2022 北京海淀高一（下）期末

数　　学

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1．已知正四棱锥的底面边长为 2，高为 3，则它的体积为(　　)

A．2　　B．4　　C．6　　D．12

2．向量 $\vec{a}=(2,0)$，$\vec{b}=(1,2)$，则 $|\vec{a}-2\vec{b}|=$(　　)

A．-4　　B．$\sqrt{13}$　　C．4　　D．13

3．将函数 $f(x)=\sin 2x$ 的图象向右平移 φ 个单位长度后得到函数 $f(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{3})$ 的图象，则 φ 的最小值是(

)

A．$\frac{\pi}{6}$　　B．$\frac{\pi}{3}$　　C．$\frac{2\pi}{3}$　　D．$\frac{5\pi}{6}$

4．$\cos\frac{5\pi}{12}=$(　　)

A．$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$　　B．$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$　　C．$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4}$　　D．$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

5．已知直线 m 和平面 α，β，则下列四个命题中正确的是(　　)

A．若 $\alpha\perp\beta$，$m\subset\beta$，则 $m\perp\alpha$

B．若 $m//\alpha$，$m//\beta$，则 $\alpha//\beta$

C．若 $\alpha//\beta$，$m//\alpha$，则 $m//\beta$

D．若 $\alpha//\beta$，$m\perp\alpha$，则 $m\perp\beta$

6．函数 $y=\sin^2 x$ 的最小正周期与其图象的对称中心分别是(　　)

A．$2\pi,(k\pi+\frac{\pi}{4},\frac{1}{2})(k\in Z)$

B．$2\pi,(k\pi+\frac{\pi}{4},0)(k\in Z)$

C．$\pi,(\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4},\frac{1}{2})(k\in Z)$

D．$\pi,(\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4},0)(k\in Z)$

7．已知向量 a，b 是两个单位向量，则“$<a$，$b>$为锐角”是“$|a-b|<\sqrt{2}$”的(　　)

A．充分不必要条件

B．必要不充分条件

C．充分必要条件

D．既不充分也不必要条件

8．已知函数 $f(x)=2\sin\omega x$ 在区间 $[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}]$ 上的最小值为 -2，则 ω 的取值范围是(　　)

A．$(-\infty,-\frac{9}{2}]\bigcup[6,+\infty)$

B．$(-\infty,-\frac{9}{2}]\bigcup[\frac{3}{2},+\infty)$

C．$(-\infty$，$-2]\bigcup[6$，$+\infty)$

D．$(-\infty,-2]\bigcup[\frac{3}{2},+\infty)$

9．底与腰（或腰与底）之比为黄金分割比 $(\frac{\sqrt{5}-1}{2})$ 的等腰三角形称为黄金三角形，其中顶角为 $36°$ 的黄金三角形被认为是最美的三角形．据此可得 $\cos 216°$ 的值是(　　)

A． $\frac{4+\sqrt{5}}{8}$　　B． $-\frac{1+\sqrt{5}}{4}$　　C． $-\frac{3+\sqrt{5}}{8}$　　D． $\frac{1-2\sqrt{5}}{4}$

10．在 ΔABC 中， $a\cos A=b\cos B$ ，则 ΔABC 的形状是（　　）

A．等腰直角三角形　　B．等腰三角形

C．直角三角形　　D．等腰三角形或直角三角形

二、填空题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分。

11．已知圆柱的底面半径为 1，高为 2，则其侧面积为 ____.

12．向量 $\vec{a}=(2,-1)$ ， $\vec{b}=(2,t)$ ， $\vec{a}\perp(t\vec{a}-\vec{b})$ ，则实数 $t=$ ____.

13．在正方形 $ABCD$ 中， E 是 AD 的中点，则 $(\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CE})\cdot\overrightarrow{BC}=$ ____.

14．函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin x-\cos(x-\frac{\pi}{3})$ ， $x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 的值域是 ____.

15．如图，在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， E 是棱 AA_1 上的一个动点，给出下列四个结论：

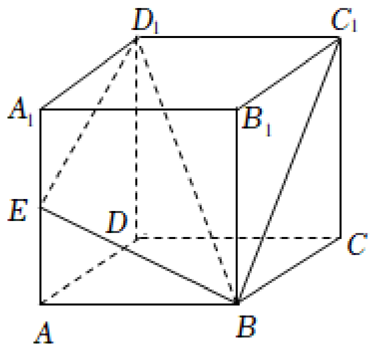
①三棱锥 B_1-BED_1 的体积为定值；

②存在点 E ，使得 $B_1D\perp$ 平面 BED_1 ；

③对每一个点 E ，在棱 DC 上总存在一点 P ，使得 $AP//$ 平面 BED_1 ；

④ M 是线段 BC_1 上的一个动点，过点 A_1 的截面 α 垂直于 DM ，则截面 α 的面积的最小值为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

其中所有正确结论的序号是 ____.

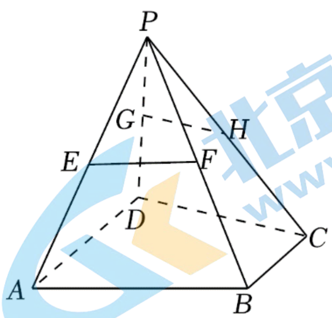


三、解答题共 4 小题，共 40 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

16．（9 分）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $BC//$ 平面 PAD ， $AD\neq BC$ ， E ， F ， H ， G 分别是棱 PA ， PB ， PC ， PD 的中点，

（I）求证： $BC//AD$ ；

（II）判断直线 EF 与直线 GH 的位置关系，并说明理由.



