

## 数 学 试 卷

2023. -1

本试卷共 6 页，共 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将答题卡交回。

## 第一部分（选择题 共 50 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

(1) 已知集合  $A = \{-2, -1, 0, 2\}$ ,  $B = \{x \mid |x| < 2\}$ , 则  $A \cap B =$

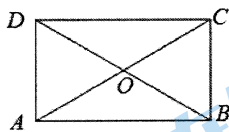
- (A)  $\{-1\}$  (B)  $\{-1, 0\}$   
(C)  $\{-2, -1, 0\}$  (D)  $\{-2, -1, 0, 2\}$

(2) 命题“ $\forall x \in \mathbf{R}, e^x > 0$ ”的否定为

- (A)  $\exists x \in \mathbf{R}, e^x \leq 0$  (B)  $\exists x \in \mathbf{R}, e^x < 0$   
(C)  $\forall x \in \mathbf{R}, e^x \leq 0$  (D)  $\forall x \in \mathbf{R}, e^x < 0$

(3) 如图，在矩形  $ABCD$  中，对角线  $AC, BD$  交于点  $O$ ，则下列各式一定成立的是

- (A)  $\vec{AB} = \vec{CD}$   
(B)  $\vec{AC} = \vec{BD}$   
(C)  $\vec{AO} = \frac{1}{2}\vec{CA}$   
(D)  $\vec{AO} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AD})$



(4) 为响应“健康中国 2030”的全民健身号召，某校高一年级举办了学生篮球比赛，甲、乙两位同学在 6 场比赛中的得分茎叶图如图所示。下列结论正确的是

- (A) 甲得分的极差比乙得分的极差小  
(B) 甲得分的平均数比乙得分的平均数小  
(C) 甲得分的方差比乙得分的方差大  
(D) 甲得分的 25% 分位数比乙得分的 25% 分位数大

| 甲   | 乙         |
|-----|-----------|
| 6 4 | 1 3       |
| 7 3 | 2 2 4 6 8 |
| 8 2 | 3 7       |

(5) 已知  $a = \log_2 3$ ,  $b = \log_{\frac{1}{2}} 3$ ,  $c = 3^{-\frac{1}{2}}$ , 则  $a, b, c$  的大小关系正确的是

- (A)  $a > b > c$  (B)  $a > c > b$  (C)  $c > a > b$  (D)  $c > b > a$

(6) 已知射击运动员甲击中靶心的概率为 0.8，射击运动员乙击中靶心的概率为 0.9，且甲、乙两人是否击中靶心互不影响。若甲、乙各射击一次，则至少有一人击中靶心的概率为

- (A) 0.98 (B) 0.8 (C) 0.72 (D) 0.26

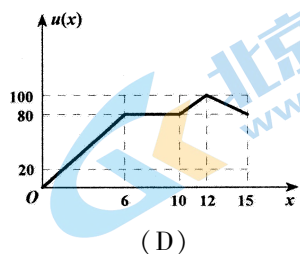
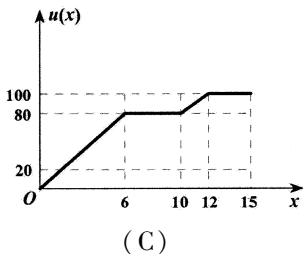
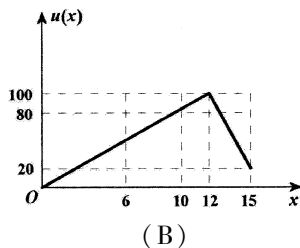
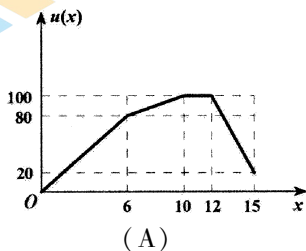
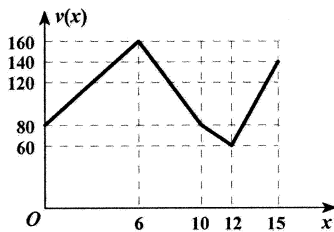
(7) “ $0 < x < 1$ ” 是 “ $\ln x < 0$ ” 成立的

