2024 届高三数学试题(文科)

考生注意:

1. 本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分,共 150 分。考试时间 120 分钟。
2. 请将各题答案填写在答题卡上。
3. 本试卷主要考试内容:高考全部内容。

第Ⅰ卷

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 复数 $z=2i(3-i)$ 的共轭复数 $\bar{z}=$

A. $-2+6i$　　B. $-2-6i$　　C. $2+6i$　　D. $2-6i$

2. 已知集合 $A=\{x||x-2|\leqslant 3\}$,$B=\{x|y=\frac{1}{\sqrt{x-1}}\}$,则 $A\cup B=$

A. $(1,+\infty)$　　B. $[-1,+\infty)$　　C. $(1,5]$　　D. $[-1,5]$

3. $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c. 已知 $a=3,b=2,\sin A=\frac{2}{3}$,则 $\cos B=$

A. $\frac{\sqrt{65}}{9}$　　B. $-\frac{\sqrt{65}}{9}$　　C. $\frac{4}{9}$　　D. $\pm\frac{\sqrt{65}}{9}$

4. 已知非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=3|\boldsymbol{b}|$,且 $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})$,则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 夹角的余弦值为

A. $\frac{1}{12}$　　B. $\frac{1}{6}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{3}$

5. 已知 l,m,n 是三条不重合的直线,α,β,γ 是三个不重合的平面,则下列结论正确的是

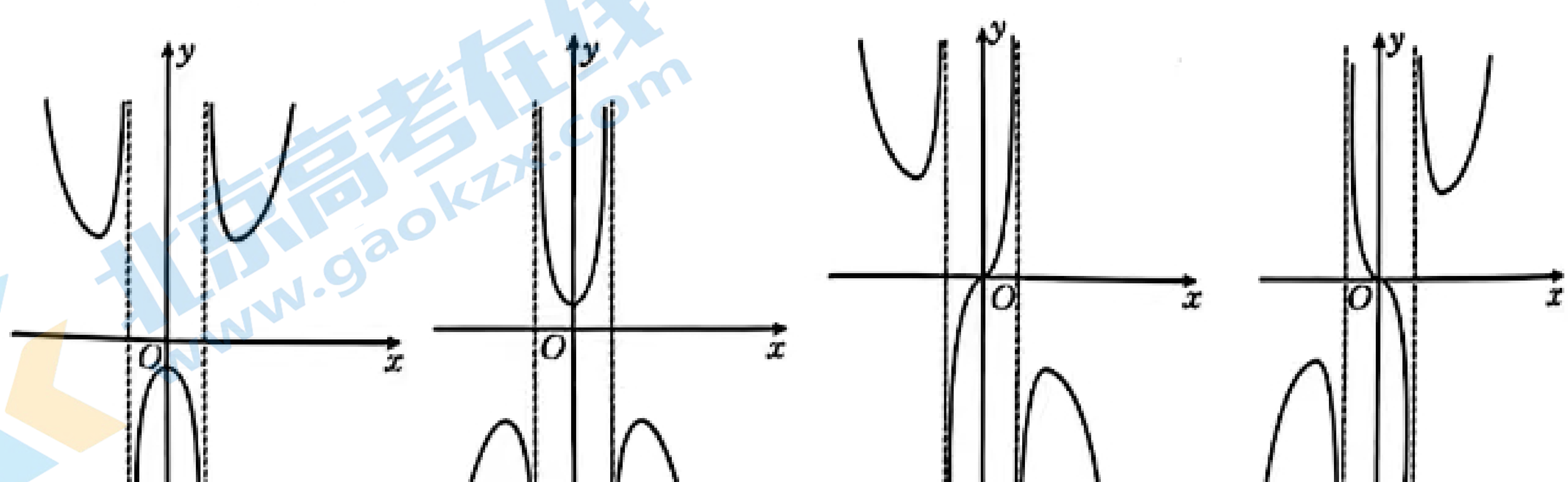
A. 若 $l/\!/\alpha,\alpha/\!/\beta$,则 $l/\!/\beta$

