2022 届高三·十一月·九校联考

数学试题

命题人：深圳市高级中学　审题人：深圳市高级中学

（满分 150 分. 考试时间 150 分钟.）

注意事项：

1. 答题前，考生务必用黑色字迹的钢笔或签字笔将自己的姓名和考生号、考场号、座位号填写在答题卡上. 并用 2B 铅笔将对应的信息点涂黑，不按要求填涂的，答卷无效.
2. 选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案，答案不能答在试卷上.
3. 非选择题必须用黑色字迹钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案，不准使用铅笔和涂改液. 不按以上要求作答的答案无效.
4. 考生必须保持答题卡的整洁，考试结束后，只需将答题卡交回.

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知 $z=1-i$（其中 i 为虚数单位），则 $z\left(\bar{z}+i\right)=$

A. $-1+i$　　B. $3+i$　　C. $1-i$　　D. $3-i$

2. 设集合 $A=\{(x,y)\mid x+y=6\}$，$B=\left\{(x,y)\mid y=x^2\right\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{(2,4)\}$　　B. $\{(-3,9)\}$　　C. $\{(2,4),(-3,9)\}$　　D. $\varnothing$

3. 已知 $a\in R$，则“$a>1$”是“$\frac{1}{a}<1$”的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件　　C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. 小华在学习绘画时，对古典装饰图案产生了浓厚的兴趣，拟以矢量图（也称为面向对象的图象或绘图图象，在数学上定义为一系列由线连接的点，是根据几何特性绘制的图形）的模式精细地素描以下古典装饰图案，经过研究，小华发现该图案可以看成是一个边长为 4 的等边三角形 ABC，如图 1，上边中间莲花形的两端恰好都是 AB 边的四等分点（E、F 点），则 $\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{CF}=$

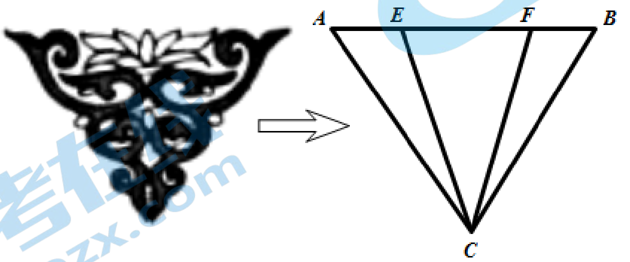


图 1

A. 11　　B. 12　　C. 9　　D. 16

5. 已知函数 $f(x)=\sin(2x+\varphi)$ 的部分图象如图 2 所示，且经过点 $A(\frac{\pi}{4},\frac{\sqrt{3}}{2})$，则

A. $f(x)$ 关于点 $(\frac{\pi}{3},0)$ 对称　　　　B. $f(x)$ 关于直线 $x=\frac{\pi}{3}$ 对称

C. $f(x+\frac{\pi}{6})$ 为偶函数　　　　D. $f(x+\frac{\pi}{12})$ 为奇函数

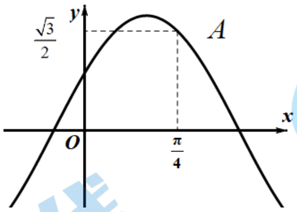


图 2

6. 已知 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，$a_1=-2$，$a_{n+1}=S_n$，那么 $a_6=$

A. -64　　B. -32　　C. -16　　D. -8

7. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别是 F_1、F_2，离心率为 $\frac{1}{2}$，点 A 是椭圆上位于 x 轴上方的一点，且 $|AF_1|=|F_1F_2|$，则直线 AF_1 的斜率为

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. 1

8. 已知 $a,b,c\in(0,1)$，且 $a^2-2\ln a-1=\frac{\ln 3}{3}$，$b^2-2\ln b-1=\frac{1}{e}$，

$c^2-2\ln c-1=\frac{\ln\pi}{\pi}$，则

A. $c>b>a$　　B. $a>c>b$　　C. $a>b>c$　　D. $c>a>b$

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 为了解某地农村经济情况，对该地农户家庭年收入进行抽样调查，将农户家庭年收入调查数据整理得到如下频率分布直方图（图 3）：

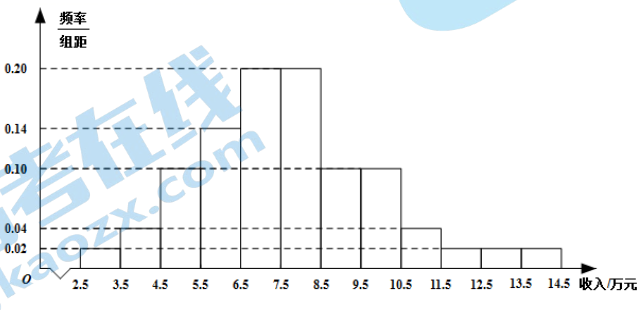


图 3

根据此频率分布直方图，下面结论中正确的是

A. 该地农户家庭年收入低于 4.5 万元的农户比率估计为 6%

B. 该地农户家庭年收入的中位数约为 7.5 万元

C. 估计该地有一半以上的农户，其家庭年收入介于 4.5 万元至 8.5 万元之间

D. 估计该地农户家庭年收入的平均值不超过 6.5 万元

10. 设正实数 x， y 满足 $2x+y=1$，则

A. $x\in(0,\dfrac{1}{2})$ B. xy 的最大值为 $\dfrac{1}{4}$

C. x^2+y^2 的最小值为 $\dfrac{1}{5}$ D. 4^x+2^y 的最小值为 4

11. 如图 4，已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2， E, F, G 分别为 AB, AD, B_1C_1 的中点，以下说法正确的是

