 5 分

又 $f'(0)=\ln a+1-a$，设 $g(a)=\ln a+1-a$，则 $g'(a)=\frac{1}{a}-1<0$，可知 $g(a)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，所以 $g(a)<g(1)=0$，即 $f'(0)<0$. …………………………………………… 7 分

又 $f'(1)=a\ln a+1-a$，设 $h(a)=a\ln a+1-a$，则 $h'(a)=\ln a>0$，可知 $h(a)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $h(a)>h(1)=0$，即 $f'(1)>0$. …………………………………………… 9 分

所以存在唯一的 $x_0\in(0,1)$，使得 $f'(x_0)=0$，且 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,1)$ 上单调递增. …………………………………………… 11 分

因为 $f(0)=f(1)=0$，所以当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)<0$. …………………………………………… 12 分

21. (1)解：由题意可得，抛物线 C_1：$y^2=8x$ 的焦点为 $F(2,0)$，准线 l：$x=-2$. …………… 1 分

不妨设点 $M(a,b)(a>0,b>0)$，则 $|MF|=a+2=10$，即 $a=8$，可得 $b^2=64$，即 $b=8$，

所以 $M(8,8)$，则直线 MF 的斜率 $k_{MF}=\frac{8-0}{8-2}=\frac{4}{3}$. …………………………………… 3 分

因为 $FM\perp FN$，所以直线 NF 的斜率 $k_{NF}=-\frac{3}{4}$，所以直线 NF 的方程为 $y=-\frac{3}{4}(x-2)$，

令 $x=-2$，解得 $y=3$，即 $N(-2,3)$，故 $|NF|=\sqrt{(-2-2)^2+(3-0)^2}=5$. ………… 5 分

(2)证明：设 $P(t,y_0)$，由 $t\neq m\pm r$，$y_0\neq\pm m$，知过 P 所作圆 C_2 的切线的斜率 k 存在且非零，每条切线都与 C_1 有两个交点，设切线方程为 $y-y_0=k(x-t)$，即 $kx-y+(y_0-kt)=0$，故 $\frac{|km+y_0-kt|}{\sqrt{1+k^2}}=r$，整理得 $[(m-t)^2-r^2]k^2+2y_0(m-t)k+(y_0^2-r^2)=0$，① ………… 7 分

则过 P 所作的两条切线 PA，PC 的斜率 k_1，k_2 分别是方程①的两个实根，

故有 $k_1+k_2=\frac{2y_0(t-m)}{(m-t)^2-r^2}$，$k_1k_2=\frac{y_0^2-r^2}{(m-t)^2-r^2}$. ② …………………………………… 8 分

联立 $\begin{cases}y-y_0=k(x-t),\\ y^2=8x,\end{cases}$ 消去 x 得 $ky^2-8y+8(y_0-kt)=0$，③

设点 A,B,C,D 的纵坐标分别为 y_1,y_2,y_3,y_4，由③得 $y_1y_2=8(\frac{y_0}{k_1}-t)$，

同理可得 $y_3y_4=8(\frac{y_0}{k_2}-t)$. …………………………………………… 9 分

于是得 $y_1y_2y_3y_4=64(\frac{y_0}{k_1}-t)(\frac{y_0}{k_2}-t)=64[\frac{y_0^2-ty_0(k_1+k_2)}{k_1k_2}+t^2]$.

设 $y_0^2-ty_0(k_1+k_2)=\lambda k_1k_2$（其中 λ 为常数），

把②式代入整理得 $y_0^2(m^2-t^2-r^2-\lambda)+\lambda r^2=0$， …………………………………… 10 分

欲使上式与 y_0 的取值无关，则当且仅当常数 $\lambda=0$ 且 $m^2=t^2+r^2(r\neq0)$ 时，A,B,C,D 四点的纵坐标乘积为定值 $64t^2$. …………………………………………… 12 分

22. 解：(1)曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=1+3\cos\alpha,\\ y=-2+3\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为参数），其普通方程为 $(x-1)^2+(y+2)^2=9$，即 $x^2+y^2-2x+4y-4=0$， …………………………………… 2 分

则 C_1 的极坐标方程为 $\rho^2-2\rho\cos\theta+4\rho\sin\theta-4=0$. …………………………………… 3 分

直线 C_2 的方程为 $y=\sqrt{3}x$，

所以直线 C_2 的极坐标方程为 $\theta=\frac{\pi}{3}(\rho\in\mathbf{R})$. ………………………………………………………… 5 分

(2)设 $M(\rho_1,\theta)$，$N(\rho_2,\theta)$，

将 $\theta=\frac{\pi}{3}(\rho\in\mathbf{R})$代入 $\rho^2-2\rho\cos\theta+4\rho\sin\theta-4=0$， ………………………………… 7 分

得 $\rho^2+(2\sqrt{3}-1)\rho-4=0$， …………………………………………………………………… 8 分

所以 $\rho_1\rho_2=-4$， ………………………………………………………………………………… 9 分

所以 $|OM|\cdot|ON|=|\rho_1\rho_2|=4$. ……………………………………………………………… 10 分

23. 解：(1)化简得 $|x+2|-2|x-1|>-3$， ………………………………………………………… 1 分

当 $x\geqslant 1$ 时，解得 $x<7$，所以 $1\leqslant x<7$， …………………………………………………… 2 分

当 $x\leqslant -2$ 时，解得 $x>1$，此时无解， ……………………………………………………… 3 分

当 $-2<x<1$ 时，解得 $x>-1$，所以 $-1<x<1$. ………………………………………………… 4 分

综上所述，原不等式的解集为 $(-1,7)$. …………………………………………………………… 5 分

(2)因为 $f(x)=\begin{cases}-3, x\leqslant -2,\\ 2x+1, -2<x<1,\\ 3, x\geqslant 1,\end{cases}$ …………………………………………………… 7 分

所以 $f(x)_{max}=3$. ………………………………………………………………………………… 8 分

由题意知 $|1-m|\leqslant 3$，解得 $-2\leqslant m\leqslant 4$，

所以 m 的取值范围是 $[-2,4]$. ……………………………………………………………………… 10 分