B. 若 $\alpha\cap\beta=l,m/\!/l$,则 $m/\!/\alpha$ 且 $m/\!/\beta$

C. 若 $l\perp m,l\perp n,m\subset\alpha,n\subset\alpha$,则 $l\perp\alpha$

D. 若 $\alpha\cap\beta=l,\alpha\perp\gamma,\beta\perp\gamma$,则 $l\perp\gamma$

6. 函数 $f(x)=\frac{3^x+3^{-x}}{x^2-1}$ 的图象大致为

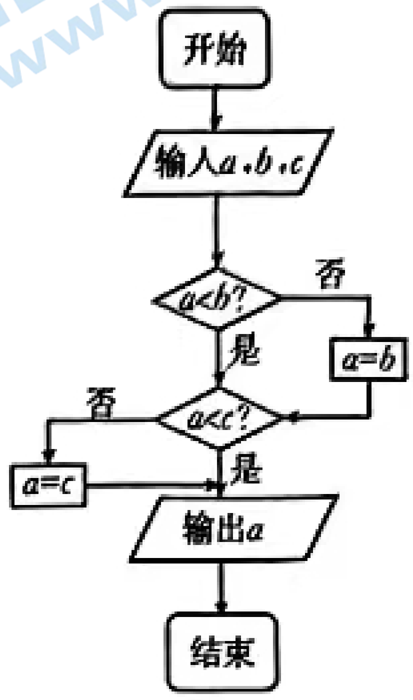


A　　B　　C　　D

一组数据 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n$ 的平均数和标准差分别为 3 和 1，另一组数据 $ax_1+b,ax_2+b,ax_3+b,\cdots,ax_n+b$（其中 $a>0$）的平均数和标准差分别为 10 和 4，则 $a^b=$

A. 16　　B. 8　　C. $\frac{1}{16}$　　D. $\frac{1}{8}$

8.执行如图所示的程序框图，若输入的值为 $a=0.3^{0.2}$，$b=0.2^{0.3}$，$c=-\log_{0.2}0.3$，则输出的值为



A. $\log_{0.2}0.3$

B. $0.3^{0.2}$

C. $0.2^{0.3}$

D. $-\log_{0.2}0.3$

9.已知函数 $f(x)=2^x+\sqrt{x}-4$，若存在 $x_1<x_2$，使得 $f(x_1)f(x_2)<0$，则下列结论不正确的是

A. $x_1<1$

B. $x_2>1$

C. $f(x)$在(x_1,x_2)内有零点

D. 若 $f(x)$在$(x_1,\frac{x_1+x_2}{2})$内有零点，则 $f(\frac{x_1+x_2}{2})>0$

10.当两个变量呈非线性相关时，有些可以通过适当的转换进行线性相关化，比如反比例关系 $y=\frac{k}{x}$，可以设一个新的变量 $z=\frac{1}{x}$，这样 y 与 z 之间就是线性关系. 下列表格中的数据可以用非线性方程 $y=0.14\hat{x}^2+\hat{b}$ 进行拟合，

x	1	2	3	4	5	6
y	2.5	3.6	4.4	5.4	6.6	7.5

用线性回归的相关知识，可求得 $\hat{b}$ 的值约为

A. 2.98　　B. 2.88　　C. 2.78　　D. 2.68

11.若函数 $f(x)=2\sin^2(\frac{\omega x}{2}-\frac{\pi}{4})+\sqrt{3}\sin(\omega x+\frac{\pi}{6})-2(\omega>0)$在$[0,\pi]$上恰有两个零点，则 ω 的取值范围为

A. $[\frac{5}{3},\frac{8}{3})$　　B. $(\frac{5}{3},\frac{8}{3}]$　　C. $[\frac{13}{6},\frac{25}{6})$　　D. $(\frac{13}{6},\frac{25}{6}]$

12.我们把形如 $C_1:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$和 $C_2:\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1(a>0,b>0)$的两个双曲线叫做共轭双曲线. 设共轭双曲线 C_1,C_2 的离心率分别为 e_1,e_2，则当$\frac{2}{e_1}+\frac{3}{e_2}$取得最大值时，$e_1=$

A. $\frac{\sqrt{13}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{13}}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{13}}{6}$　　D. $\frac{\sqrt{13}}{13}$

第Ⅱ卷

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 把答案填在答题卡中的横线上.