17.（10 分）在 ΔABC 中，$2b\cos A+a=2c$，$c=8$，$\sin A=\dfrac{3\sqrt{3}}{14}$.

（I）求 $\angle B$；

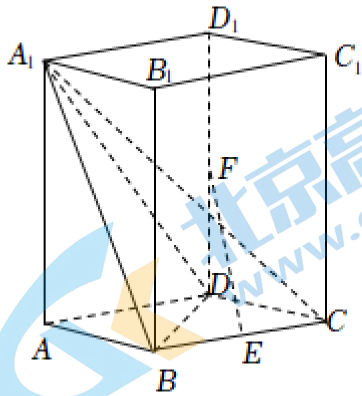
（II）求 ΔABC 的面积.

18.（11 分）如图，在直棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 是菱形，$AB=2$，$\angle BAD=60^\circ$，$AA_1=a$，E，F 分别是棱 BC，DD_1 的中点.

（I）求证：$BD\perp A_1C$；

（II）求证：$EF//$ 平面 A_1BD；

（III）是否存在正数 a，使得平面 $A_1BC\perp$ 平面 A_1DC？若存在，求 a 的值；若不存在，说明理由.



19.（10 分）若点 $(x_0,\ y_0)$ 在函数 $f(x)$ 的图象上，且满足 $y_0\cdot f(y_0)\geqslant 0$，则称 x_0 是 $f(x)$ 的 ξ 点．函数 $f(x)$ 的所有 ξ 点构成的集合称为 $f(x)$ 的 ξ 集.

（I）判断 $\dfrac{4\pi}{3}$ 是否是函数 $f(x)=\tan x$ 的 ξ 点，并说明理由；

（II）若函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0)$ 的 ξ 集为 R，求 ω 的最大值；

（III）若定义域为 R 的连续函数 $f(x)$ 的 ξ 集 D 满足 $D\subsetneqq R$，求证：$\{x\mid f(x)=0\}\neq\varnothing$.

选做题：（本题满分 0 分。所得分数可计人总分，但整份试卷得分不超过 100 分）

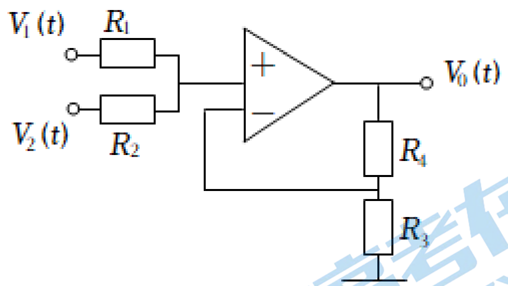
20．正弦信号是频率成分最为单一的信号，复杂的信号，例如电信号，都可以分解为许多频率不同、幅度不等的正弦型信号的叠加．正弦信号的波形可以用数学上的正弦型函数来描述：$V(t)=A\sin(2\pi ft+\varphi)$，其中 $V(t)$ 表示正弦信号的瞬时大小电压 V（单位：V）是关于时间 t（单位：s）的函数，而 $A>0$ 表示正弦信号的幅度，f 是正弦信号的频率，相应的 $T=\dfrac{1}{f}$ 为正弦信号的周期，φ 为正弦信号的初相．由于正弦信号是一种最简单的信号，所以在电路系统设计中，科学家和工程师们经常以正弦信号作为信号源（输入信号）去研究整个电路的工作机理．如图是一种典型的加法器电路图，图中的三角形图标是一个运算放大器，电路中有四个电阻，电阻值分别为 R_1，R_2，R_3，R_4（单位：Ω）$V_1(t)$ 和 $V_2(t)$ 是两个输入信号，$V_0(t)$ 表示的是输出信号，根据加法器的工作原理，$V_0(t)$ 与 $V_1(t)$ 和 $V_2(t)$ 的关系为：$V_o(t)=(1+\dfrac{R_4}{R_3})\cdot\dfrac{R_2\cdot V_1(t)+R_1\cdot V_2(t)}{R_1+R_2}$.

例如当 $R_1=R_2=R_3=R_4=1\Omega$，输入信号 $V_1(t)=\sin t$，$V_2(t)=\cos t$ 时，输出信号：$V_o(t)=(1+\dfrac{1}{1})\cdot\dfrac{1\cdot\sin t+1\cdot\cos t}{1+1}=\sin t+\cos t$.

（I）若 $R_1=R_2=R_3=R_4=1\Omega$，输入信号 $V_1(t)=\sin t$，$V_2(t)=\cos t$，则 $V_0(t)$ 的最大值为 ____；

（II）已知 $R_2=1\Omega$，$R_3=2\Omega$，$R_4=3\Omega$，输入信号 $V_1(t)=\sin(t+\frac{\pi}{6})$，$V_2(t)=\cos(t+\frac{\pi}{3})$．若 $V_o(t)=A\sin(t+\frac{\pi}{3})$（其中 $A>0$）则 $R_1=$ ____；

（III）已知 $R_3=1\Omega$，$R_4=1\Omega$，$0<R_2<R_1\leqslant 1\Omega$，且 $V_1(t)=\sin t$，$V_2(t)=\cos 2t$．若 $V_0(t)$ 的最大值为 $\frac{3}{2}$，则满足条件的一组电阻值 R_1，R_2 分别是 ____．



参考答案

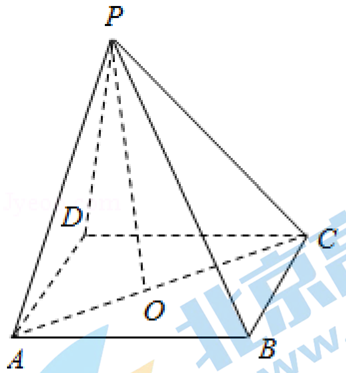
一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1.【分析】正四棱锥 $P-ABCD$ 中， $AB=2$ ， $PO=3$ ，利用体积公式求出该正四棱锥的体积.