- (A) 充分而不必要条件
- (B) 必要而不充分条件
- (C) 充分必要条件
- (D) 既不充分也不必要条件

(8) 已知函数  $f(x) = \frac{x}{x-1}$ , 则下列函数为奇函数的是

- (A)  $f(x+1) + 1$
- (B)  $f(x+1) - 1$
- (C)  $f(x-1) + 1$
- (D)  $f(x-1) - 1$

(9) 某校航模小组进行无人机飞行测试, 从某时刻开始 15 分钟内的速度  $v(x)$  (单位: 米/分钟) 与飞行时间  $x$  (单位: 分钟) 的关系如右图所示. 若定义 “速度差函数”  $u(x)$  (单位: 米/分钟) 为无人机在  $[0, x]$  这个时间段内的最大速度与最小速度的差, 则  $u(x)$  的图象为



(10) 已知集合  $A, B$  都是  $\mathbb{N}^*$  的子集,  $A, B$  中都至少含有两个元素, 且  $A, B$  满足:

- ① 对于任意  $x, y \in A$ , 若  $x \neq y$ , 则  $xy \in B$ ;
- ② 对于任意  $x, y \in B$ , 若  $x < y$ , 则  $\frac{y}{x} \in A$ .

若  $A$  中含有 4 个元素, 则  $A \cup B$  中含有元素的个数是

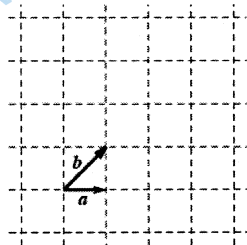
- (A) 5
- (B) 6
- (C) 7
- (D) 8

## 第二部分（非选择题 共 100 分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

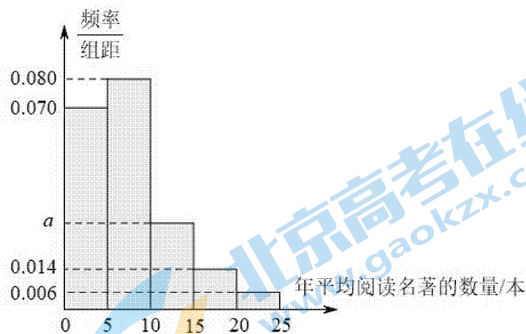
(11) 某学校有教师志愿者 80 人，其中小学部有 24 人，初中部有 32 人，高中部有 24 人. 现采用分层抽样的方法从全校教师志愿者中抽出 20 人参加周末社区服务活动，那么应从初中部抽出的人数为\_\_\_\_\_.

(12) 已知向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  在正方形网格中的位置如图所示. 若网格纸上小正方形的边长为 1, 则  $|4\mathbf{a} - 3\mathbf{b}| =$ \_\_\_\_\_.



(13) 已知函数  $f(x) = \begin{cases} (\frac{1}{2})^x, & x < \frac{1}{2}, \\ \log_2 x, & x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$ , 则  $f(-2) =$ \_\_\_\_\_;  $f(x)$  的最小值为\_\_\_\_\_.

(14) 某学校为了调查高一年级 600 名学生年平均阅读名著的情况，通过抽样，获得了 100 名学生年平均阅读名著的数量（单位：本），将数据按照  $[0,5), [5,10), [10,15), [15,20), [20,25]$  分成 5 组，制成了如图所示的频率分布直方图，则图中  $a$  的值为\_\_\_\_\_；估计高一年级年平均阅读名著的数量不少于 10 本的人数为\_\_\_\_\_.



(15) 已知函数  $f(x)$  的定义域为  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ , 满足  $f(-x) = f(x)$ , 且  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上是减函数, 则符合条件的函数的解析式可以是  $f(x) =$ \_\_\_\_\_。（写出一个即可）

(16) 已知定义在  $(0, +\infty)$  上的函数  $f(x) = |x + \frac{4}{x} - 5|$ , 则  $f(x)$  的零点是\_\_\_\_\_；若关于  $x$  的方程  $f(x) = m (m > 0)$  有四个不等实根  $x_1, x_2, x_3, x_4$ , 则  $x_1 x_2 x_3 x_4 =$ \_\_\_\_\_.