13.已知实数 x,y 满足约束条件$\begin{cases}x+y-4\leqslant 0,\\x-1\geqslant 0,\\y-1\geqslant 0,\end{cases}$则其表示的封闭区域的面积为___▲___.

14. 已知抛物线 $E:y^2=8x$ 的焦点为 F,$M(x_0,y_0)$是 E 上一点,且$|MF|=\frac{4x_0}{3}$,则 $x_0=$ ▲ .

15. 一个封闭的玻璃圆锥容器 AO 内装有部分水(如图 1),此时水面与线段 AO 交于点 B,将其倒置后(如图 2),水面与线段 AO 还是交于点 B,则$(\frac{AB}{AO})^3=$ ▲ .

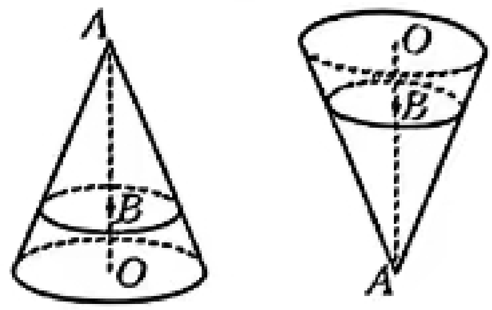


图 1　　图 2

16. 已知 α,β 分别是函数 $f(x)=x+e^x-xe^x$ 和 $g(x)=x+\ln x-x\ln x$ 的零点,且 $\alpha>1,\beta>e$,则$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=$ ▲ .

三、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17～21 题为必考题,每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题,考生根据要求作答.

(一)必考题:共 60 分.

17.(12 分)

已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1+\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+\cdots+\frac{a_n}{n}=n\cdot 2^{n+1}$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式;

(2)求数列$\{\frac{a_n}{2n+2}\}$的前 n 项和 T_n.

18.(12 分)

为了防止注册账号被他人非法登录,某系统在账号登录前,要先输入验证码. 已知该系统登入设置的每个验证码均由有序数字串 abc 组成,其中 $a,b,c\in\{1,2,3\}$,某人非法登录一个账号,任选一组验证码输入.

(1)求这个人输入的验证码恰有两位正确的概率;

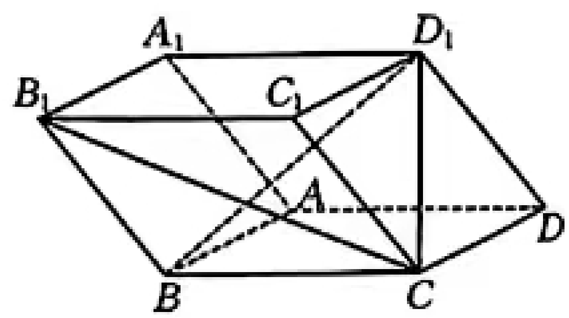
(2)若这个人通过技术获得了验证码的第一位数,求这个人输入的验证码正确的概率.

19.(12 分)

如图,在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,底面 $ABCD$ 和侧面 ABB_1A_1 均是边长为 2 的正方形.

(1)证明:$BD_1\perp B_1C$.

(2)若$\angle B_1BC=120°$,求点 C_1 到平面 BCD_1 的距离.



20.(12分)

已知函数 $f(x)=x(\ln x-a)+\ln x+a$.

(1)若 $a=1$，当 $x>1$ 时，证明：$f(x)>0$.

(2)若 $a<2$，证明：$f(x)$恰有一个零点.

21.(12分)

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{3}$，且椭圆 C 的短轴长为 $2\sqrt{6}$.

(1)求椭圆 C 的方程.

(2)设 P 是椭圆 C 上第一象限内的一点，A 是椭圆 C 的左顶点，B 是椭圆 C 的上顶点，直线 PA 与 y 轴相交于点 M，直线 PB 与 x 轴相交于点 N. 记$\triangle ABN$ 的面积为 S_1，$\triangle AMN$ 的面积为 S_2. 证明：$|S_1-S_2|$为定值.