【解答】解：如图，正四棱锥 $P-ABCD$ 中， $AB=2$ ， $PO=3$ ，

所以 $V_{P-ABCD}=\frac{1}{3}\cdot S_{ABCD}\cdot PO=\frac{1}{3}\times 2\times 2\times 3=4$.

故选： B .



【点评】本题考查正四棱锥的体积的求法，考查数据处理能力、运算求解能力以及应用意识，考查数形结合思想等，是中档题.

2.【分析】利用向量的坐标运算求出 $\vec{a}-2\vec{b}$ 的坐标，再由模的坐标运算求解即可.

【解答】解：因为向量 $\vec{a}=(2,0)$ ， $\vec{b}=(1,2)$ ，

所以 $\vec{a}-2\vec{b}=(0,-4)$ ，

所以 $|\vec{a}-2\vec{b}|=4$.

故选： C .

【点评】本题主要考查向量的坐标运算，及模的运算，考查运算求解能力，属于基础题.

3.【分析】由函数的平移变换及诱导公式即可求解.

【解答】解：将将函数 $f(x)=\sin 2x$ 的图象向右平移 φ 个单位长度后，

得到函数 $y=\sin 2(x-\varphi)=\sin(2x-2\varphi)=\sin(2x-\frac{\pi}{3})$ ，

所以 $-2\varphi=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ， $k\in Z$ ，即 $\varphi=-2k\pi+\frac{\pi}{6}$ ， $k\in Z$ ，

当 $k=0$ 时， φ 取得最小值为 $\frac{\pi}{6}$.

故选： A .

【点评】本题主要考查三角函数图象的变换，诱导公式的应用，考查运算求解能力，属于基础题.

4.【分析】直接利用三角函数的诱导公式的变换求出三角函数的值.

【解答】解： $\cos\frac{5\pi}{12}=\cos(\pi-\frac{7\pi}{12})=-\cos(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4})=-(\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

故选： A .

【点评】本题考查的知识要点：三角函数关系式的变换，三角函数的诱导公式，三角函数的值，主要考查学生的运算能力和数学思维能力，属于基础题．

5．【分析】由直线与平面，平面与平面的位置关系判断即可．

【解答】解：对于 A 选项，若 $\alpha\perp\beta$，$m\subset\beta$，则 m 可能与 α 平行，故 A 错误；

对于 B 选项，若 $m//\alpha$，$m//\beta$，则 α，β 可能平行或者相交，则 C 错误；

对于 C 选项，若 $\alpha//\beta$，$m//\alpha$，则 m 可能与 β 平行或者在平面 β 内，故 B 错误；

对于 D 选项，由面面平行以及线面垂直的性质可知，D 正确；

故选：D．

【点评】本题主要考查了直线与平面，平面与平面的位置关系，属于基础题．

6．【分析】根据余弦函数的倍角公式化简函数的解析式，然后根据周期公式即可求出周期，再利用余弦函数的对称性整体代换即可求解．

【解答】解：因为 $y=\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$，

所以函数的最小正周期为 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$，

令 $2x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$k\in Z$，解得 $x=\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4},k\in Z$，

所以函数的对称中心为 $(\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{1}{2})$，$k\in Z$，

故选：C．

【点评】本题考查了三角函数的周期性和对称性，考查了余弦函数的性质，属于基础题．

7．【分析】根据充分与必要条件的概念，平面向量数量积的定义与性质即可判断．

【解答】解：$\because$ 向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 是两个单位向量，

$\therefore$ 由 $<\vec{a}$，$\vec{b}>$ 为锐角可得 $\cos<\vec{a},\vec{b}>>0$，

$\therefore |\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{(\vec{a}-\vec{b})^2}=\sqrt{2-2\cos<\vec{a},\vec{b}>}<\sqrt{2}$，

反过来，由 $|a-b|<\sqrt{2}$ 两边平方可得 $\vec{a}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2<2$，

$\therefore 2-2\cos<\vec{a},\vec{b}><2$，$\therefore \cos<\vec{a},\vec{b}>>0$，

$\therefore <\vec{a},\vec{b}>\in[0,\dfrac{\pi}{2})$，$\therefore <a$，$b>$ 不一定为锐角，

故"$<\vec{a}$，$\vec{b}>$ 为锐角"是"$|a-b|<\sqrt{2}$"的充分不必要条件，

故选：A．

【点评】本题考查充分与必要条件的概念，平面向量数量积的定义与性质，属基础题．

8．【分析】先根据 x 的范围求出 ωx 的范围，根据函数 $f(x)$ 在区间 $[-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{4}]$ 上的最小值为 -2，可得到 $-\dfrac{\pi}{3}\omega\leqslant-\dfrac{\pi}{2}$，