三、解答题共 5 小题，共 70 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

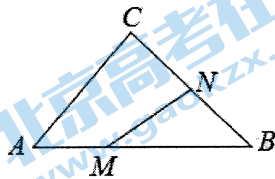
(17) (本小题满分 14 分)

如图，在  $\triangle ABC$  中， $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ ， $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ 。

设  $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$ ， $\overrightarrow{AC} = \mathbf{b}$ 。

(I) 用  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  表示  $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{MN}$ ；

(II) 若  $P$  为  $\triangle ABC$  内部一点，且  $\overrightarrow{AP} = \frac{5}{12}\mathbf{a} + \frac{1}{4}\mathbf{b}$ 。求证： $M, P, N$  三点共线。



(18) (本小题满分 14 分)

已知集合  $A = \{x | x^2 - 5x + 6 > 0\}$ 。

(I) 求  $\complement_{\mathbf{R}}A$ ；

(II) 若集合  $B = \{x | a < x < 2a\}$ ，且  $B \subseteq A$ ，求实数  $a$  的取值范围。

(19) (本小题满分 14 分)

为了践行“节能减排，绿色低碳”的发展理念，某企业加大了对生活垃圾处理项目的研发力度。经测算，企业每月平均处理生活垃圾的增量  $y$  (单位：吨) 与每月投入的研发费用  $x$  (单位：万元) 之间的函数关系式为  $y = \frac{6000x}{x^2 + 10x + 400}$ 。

(I) 若要求每月平均处理生活垃圾的增量不低于 100 吨，则每月投入的研发费用应该在什么范围？

(II) 当每月投入的研发费用  $x$  为多少时，每月平均处理生活垃圾的增量达到最大值？最大值是多少？

(20) (本小题满分 14 分)

2022 年 11 月 29 日 23 时 08 分, 搭载神舟十五号载人飞船的长征二号 F 遥十五运载火箭在酒泉卫星发射中心点火发射成功, 实现了两个飞行乘组首次太空“会师”. 下表记录了我国已发射成功的所有神舟飞船的发射时间和飞行时长.

| 名称    | 发射时间             | 飞行时长           |
|-------|------------------|----------------|
| 神舟一号  | 1999 年 11 月 20 日 | 21 小时 11 分     |
| 神舟二号  | 2001 年 1 月 10 日  | 6 天 18 小时 22 分 |
| 神舟三号  | 2002 年 3 月 25 日  | 6 天 18 小时 39 分 |
| 神舟四号  | 2002 年 12 月 30 日 | 6 天 18 小时 36 分 |
| 神舟五号  | 2003 年 10 月 15 日 | 21 小时 28 分     |
| 神舟六号  | 2005 年 10 月 12 日 | 4 天 19 小时 32 分 |
| 神舟七号  | 2008 年 9 月 25 日  | 2 天 20 小时 30 分 |
| 神舟八号  | 2011 年 11 月 1 日  | 16 天           |
| 神舟九号  | 2012 年 6 月 16 日  | 13 天           |
| 神舟十号  | 2013 年 6 月 11 日  | 15 天           |
| 神舟十一号 | 2016 年 10 月 17 日 | 32 天           |
| 神舟十二号 | 2021 年 6 月 17 日  | 3 个月           |
| 神舟十三号 | 2021 年 10 月 16 日 | 6 个月           |
| 神舟十四号 | 2022 年 6 月 5 日   | 6 个月           |
| 神舟十五号 | 2022 年 11 月 29 日 | 预计 6 个月        |

为帮助同学们了解我国神舟飞船的发展情况, 某学校“航天社团”准备通过绘画、海报、数据统计图表等形式宣传“神舟系列飞船之旅”.

- (I) 绘画组成员从表中所有的神舟飞船中随机选取 1 艘进行绘画, 求选中的神舟飞船的发射时间恰好是在 10 月份的概率;
- (II) 海报组成员从飞行时长 (包括预计飞行时长) 大于 30 天的神舟飞船中随机选取 2 艘制作海报, 求选中的神舟飞船的飞行时长 (包括预计飞行时长) 均为 6 个月的概率;
- (III) 数据统计组成员在 2022 年 5 月计算了已经完成飞行任务的神舟飞船的飞行时长平均值, 记为  $\mu_0$ . 2022 年 12 月 30 日又计算了已经完成飞行任务的神舟飞船的飞行时长平均值, 记为  $\mu_1$ . 试判断  $\mu_0$  和  $\mu_1$  的大小. (结论不要求证明)