22.(二)选考题：共10分.请考生在第22、23题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分.

[选修 4—4：坐标系与参数方程](10 分)

已知曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=\cos\theta+\sin\theta,\\ y=\cos\theta-\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数），直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=\frac{1}{2}+t\cos\alpha,\\ y=\frac{1}{2}+t\sin\alpha\end{cases}$（$t$ 为参数），l 与 C 相交于 A，B 两点.

(1)求曲线 C 的普通方程；

(2)设 $M(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，证明：$|MA|\cdot|MB|$为定值.

[选修 4—5：不等式选讲](10 分)

已知正实数 a,b,c 满足 $a^2+b^2+c^2=3$.

(1)若 $a=1$，证明：$\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geq 2$.

(2)求 $ab+bc+ca$ 的最大值.

2024 届高三数学试题参考答案(文科)

1. D　$z=2i(3-i)=6i-2i^2=2+6i$,则 $\bar{z}=2-6i$.

2. B　由 $|x-2|\leqslant 3$,得 $-1\leqslant x\leqslant 5$,所以 $A=[-1,5]$. 因为 $B=(1,+\infty)$,所以 $A\cup B=[-1,+\infty)$.

3. A　由正弦定理知,$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$,则 $\sin B=\dfrac{4}{9}$. 因为 $b<a$,所以 $\cos B=\sqrt{1-\sin^2 B}=\dfrac{\sqrt{65}}{9}$.

4. B　因为 $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})$,所以 $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-8\boldsymbol{b}^2=\boldsymbol{b}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$. 设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ,则 $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{\frac{1}{2}\boldsymbol{b}^2}{3\boldsymbol{b}^2}=\dfrac{1}{6}$.

5. D　若 $l/\!/\alpha,\alpha/\!/\beta$,则可能 $l\subset\beta$,A 不正确. 若 $\alpha\cap\beta=l,m/\!/l$,则可能有 $m\subset\alpha$ 或 $m\subset\beta$,B 不正确. 若 $m/\!/n$,则 l 与 α 的位置关系不确定,C 不正确. 若 $\alpha\cap\beta=l,\alpha\perp\gamma,\beta\perp\gamma$,则 $l\perp\gamma$,D 正确.

6. A　$f(-x)=\dfrac{3^{-x}+3^x}{x^2-1}=f(x)$,所以 $f(x)$ 为偶函数,图象关于 y 轴对称,排除 C,D. 当 $0<x<1$ 时,$f(x)<0$,排除 B. 故选 A.

7. C　由题可知,$\begin{cases}3a+b=10,\\a=4,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=4,\\b=-2,\end{cases}$ 则 $a^b=4^{-2}=\dfrac{1}{16}$.

8. D　执行程序框图可知,输出的值为最小值,因为 $a=0.3^{0.2}>0,b=0.2^{0.3}>0,c=-\log_{0.2}0.3=\log_5 0.3<\log_5 1=0$,所以输出的值为 $-\log_{0.2}0.3$.

9. A　因为 $f(x)=2^x+\sqrt{x}-4$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增,且 $x_1<x_2,f(x_1)f(x_2)<0$,
所以 $f(x_1)<0,f(x_2)>0$,则函数 $f(x)$ 在 (x_1,x_2) 内有零点,
又因为 $f(1)=-1<0$,所以 $x_2>1$,
若函数 $f(x)$ 在 $(x_1,\dfrac{x_1+x_2}{2})$ 内有零点,则 $f(\dfrac{x_1+x_2}{2})>0$.

10. B　设 $z=x^2$,则 $y=0.14z+\hat{b}$,则

z	1	4	9	16	25	36
y	2.5	3.6	4.4	5.4	6.6	7.5

则 $\bar{z}=\dfrac{1+4+9+16+25+36}{6}=\dfrac{91}{6},\bar{y}=\dfrac{2.5+3.6+4.4+5.4+6.6+7.5}{6}=5$,

则 $\hat{b}=\bar{y}-0.14\bar{z}=5-0.14\times\dfrac{91}{6}\approx 2.88$.