即 $\omega\geqslant\dfrac{3}{2}$，然后对 ω 分大于 0 和小于 0 两种情况讨论最值可确定答案．

【解答】解：当 $\omega>0$ 时，$-\dfrac{\pi}{3}\omega\leqslant\omega x\leqslant\dfrac{\pi}{4}\omega$，

由题意知 $-\frac{\pi}{3}\omega\leqslant-\frac{\pi}{2}$，即 $\omega\geqslant\frac{3}{2}$，

当 $\omega<0$ 时，$\frac{\pi}{4}\omega\leqslant\omega x\leqslant-\frac{\pi}{3}\omega$，

由题意知 $\frac{\pi}{4}\omega\leqslant-\frac{\pi}{2}$，即 $\omega\leqslant-2$，

综上知，ω 的取值范围是 $(-\infty,-2]\bigcup[\frac{3}{2},+\infty)$．

故选：D．

【点评】本题主要考查正弦函数的单调性和最值问题．考查三角函数基础知识的掌握程度，三角函数是高考的一个重要考点一定要强化复习．

9.【分析】利用已知条件求出 $\cos 72°$ 的值，然后利用二倍角公式，诱导公式求解即可．

【解答】解：由题意可知：把顶角为 $36°$ 的等腰三角形称为黄金三角形，它的底和腰之比为黄金分割比 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx0.618$，该三角形被认为是最美的三角形．

如图，则可得：$\cos B=\frac{\frac{1}{2}BC}{AB}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$，

可得 $\cos 72°=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$，$\cos 72°=2\cos^2 36°-1$

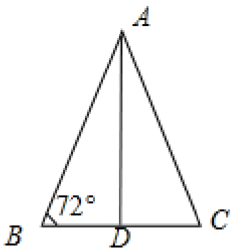
即 $2\cos^2 36°-1=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$，

所以 $\cos^2 36°=\frac{2\sqrt{5}+6}{4^2}=(\frac{\sqrt{5}+1}{4})^2$，

所以 $\cos 36°=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$，

所以 $\cos 216°=\cos(180°+36°)=-\cos 36°=-\frac{\sqrt{5}+1}{4}$．

故选：B．



【点评】本题考查二倍角公式，诱导公式在三角函数化简求值中的应用，属于基础题．

10.【分析】直接利用正弦定理整理得 $\sin 2A=\sin 2B$，进一步利用三角函数的关系式的变换求出结果．

【解答】解：利用正弦定理：$a\cos A=b\cos B$ 转换为 $\sin A\cos A=\sin B\cos B$，

整理得 $\sin 2A=\sin 2B$，

故 $2A=2B$ 或 $2A+2B=\pi$；

所以 $A=B$ 或 $A+B=\frac{\pi}{2}$；

故三角形为等腰三角形或直角三角形.

故选：D.

【点评】本题考查的知识要点：三角函数的关系式变换，正弦定理的应用，主要考查学生的运算能力和数学思维能力，属于中档题.

二、填空题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分。

11.【分析】利用圆柱侧面积公式直接求解.

【解答】解：圆柱的底面半径为 1，高为 2，

则其侧面积为 $S=2\pi\times1\times2=4\pi$.

故答案为：4π.

【点评】本题考查圆柱的结构特征、圆柱的侧面积等基础知识，考查运算求解能力，是基础题.

12.【分析】可求出 $t\vec{a}-\vec{b}=(2t-2,-2t)$，然后根据 $\vec{a}\perp(t\vec{a}-\vec{b})$ 可得出 t 的值.

【解答】解：$t\vec{a}-\vec{b}=(2t-2,-2t)$，$\vec{a}\perp(t\vec{a}-\vec{b})$，

$\therefore\ \vec{a}\cdot(t\vec{a}-\vec{b})=2(2t-2)+2t=0$，解得 $t=\frac{2}{3}$.

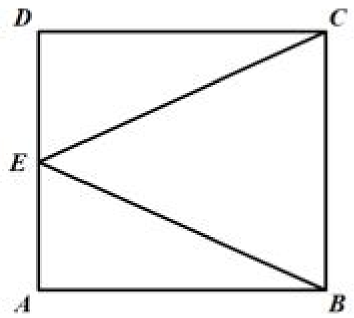
故答案为：$\frac{2}{3}$.

【点评】本题考查了向量坐标的减法、数乘和数量积的运算，向量垂直的充要条件，考查了计算能力，属于基础题.

13.【分析】根据向量加法的三角形法则化简计算即可求得向量的数量积.

【解答】解：如图 $(\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CE})\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CE})\cdot(\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EC})=(\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CE})\cdot(\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{CE})=\overrightarrow{BE}^2-\overrightarrow{CE}^2$，

因为 $|\overrightarrow{BE}|=|\overrightarrow{CE}|$，所以 $(\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CE})\cdot\overrightarrow{BC}=0$；



故答案为：0.

【点评】本题主要考查平面向量数量积的运算，属于基础题.

14.【分析】直接利用三角函数关系式的变换，把函数的关系式变形成正弦型函数，进一步利用函数的定义域求出函数的值域.

【解答】解：$f(x)=\sqrt{3}\sin x-\cos(x-\frac{\pi}{3})=\sqrt{3}\sin x-\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x=\sin(x-\frac{\pi}{6})$；

由于 $x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$，

所以 $x-\frac{\pi}{6}\in[-\frac{2\pi}{3},\frac{\pi}{3}]$，

故 $f(x)\in[-1,\frac{\sqrt{3}}{2}]$.