(21) (本小题满分 14 分)

设有限集合  $E = \{1, 2, 3, \dots, N\}$ , 对于集合  $A \subseteq E$ ,  $A = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_m\}$ , 给出两个性质:

① 对于集合  $A$  中任意一个元素  $x_k$ , 当  $x_k \neq 1$  时, 在集合  $A$  中存在元素  $x_i, x_j (i \leq j)$ , 使得  $x_k = x_i + x_j$ , 则称  $A$  为  $E$  的封闭子集;

② 对于集合  $A$  中任意两个元素  $x_i, x_j (i \neq j)$ , 都有  $x_i + x_j \notin A$ , 则称  $A$  为  $E$  的开放子集.

(I) 若  $N = 20$ , 集合  $A = \{1, 2, 4, 6, 8, 10\}$ ,  $B = \{x \mid x = 3k + 1, k \leq 6, k \in \mathbf{N}^*\}$ , 判断集合  $A, B$  为  $E$  的封闭子集还是开放子集; (直接写出结论)

(II) 若  $N = 100$ ,  $1 \in A$ ,  $100 \in A$ , 且集合  $A$  为  $E$  的封闭子集, 求  $m$  的最小值;

(III) 若  $N \in \mathbf{N}^*$ , 且  $N$  为奇数, 集合  $A$  为  $E$  的开放子集, 求  $m$  的最大值.

一、选择题 (本大题共 10 小题, 每小题 5 分, 共 50 分. 在每小题列出的四个选项中, 选出符合题目要求的一项.)

|    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 答案 | B | A | D | C | B | A | C | B | C | C  |

二、填空题 (本大题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分.)

11. 8            12.  $\sqrt{10}$             13. 4; -1            14. 0.030; 150

15.  $\frac{1}{|x|}$  (答案不唯一)            16. 1, 4; 16

三、解答题 (本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.)

(17) (本小题满分 14 分)

解: (I)  $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ .

因为  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ , 所以  $\overrightarrow{MB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ .

因为  $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ ,

所以  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \frac{1}{6}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}$ . ..... 7 分

(II) 因为  $\overrightarrow{AP} = \frac{5}{12}\mathbf{a} + \frac{1}{4}\mathbf{b}$ ,

所以  $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AP} = -\frac{1}{3}\mathbf{a} + \frac{5}{12}\mathbf{a} + \frac{1}{4}\mathbf{b} = \frac{1}{12}\mathbf{a} + \frac{1}{4}\mathbf{b}$ .

因为  $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{6}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}$ ,

所以  $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$ .

所以 M, P, N 三点共线. .... 14 分

(18) (本小题满分 14 分)

解: (I) 因为  $A = \{x | x^2 - 5x + 6 > 0\} = \{x | x < 2 \text{ 或 } x > 3\}$ ,

所以  $\complement_{\mathbb{R}}A = \{x | 2 \leq x \leq 3\}$ . .... 6 分

(II) 由集合  $B = \{x | a < x < 2a\}$ ,  $B \subseteq A$ ,

若  $B = \emptyset$ , 则  $a \geq 2a$ , 即  $a \leq 0$  时, 满足  $B \subseteq A$ ;

若  $B \neq \emptyset$ , 则  $\begin{cases} a < 2a, \\ 2a \leq 2 \end{cases}$  或  $\begin{cases} a < 2a, \\ a \geq 3. \end{cases}$

解得  $0 < a \leq 1$  或  $a \geq 3$ .

综上, 实数 a 的取值范围为  $(-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$ . .... 14 分

(19) (本小题满分 14 分)

解: (I) 根据题意,  $y = \frac{6000x}{x^2 + 10x + 400} \geq 100$ ,

因为  $x > 0$ ,  $6000x \geq 100(x^2 + 10x + 400)$ , 化简, 得  $x^2 - 50x + 400 \leq 0$ ,  
解得  $10 \leq x \leq 40$ .

所以每月投入的研发费用的范围是  $[10, 40]$  万元. .... 7 分

(II) 因为  $x > 0$ , 所以  $y = \frac{6000x}{x^2 + 10x + 400} = \frac{6000}{x + 10 + \frac{400}{x}}$ .