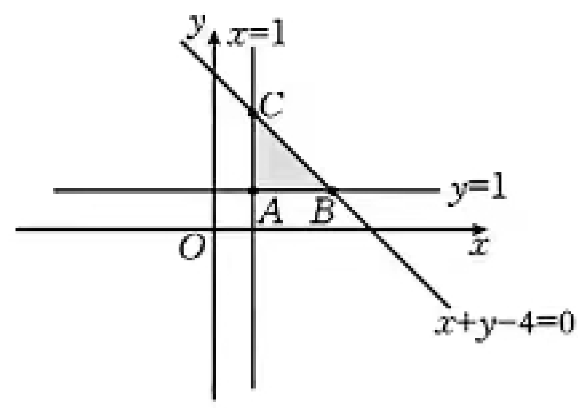
11. C　$f(x)=2\sin^2(\dfrac{\omega x}{2}-\dfrac{\pi}{4})+\sqrt{3}\sin(\omega x+\dfrac{\pi}{6})-2=\dfrac{1}{2}\sin\omega x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\omega x-1=\sin(\omega x+\dfrac{\pi}{3})-1$,令 $f(x)=0$,得 $\sin(\omega x+\dfrac{\pi}{3})=1$,由 $0\leqslant x\leqslant\pi$,得 $\dfrac{\pi}{3}\leqslant\omega x+\dfrac{\pi}{3}\leqslant\omega\pi+\dfrac{\pi}{3}$. 因为 $\sin(\omega x+\dfrac{\pi}{3})=1$ 恰有两解,所以 $\dfrac{5\pi}{2}\leqslant\omega\pi+\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{9\pi}{2}$,解得 $\dfrac{13}{6}\leqslant\omega<\dfrac{25}{6}$.

12. A　由题意可知 $\begin{cases} e_1=\dfrac{c}{a}, \\ e_2=\dfrac{c}{b}, \end{cases}$ 则 $\dfrac{2}{e_1}+\dfrac{3}{e_2}=\dfrac{2a}{c}+\dfrac{3b}{c}=\dfrac{2a+3b}{c}$. 由 $c^2=a^2+b^2$，可设 $\begin{cases} a=c\cos\theta, \\ b=c\sin\theta \end{cases}$ $(0<\theta<\dfrac{\pi}{2})$，则 $\dfrac{2}{e_1}+\dfrac{3}{e_2}=\dfrac{2c\cos\theta+3c\sin\theta}{c}=3\sin\theta+2\cos\theta=\sqrt{13}\sin(\theta+\varphi)$，

其中 $\begin{cases} \cos\varphi=\dfrac{3}{\sqrt{13}}, \\ \sin\varphi=\dfrac{2}{\sqrt{13}} \end{cases}$ $(0<\varphi<\dfrac{\pi}{2})$. 当 $\theta+\varphi=\dfrac{\pi}{2}$，即 $\theta=\dfrac{\pi}{2}-\varphi$ 时，$\dfrac{2}{e_1}+\dfrac{3}{e_2}$ 取得最大值 $\sqrt{13}$，

此时 $e_1=\dfrac{c}{a}=\dfrac{c}{c\cos\theta}=\dfrac{1}{\cos\theta}=\dfrac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}-\varphi)}=\dfrac{1}{\sin\varphi}=\dfrac{\sqrt{13}}{2}$.

13. 2　根据约束条件作出的平面区域图如图所示，其中 $A(1,1)$，$B(3,1)$，$C(1,3)$，则 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}|AB|\cdot|AC|=\dfrac{1}{2}\times2\times2=2$，故封闭区域的面积为 2.



14. 6　由题可知，$|MF|=x_0+\dfrac{p}{2}=x_0+2=\dfrac{4x_0}{3}$，解得 $x_0=6$.