故答案为：$[-1,\frac{\sqrt{3}}{2}]$.

【点评】本题考查的知识要点：三角函数关系式的变换，正弦型函数的性质，主要考查学生的运算能力和数学思维能力，属于基础题.

15.【分析】对于①，由 $AA_1//BB_1$，得 $AA_1//$ 平面 BB_1D_1，从而点 E 到平面 BB_1D_1 的距离为 $h=\frac{\sqrt{2}}{2}$，再由 $S_{\triangle BB_1D_1}=\frac{1}{2}\times B_1D_1\times BB_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$，由此能求出三棱锥 B_1-BED_1 的体积为定值；对于②，当 E 为棱 AA_1 的中点时，取 BD_1 的中点为 F，连接 EF，推导出 $EF\perp B_1D$，由正方体性质得 $BD_1\perp B_1D$ 不成立，从而不存在点 E，使得 $B_1D\perp$ 平面 BED_1，故；对于③，当 E 与点 A 重合时，无论点 P 在何位置，直线 AP 与平面 BED_1 相交；对于④，推导出 $A_1C\perp DM$，由余弦定理、截面面积能求出结果.

【解答】解：对于①，如图，在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，

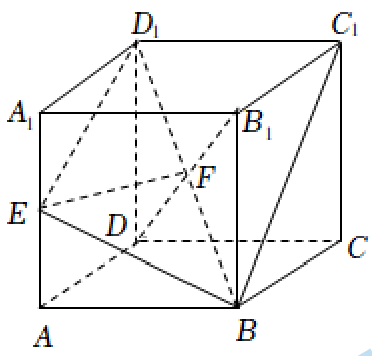
$AA_1//BB_1$，$AA_1\not\subset$ 平面 BB_1D_1，$BB_1\subset$ 平面 BB_1D_1，$\therefore AA_1//$ 平面 BB_1D_1，

$\because$ 点 E 是棱 AA_1 上的一个动点，$\therefore$ 点 E 到平面 BB_1D_1 的距离为 $h=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$S_{\triangle BB_1D_1}=\frac{1}{2}\times B_1D_1\times BB_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore$ 三棱锥 B_1-BED_1 的体积 $V=\frac{1}{2}\times S_{\triangle BB_1D_1}\times h=\frac{1}{4}$，故①正确；

对于②，当 E 为棱 AA_1 的中点时，取 BD_1 的中点为 F，连接 EF，如图，



则 $EF//AC$，又 $AC\perp BD$，$AC\perp BB_1$，$BD\bigcap BB_1=B$，

$\therefore EF\perp$ 平面 BDD_1B_1，又 $B_1D\subset$ 平面 BDD_1B_1，$\therefore EF\perp B_1D$，

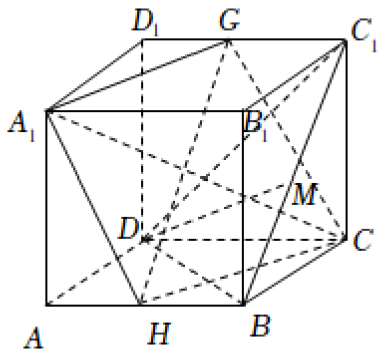
由正方体性质得 BDD_1B_1 是矩形，不是正方体，

$\therefore BD_1\perp B_1D$ 不成立，又 $EF\bigcap BD_1=F$，

$\therefore$ 不存在点 E，使得 $B_1D\perp$ 平面 BED_1，故②错误；

对于③，当 E 与点 A 重合时，无论点 P 在何位置，直线 AP 与平面 BED_1 相交，故③错误；

对于④，根据题意，作图如下，



$\because$ 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$A_1C\perp$ 平面 BDC_1，$\therefore A_1C\perp DM$，

设 $D_1G=x$，则 $A_1G=\sqrt{1+x^2}$，$CG=\sqrt{(1-x)^2+1}$，

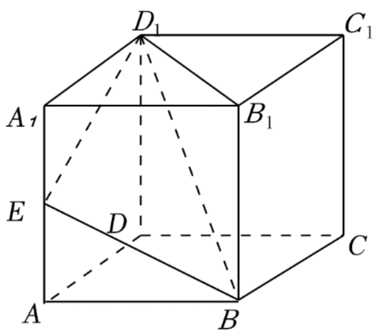
则△ A_1GC 中，$\cos\angle A_1GC=\dfrac{1+x^2+x^2-2x+2-3}{2\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{x^2-2x+2}}=\dfrac{x^2-x}{\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{x^2-2x+2}}$，

$\sin\angle A_1GC=\sqrt{1-(\dfrac{x^2-x}{\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{x^2-2x+2}})^2}=\dfrac{\sqrt{2x^2-2x+2}}{\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{x^2-2x+2}}$，

则该截面面积 $S=2\times\dfrac{1}{2}A_1G\cdot CG\cdot\sin\angle A_1GC=\sqrt{2x^2-2x+2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{(x-\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{3}{4}}$，

$\because x\in[0，1]$，当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时，$S_{min}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，故④正确．