因为  $x + \frac{400}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{400}{x}} = 40$ , 当且仅当  $x = \frac{400}{x}$  时, 即  $x = 20$  时,  $x + \frac{400}{x}$  取得最小值 40.

所以, 当且仅当  $x = 20$  时,  $y$  取得最大值 120.

所以每月投入的研发费用为 20 万元时, 每月平均处理生活垃圾的增量达到最大值, 最大值是 120 吨. .... 14 分

(20) (本小题满分 14 分)

解: (I) 记名称为神舟第  $i$  号飞船为  $a_i$ , 则“从表中所有的神舟飞船中随机选取 1 艘”的样本空间为  $\Omega_1 = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15}\}$ , 共 15 个样本点.

设“神舟飞船的发射时间恰好是在 10 月份”为事件  $A$ ,

则  $A = \{a_5, a_6, a_{11}, a_{13}\}$ , 共 4 个样本点, 所以  $P(A) = \frac{4}{15}$ . .... 5 分

(II) “从飞行时长(包括预计飞行时长)大于 30 天的神舟飞船中随机选取 2 艘”的样本空间为  $\Omega_2 = \{(a_{11}, a_{12}), (a_{11}, a_{13}), (a_{11}, a_{14}), (a_{11}, a_{15}), (a_{12}, a_{13}), (a_{12}, a_{14}), (a_{12}, a_{15}), (a_{13}, a_{14}), (a_{13}, a_{15}), (a_{14}, a_{15})\}$ , 共 10 个样本点.

设“选中的神舟飞船的飞行时长(包括预计飞行时长)均为 6 个月”为事件  $B$ ,

则  $B = \{(a_{13}, a_{14}), (a_{13}, a_{15}), (a_{14}, a_{15})\}$ , 共 3 个样本点.

所以  $P(B) = \frac{3}{10}$ . .... 11 分

(III)  $\mu_0 < \mu_1$ . .... 14 分

(21) (本小题满分 14 分)

解: (I) 集合  $A$  为  $E$  的封闭子集, 集合  $B$  为  $E$  的开放子集. .... 4 分

(II) 因为集合  $A$  为  $E$  的封闭子集, 且  $x_1 = 1, x_m = 100$ .

可知集合  $\{1, 2, 3, 5, 10, 20, 25, 50, 100\}$  满足题意, 所以  $m \geq 9$ .

若  $m = 8$ , 即  $A = \{1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, 100\}$ ,

且  $1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 < x_6 < x_7 < 100$ .

所以  $x_2 = 2x_1 = 2, x_3 \leq 2x_2 = 4, x_4 \leq 2x_3 = 8$ ,

$x_5 \leq 2x_4 = 16, x_6 \leq 2x_5 = 32, x_7 \leq 2x_6 = 64$ ,



所以  $x_6 + x_7 \leq 32 + 64 = 96 < 100$ ,

所以  $x_8 = 100 = 2x_7$ , 得出  $x_7 = 50$ .

同理,  $x_5 + x_6 \leq 48 < 50$ , 所以,  $x_6 = 25$ .

同理,  $x_4 + x_5 \leq 24 < 25$ , 所以,  $x_5 = \frac{25}{2}$ , 与已知矛盾.

综上,  $m$  的最小值为 9. .... 9 分

(Ⅲ) 因为  $N \in \mathbf{N}^*$  且  $N$  为奇数, 所以存在  $n \in \mathbf{N}^*$ , 使  $N = 2n + 1$ .

设满足条件的集合  $A$  中有  $k$  个奇数,  $k \leq n + 1$ , 不妨设为  $x_1 > x_2 > x_3 > \dots > x_k$ .

所以,  $x_1 - x_2 < x_1 - x_3 < \dots < x_1 - x_k$ , 且都不在  $A$  中, 这样的偶数共有  $k - 1$  个.

所以集合  $A$  中至多有  $n - (k - 1)$  个偶数,

所以集合  $A$  的元素个数  $m \leq k + n - (k - 1) = n + 1$ .

又因为  $A = \{1, 3, 5, \dots, 2n + 1\}$ , 则集合  $A$  为  $E$  的开放子集, 且满足题意,

所以  $m$  的最大值为  $n + 1$ , 即  $m$  的最大值为  $\frac{N + 1}{2}$ . .... 14 分

## 关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