15. $\dfrac{1}{2}$　由题意知，在图 1 中，圆锥 AB 的体积是圆锥 AO 体积的一半，分别设圆 B，圆 O 的半径为 r_1，r_2，则 $\dfrac{V_{AB}}{V_{AO}}=\dfrac{\frac{1}{3}\pi r_1^2\cdot AB}{\frac{1}{3}\pi r_2^2\cdot AO}=(\dfrac{AB}{AO})^3=\dfrac{1}{2}$.

16. 1　由题意可得 $\alpha+e^{\alpha}-\alpha e^{\alpha}=0$，$\beta+\ln\beta-\beta\ln\beta=0$. $f'(x)=1+e^x-(1+x)e^x=1-xe^x$，当 $x>1$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，$f(\ln\beta)=\beta+\ln\beta-\beta\ln\beta$. 因为 $\alpha>1$，$\ln\beta>\ln e=1$，所以 $\alpha=\ln\beta$，所以 $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\dfrac{\beta+\ln\beta}{\beta\ln\beta}=1$.

17. 解：(1) 当 $n=1$ 时，$a_1=4$. ………………………………………………… 1 分

当 $n\geqslant2$ 时，由 $a_1+\dfrac{a_2}{2}+\dfrac{a_3}{3}+\cdots+\dfrac{a_n}{n}=n\cdot2^{n+1}$，得 $a_1+\dfrac{a_2}{2}+\dfrac{a_3}{3}+\cdots+\dfrac{a_{n-1}}{n-1}=(n-1)\cdot2^n$，
………………………………………………………………………… 2 分

则 $\dfrac{a_n}{n}=n\cdot2^{n+1}-(n-1)\cdot2^n=(n+1)\cdot2^n$，则 $a_n=n(n+1)\cdot2^n$，……………… 5 分

因为 a_1 也符合上式，所以 $a_n=n(n+1)\cdot2^n$. ………………………………… 6 分

(2) 由 (1) 可知，$\dfrac{a_n}{2n+2}=n\cdot2^{n-1}$，………………………………………… 7 分

则 $T_n=1\times2^0+2\times2^1+3\times2^2+\cdots+n\cdot2^{n-1}$，……………………………… 8 分

则 $2T_n=1\times2^1+2\times2^2+3\times2^3+\cdots+n\cdot2^n$，……………………………… 9 分

两式相减得 $-T_n=2^0+2^1+2^2+\cdots+2^{n-1}-n\cdot 2^n=\dfrac{2^0-2^n}{1-2}-n\cdot 2^n=-1+(1-n)\cdot 2^n$，…………………………………………………………………………………………………… 11 分

则 $T_n=(n-1)\cdot 2^n+1$. …………………………………………………………………… 12 分

18. 解：(1)由题可知，所有的验证码包括 111，112，113，121，122，123，131，132，133，211，212，213，221，222，223，231，232，233，311，312，313，321，322，323，331，332，333，共 27 种. ……………………………………………………………………………………………… 2 分

不妨设正确的验证码为 111，则恰有两位正确的验证码包括 112，113，121，131，211，311，共 6 种，………………………………………………………………………………………… 4 分

故这个人输入的验证码恰有两位正确的概率为 $\dfrac{6}{27}=\dfrac{2}{9}$. …………………………………… 6 分

(2)不妨设正确的验证码为 111，这个人通过技术获得的验证码的第一位数为 1，则这个人输入的验证码可能为 111，112，113，121，122，123，131，132，133，共 9 种，……………… 9 分

则这个人输入的验证码正确的概率为 $\dfrac{1}{9}$. ……………………………………………… 12 分

19. (1)证明：连接 BC_1，因为底面 $ABCD$ 和侧面 ABB_1A_1 均为正方形，所以四边形 BCC_1B_1 为菱形，则 $BC_1\perp B_1C$. ……………………………………………………………………… 1 分

由底面 $ABCD$ 和侧面 CDD_1C_1 均为正方形，得 $C_1D_1\perp B_1C_1$，$C_1D_1\perp CC_1$. …………… 2 分