故答案为：①④．



【点评】本题考查命题真假的判断，考查空间中线线、线面、面面间的位置关系等基础知识，考查运算求解能力，是中档题．

三、解答题共 4 小题，共 40 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

16．【分析】(I) 利用线面平行的性质定理进行证明即可，

(II) 证明 $EG//FH$，且 $EG\neq FH$，即可证明直线 EF 与直线 GH 的位置关系．

【解答】证明：(I) 因为 $BC//$ 平面 PAD，$BC\subset$ 平面 $ABCD$，平面 $ABCD\cap$ 平面 $PAD=AD$，所以 $BC//AD$．

证明：(II) 直线 EF 与直线 GH 相交．理由如下：

连接 EF，FH，HG，GE，如图所示，

因为 E，G 分别是 PA，PD 的中点，所以 EG 是 ΔPAD 的中位线，所以 $EG//AD$，且 $EG=\dfrac{1}{2}AD$，

因为F，H分别是PB，PC的中点，所以FH是ΔPBC的中位线，

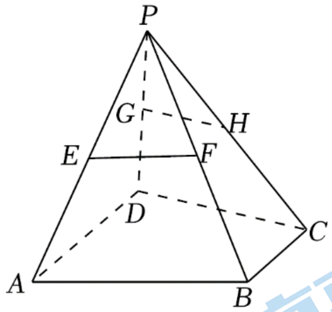
所以$FH//BC$，且$FH=\frac{1}{2}BC$，

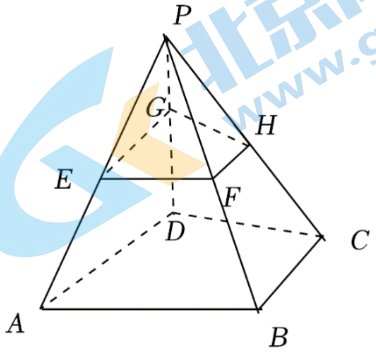
因为$BC//AD$，所以$EG//FH$，

因为$AD\neq BC$，所以$EG\neq FH$，

所以四边形$EFHG$是梯形，

所以直线EF与直线GH相交.





【点评】本题考查线面平行，考查学生的推理能力，属于中档题.

17.【分析】（I）利用正弦定理，两角和的正弦，即可解出；

（II）由正弦定理以及三角形面积公式，即可解出.

【解答】解：（I）由正弦定理可得，$2\sin B\cos A+\sin A=2\sin C$，

$\because A+B+C=\pi$，

$\therefore 2\sin B\cos A+\sin A=2\sin(A+B)=2\sin A\cos B+2\cos A\sin B$，

$\therefore \cos B=\frac{1}{2}$，

$\because B\in(0,\pi)$，

$\therefore B=\frac{\pi}{3}$；

（II）$\because \sin A=\frac{3\sqrt{3}}{14}<\frac{1}{2}$，$B=\frac{\pi}{3}$，

$\therefore 0<A<\frac{\pi}{6}$，

$\therefore \cos A=\frac{13}{14}$，

$\therefore \sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\frac{4\sqrt{3}}{7}$，

$\therefore 2R=\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{14\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore a=2R\sin A=\dfrac{14\sqrt{3}}{3}\times\dfrac{3\sqrt{3}}{14}=3$，

$\therefore S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}\times3\times8\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$．

【点评】本题考查了解三角形，正余弦定理，面积公式，学生的数学运算能力，属于基础题．

18．【分析】(I) 根据线面垂直的判定定理及性质定理证明；

(II) 根据线面平行的判定定理证明；

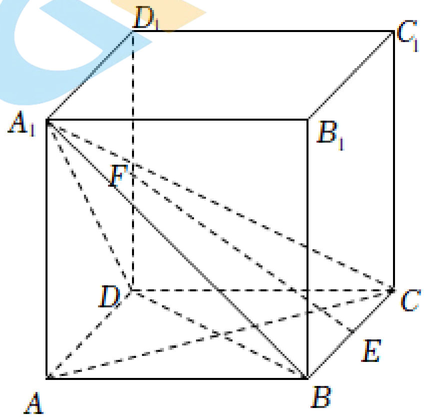
(III) 假设存在正数 a，使得平面 $A_1BC\perp$ 平面 A_1DC，根据面面垂直的判定定理得 $BO\perp DO$，在直角三角形 ΔBOD 中，由 $BO^2+DO^2=DB^2$，得 $a=0$ 与已知 a 为正数矛盾，进而得证．

【解答】(I) 证明：如图，连接 AC，因为底面 $ABCD$ 是菱形，

所以 $BD\perp AC$，直棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，

所以 $AA_1\perp BD$，且 $AA_1\bigcap AC=A$，所以 $BD\perp$ 平面 A_1AC，

所以 $BD\perp A_1C$；



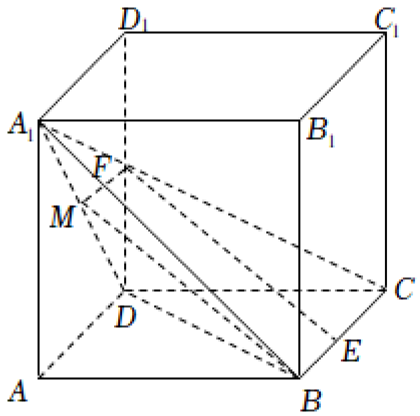
(II) 证明：取 A_1D 的中点 M，连接 FM、BM，则 FM 为三角形 A_1DD_1 的中位线，

所以 $FM//A_1D_1$ 且 $FM=\dfrac{1}{2}A_1D_1$，又因为 $A_1D_1//B_1C_1$ 且 $A_1D_1=\dfrac{1}{2}B_1C_1$，

又 $BE//B_1C_1$ 且 $BE=\dfrac{1}{2}B_1C_1$，所以 $FM//BE$ 且 $FM=BE$，

所以四边形 $FMBE$ 为平行四边形，

所以 $EF//MB$，$EF\not\subset$ 平面 A_1BD，$MB\subset$ 平面 A_1BD，所以 $EF//$ 平面 A_1BD；



解：(III) 不存在正数 a，使得平面 $A_1BC\perp$ 平面 A_1DC，证明如下：

因为 $BC\perp$ 平面 A_1B，所以 $BC\perp A_1B$，

在直角△ A_1BC 中，$A_1B=\sqrt{a^2+4},CB=2$，所以 $A_1C=\sqrt{a^2+8}$，

假设存在正数 a，使得平面 $A_1BC\perp$ 平面 A_1DC，如图，

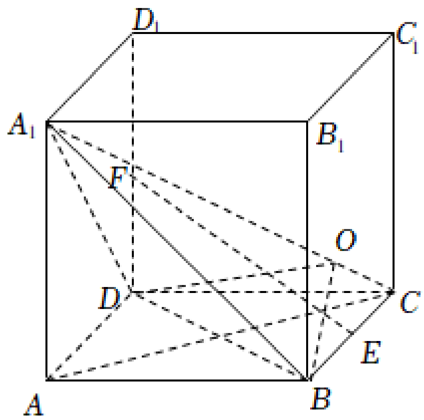
过 B 作 $BO\perp A_1C$ 且与 A_1C 交于 O 点，连接 DO，平面 $A_1BC\cap$ 平面 $A_1DC=AC$，

所以 $BO\perp$ 平面 A_1DC，所以 $BO\perp DO$，在直角△ A_1BC 中，$BO=\dfrac{A_1B\cdot BC}{A_1C}=\dfrac{2\sqrt{a^2+4}}{\sqrt{a^2+8}}$，同理 $DO=\dfrac{2\sqrt{a^2+4}}{\sqrt{a^2+8}}$，

因为底面 $ABCD$ 是菱形，$AB=2$，$\angle BAD=60^\circ$，所以 $DB=2$，

在直角三角形 ΔBOD 中，$BO^2+DO^2=DB^2$，得 $(\dfrac{2\sqrt{a^2+4}}{\sqrt{a^2+8}})^2+(\dfrac{2\sqrt{a^2+4}}{\sqrt{a^2+8}})^2=4$，

化简得 $a=0$ 与已知 a 为正数矛盾，所以不存在正数 a，使得平面 $A_1BC\perp$ 平面 A_1DC．



【点评】本题考查线面垂直，考查学生的分析能力，属于中档题．

19．【分析】(I) 直接求出 $y_0=\sqrt{3}$，再判断出 $f(y_0)<0$，即可得到 $y_0\cdot f(y_0)<0$，即可得到结论；

(II) 先说明 $\omega\leqslant\pi$，若 $\omega>\pi$，则 $T<2$，由题设得到 $T\geqslant 2$，推出矛盾，再说明 ω 的值可以等于 π，令 $\varphi=0$，利用三角函数的值域加以证明即可；

(III) 由题设知，必存在 $x_0\in R$，使得 $f(x_0)\cdot f(y_0)<0$，结合零点存在定理说明函数 $f(x)$ 必存在零点，即可证明．

【解答】解：$(I)\dfrac{4\pi}{3}$ 不是函数 $f(x)=\tan x$ 的点，

理由如下：设 $x_0=\dfrac{4\pi}{3}$，则 $y_0=\tan\dfrac{4\pi}{3}=\sqrt{3},f(y_0)=\tan\sqrt{3}$，

因为 $\frac{\pi}{2}<\sqrt{3}<\pi$，所以 $f(y_0)=\tan\sqrt{3}<0$，所以 $y_0\cdot f(y_0)<0$，

所以 $\frac{4\pi}{3}$ 不是函数 $f(x)=\tan x$ 的 ξ 点；

(II) 先证明 $\omega\leqslant\pi$，若 $\omega>\pi$，则函数 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}<2$，

因为函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0)$ 的集为 R，

所以对 $\forall x_0\in R$，x_0 是 $f(x)$ 的零点，

令 $y_0=f(x_0)$，则 $y_0\cdot f(y_0)\geqslant0$，

因为函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0)$ 的值域为 $[-1, 1]$，

所以当 $y_0\in[0, 1]$ 时，必有 $f(y_0)\geqslant0$，

即 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)\geqslant0$ 对于 $x\in[0, 1]$ 恒成立，

所以 $\frac{T}{2}\geqslant1-0$，即 $f(x)$ 的最小正周期 $T\geqslant2$，与 $T<2$ 矛盾；

再证明 ω 的值可以等于 π，令 $f(x)=\sin\pi x$，对 $\forall x_0\in R$，

当 $y_0=f(x_0)\in[0, 1]$ 时，$f(y_0)\in[0, 1]$，$y_0\cdot f(y_0)\geqslant0$；

当 $y_0=f(x_0)\in[-1, 0]$ 时，$f(y_0)\in[-1, 0]$，$y_0\cdot f(y_0)\geqslant0$，

所以 x_0 是 $f(x)$ 的点，即函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0)$ 的集为 R，