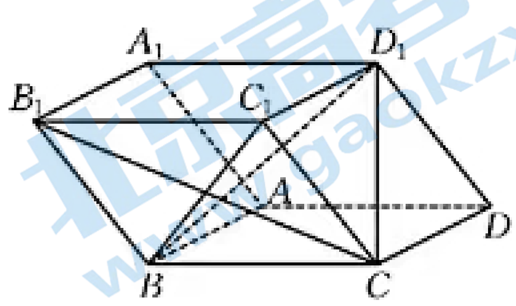
因为 $B_1C_1\cap CC_1=C_1$，所以 $C_1D_1\perp$ 平面 BCC_1B_1. ……………………………………… 3 分

又 $B_1C\subset$ 平面 BCC_1B_1，所以 $C_1D_1\perp B_1C$. ……………………………………………… 4 分

因为 $BC_1\cap C_1D_1=C_1$，所以 $B_1C\perp$ 平面 BC_1D_1. ……………………………………… 5 分

又 $BD_1\subset$ 平面 BC_1D_1，所以 $BD_1\perp B_1C$. ……………………………………………… 6 分

(2)解：因为 $\angle B_1BC=120°$，$BC=BB_1=2$，所以 $S_{\triangle BCC_1}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2=\sqrt{3}$. …………………………………………………………………… 7 分



又 $C_1D_1\perp$ 平面 BCC_1B_1，所以 $V_{D_1\text{-}BCC_1}=\dfrac{1}{3}\times S_{\triangle BCC_1}\times C_1D_1=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. ……………………………………………………………………………… 8 分

$CD_1=\sqrt{C_1D_1^2+CC_1^2}=2\sqrt{2}$，$BD_1=\sqrt{C_1D_1^2+BC_1^2}=2\sqrt{2}$，……………………………… 9 分

则 $S_{\triangle BCD_1}=\dfrac{1}{2}\times 2\times\sqrt{7}=\sqrt{7}$. ……………………………………………………… 10 分

设点 C_1 到平面 BCD_1 的距离为 d，则 $V_{C_1\text{-}BCD_1}=\dfrac{1}{3}\times S_{\triangle BCD_1}\times d=\dfrac{\sqrt{7}d}{3}$，……………… 11 分

则 $\dfrac{\sqrt{7}d}{3}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，解得 $d=\dfrac{2\sqrt{21}}{7}$，即点 C_1 到平面 BCD_1 的距离为 $\dfrac{2\sqrt{21}}{7}$. ……………… 12 分

20. 证明：(1)因为 $a=1$，所以 $f(x)=x\ln x-x+\ln x+1$，$f'(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}$. ……………… 1 分

当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，………………………………………… 3 分

所以当 $x>1$ 时，$f(x)>f(1)=0$. ………………………………………………………………… 4 分

(2) $f(x)=x(\ln x-a)+\ln x+a=x(\ln x-a+\frac{\ln x}{x}+\frac{a}{x})$. ……………………………… 5 分

令 $g(x)=\ln x-a+\frac{\ln x}{x}+\frac{a}{x}$，则 $g'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1-\ln x}{x^2}-\frac{a}{x^2}=\frac{x+1-\ln x-a}{x^2}$. ……… 6 分

令 $h(x)=x+1-\ln x-a$，则 $h'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$. ……………………………………… 7 分

当 $x\in(0,1)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，…………………………………………………………………………… 8 分

所以 $h(x)\geqslant h(1)=2-a>0$，所以 $g'(x)=\frac{x+1-\ln x-a}{x^2}>0$，……………………………… 9 分

则 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. …………………………………………………………… 10 分

因为 $g(1)=0$，所以 $g(x)$ 恰有一个零点，则 $f(x)$ 恰有一个零点. ……………………………… 12 分

21. (1)解：由题可知，$\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3},\\ 2b=2\sqrt{6},\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$ ……………………………………………………………… 2 分

解得 $\begin{cases}a=3,\\ b=\sqrt{6},\\ c=\sqrt{3},\end{cases}$ ………………………………………………………………………………… 3 分

故椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{6}=1$. ………………………………………………………… 4 分

(2)证明：设 $P(x_0,y_0)$，则直线 PA 的方程为 $y=\frac{y_0}{x_0+3}(x+3)$，令 $x=0$，得 $M(0,\frac{3y_0}{x_0+3})$.

……………………………………………………………………………………………………… 5 分

直线 PB 的方程为 $y=\frac{y_0-\sqrt{6}}{x_0}x+\sqrt{6}$，令 $y=0$，得 $N(\frac{-\sqrt{6}x_0}{y_0-\sqrt{6}},0)$. ……………… 6 分

$S_1=\frac{1}{2}|AN||OB|=\frac{\sqrt{6}}{2}|3-\frac{\sqrt{6}x_0}{y_0-\sqrt{6}}|$，$S_2=\frac{1}{2}|3-\frac{\sqrt{6}x_0}{y_0-\sqrt{6}}||\frac{3y_0}{x_0+3}|$，……………… 7 分

$|S_1-S_2|=\frac{1}{2}|3-\frac{\sqrt{6}x_0}{y_0-\sqrt{6}}||\sqrt{6}-\frac{3y_0}{x_0+3}|=\frac{1}{2}|\frac{3y_0-3\sqrt{6}-\sqrt{6}x_0}{y_0-\sqrt{6}}\cdot\frac{\sqrt{6}x_0+3\sqrt{6}-3y_0}{x_0+3}|$

$=\frac{1}{2}|\frac{6x_0^2+9y_0^2-18\sqrt{6}y_0-6\sqrt{6}x_0y_0+36x_0+54}{x_0y_0+3y_0-\sqrt{6}x_0-3\sqrt{6}}|$. …………………………………… 9 分

由 $\frac{x_0^2}{9}+\frac{y_0^2}{6}=1$，得 $6x_0^2+9y_0^2=54$，则 $\frac{1}{2}|\frac{6x_0^2+9y_0^2-18\sqrt{6}y_0-6\sqrt{6}x_0y_0+36x_0+54}{x_0y_0+3y_0-\sqrt{6}x_0-3\sqrt{6}}|$

$=\frac{1}{2}|\frac{108-18\sqrt{6}y_0-6\sqrt{6}x_0y_0+36x_0}{x_0y_0+3y_0-\sqrt{6}x_0-3\sqrt{6}}|=3\sqrt{6}$. ……………………………………………… 11 分

故$|S_1-S_2|$为定值. ………………………………………………………………………………… 12分

22.(1)解:由$\begin{cases}x=\cos\theta+\sin\theta,\\y=\cos\theta-\sin\theta,\end{cases}$得$\begin{cases}x^2=1+2\cos\theta\sin\theta,\\y^2=1-2\cos\theta\sin\theta,\end{cases}$ ………………………………… 3分

则$x^2+y^2=2$,即曲线C的普通方程为$x^2+y^2=2$. ……………………………………… 5分

(2)证明:将l的参数方程代入曲线C的普通方程,

得$(\frac{1}{2}+t\cos\alpha)^2+(\frac{1}{2}+t\sin\alpha)^2=2$,整理得$2t^2+2(\cos\alpha+\sin\alpha)t-3=0$, …………… 7分

则$t_1t_2=-\frac{3}{2}$. ……………………………………………………………………………… 8分

$|MA|\cdot|MB|=|t_1|\cdot|t_2|=|t_1t_2|=\frac{3}{2}$,则$|MA|\cdot|MB|$为定值,证毕. …………… 10分

23.(1)证明:由$a=1$,得$b^2+c^2=2$, ……………………………………………………… 1分

则$\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{2}(b^2+c^2)(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2})=1+\frac{c^2}{2b^2}+\frac{b^2}{2c^2}\geqslant 2$, ……………………………………… 4分

当且仅当$b=c=1$时,等号成立,证毕. ……………………………………………………… 5分

(2)解:因为$ab\leqslant\frac{1}{2}(a^2+b^2)$,$bc\leqslant\frac{1}{2}(b^2+c^2)$,$ac\leqslant\frac{1}{2}(a^2+c^2)$, ………………………… 8分

当且仅当$a=b=c=1$时,等号成立, ……………………………………………………… 9分

所以$ab+bc+ac\leqslant a^2+b^2+c^2=3$,即$ab+bc+ca$的最大值为3. ……………………… 10分