综上所述，ω 的最大值是 π；

(III) 因为函数 $f(x)$ 的集 D 满足 $D\subseteq R$，

所以存在 $x_0\in R$，使得 $y_0=f(x_0)$ 且 $y_0\cdot f(y_0)<0$，即 $f(x_0)\cdot f(y_0)<0$，

因为若 $x_0=y_0$，则 $f(x_0)\cdot f(y_0)=(f(y_0))^2\geqslant0$，所以 $x_0\neq y_0$，

因为函数 $f(x)$ 的图象是连续不断的，

不妨设 $x_0<y_0$，由零点存在定理知，必存在 $x_1\in(x_0, y_0)$ 使得 $f(x_1)=0$，

所以 $f(x)$ 存在零点，

即 $\{x\mid f(x)=0\}\neq\varnothing$.

【点评】本题考查三角函数的图像与性质，考查学生的运算能力，属于难题.

选做题：（本题满分 0 分。所得分数可计入总分，但整份试卷得分不超过 100 分）

20.【分析】（I）由辅助角公式得 $V_0(t)=\sqrt{2}\sin(t+\frac{\pi}{4})$，即可求出最大值；

（II）由正弦余弦的和角公式化简得 $\frac{A}{2}\sin t+\frac{\sqrt{3}A}{2}\cos t=\frac{5\sqrt{3}(1-R_1)}{4(R_1+1)}\sin t+\frac{5}{4}\cos t$，解方程组即可求解；

（III）先由余弦的倍角公式化简得 $V_0(t)=\frac{2}{R_1+R_2}(-2R_1\sin^2t+R_2\sin t+R_1)$，再由二次函数的性质求得最大值为 $\frac{8R_1^2+R_2^2}{4R_1^2+4R_1R_2}$，进而得到 $\frac{R_2}{R_1}=3-\sqrt{7}$，即可求解.

【解答】解：（I）由题意得，$V_0(t)=(1+\frac{1}{1})\cdot\frac{1\cdot\sin t+1\cdot\cos t}{1+1}=\sin t+\cos t=\sqrt{2}\sin(t+\frac{\pi}{4})$，则 $V_0(t)$ 的最大值为 $\sqrt{2}$；

（II）由题意知，$A\sin(t+\frac{\pi}{3})=(1+\frac{3}{2})\cdot\frac{1\cdot\sin(t+\frac{\pi}{6})+R_1\cdot\cos(t+\frac{\pi}{3})}{R_1+1}$，

整理得 $\frac{A}{2}\sin t+\frac{\sqrt{3}A}{2}\cos t=\frac{5}{2(R_1+1)}(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin t+\frac{1}{2}\cos t+\frac{R_1}{2}\cos t-\frac{\sqrt{3}R_1}{2}\sin t)$，

即 $\frac{A}{2}\sin t+\frac{\sqrt{3}A}{2}\cos t=\frac{5\sqrt{3}(1-R_1)}{4(R_1+1)}\sin t+\frac{5}{4}\cos t$，

则 $\begin{cases}\frac{A}{2}=\frac{5\sqrt{3}(1-R_1)}{4(R_1+1)}\\ \frac{\sqrt{3}A}{2}=\frac{5}{4}\end{cases}$，解得 $R_1=\frac{1}{2}\Omega$；

（III）由题意得，$V_0(t)=(1+\frac{1}{1})\cdot\frac{R_2\cdot\sin t+R_1\cdot\cos 2t}{R_1+R_2}=\frac{2}{R_1+R_2}[R_2\cdot\sin t+R_1\cdot(1-2\sin^2 t)]$

$=\frac{2}{R_1+R_2}(-2R_1\sin^2 t+R_2\sin t+R_1)=\frac{2}{R_1+R_2}[-2R_1(\sin t-\frac{R_2}{4R_1})^2+\frac{8R_1^2+R_2^2}{8R_1}]$，

又 $0<R_2<R_1\leqslant 1\Omega$，则 $\frac{R_2}{4R_1}\in(0,\frac{1}{4})$，

当 $\sin t=\frac{R_2}{4R_1}$ 时，$V_0(t)$ 取得最大值 $\frac{2}{R_1+R_2}\cdot\frac{8R_1^2+R_2^2}{8R_1}=\frac{8R_1^2+R_2^2}{4R_1^2+4R_1R_2}$，

则 $\frac{8R_1^2+R_2^2}{4R_1^2+4R_1R_2}=\frac{3}{2}$，整理得 $2R_1^2-6R_1R_2+R_2^2=0$，

即 $(\frac{R_2}{R_1})^2-6\cdot\frac{R_2}{R_1}+2=0$，解得 $\frac{R_2}{R_1}=3\pm\sqrt{7}$，

又 $0<R_2<R_1\leqslant 1\Omega$，则 $\frac{R_2}{R_1}=3-\sqrt{7}$，

取 $R_1=1, R_2=3-\sqrt{7}$ 即满足题意，

则 $R_1=1\Omega, R_2=(3-\sqrt{7})\Omega$（答案不唯一）.

故答案为：$\sqrt{2}$；$\frac{1}{2}\Omega$；$R_1=1\Omega, R_2=(3-\sqrt{7})\Omega$.

【点评】本题考查了三角函数在物理学中的应用，主要考查了三角函数的最值问题，属于难题.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ＂精益求精、专业严谨＂ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。