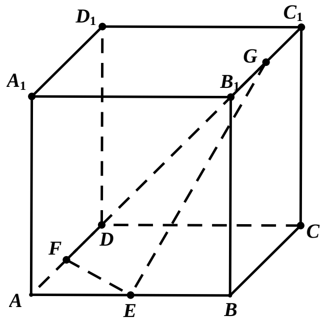


图 4

A. 三棱锥 $C-EFG$ 的体积为 2

B. $A_1C\perp$ 平面 EFG

C. 异面直线 EF 与 AG 所成的角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

D. 过点 E、F、G 作正方体的截面，所得截面的面积是 $3\sqrt{3}$

12. 已知 $f(x)$ 是周期为 4 的奇函数，且当 $0\le x\le 2$ 时，$f(x)=\begin{cases}x, 0\le x\le 1\\ 2-x, 1<x\le 2\end{cases}$，设 $g(x)=f(x)+f(x+1)$，则

A. $g(2022)=-1$ B. 函数 $y=g(x)$ 为周期函数

C. 函数 $y=g(x)$ 的最大值为 2 D. 函数 $y=g(x)$ 的图象既有对称轴又有对称中心

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知多项式 $(x+1)^3+(x-1)^4=x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4$，则 $a_1=$________.

14. 抛掷一枚质地均匀的骰子两次，第一次出现的点数记为 a，第二次出现的点数记为 b，则 $a\geqslant 2b$ 的概率为________.

15. 已知 $f(x)$ 为奇函数，当 $x>0$ 时， $f(x)=\ln x+x^2$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(-1, f(-1))$ 处的切线方程是________.

16. 某校学生在研究折纸实验中发现，当对折后纸张达到一定的厚度时，便不能继续对折了. 在理想情况下，对折次数 n 与纸的长边 ω(cm) 和厚度 x(cm) 有关系：$n \le \frac{2}{3}\log_2 \frac{\omega}{x}$. 现有一张长边为 30cm，厚度为 0.05cm 的矩形纸，根据以上信息，当对折完 4 次时，$\frac{\omega}{x}$ 的最小值为________；该矩形纸最多能对折________次.（本题第一空 2 分，第二空 3 分.）（参考数值：$\lg 2 \approx 0.3$，$\lg 3 \approx 0.48$）

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10 分）

已知 $\{a_n\}$ 是等差数列，$a_1 = 2, a_2 + a_3 + a_4 = 18$.

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）设 $b_n = |(\sqrt{2})^{a_n} - 1000|$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 15 项和 T_{15}.

18. （12 分）

某工厂购买软件服务，有如下两种方案：

方案一：软件服务公司每日收取 80 元，对于提供的软件服务每次 10 元；

方案二：软件服务公司每日收取 200 元，若每日软件服务不超过 15 次，不另外收费，若超过 15 次，超过部分的软件服务每次收费标准为 20 元.

（1）设日收费为 y 元，每天软件服务的次数为 x，试写出两种方案中 y 与 x 的函数关系式；

（2）该工厂对过去 100 天的软件服务的次数进行了统计，得到如图 5 所示的条形图，依据该统计数据，把频率视为概率，从节约成本的角度考虑，从两个方案中选择一个，哪个方案更合适？请说明理由.

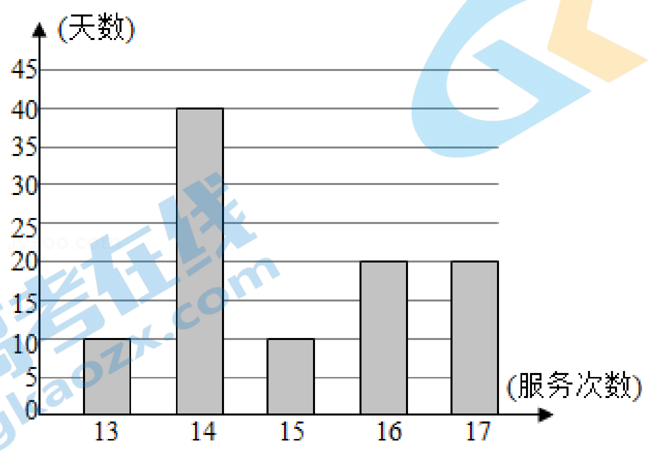


图 5

19.（12 分）

在平面四边形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=\frac{\pi}{3}$，$\angle ADC=\frac{\pi}{2}$，$BC=4$.

（1）若 ΔABC 的面积为 $2\sqrt{3}$，求 AC；

（2）若 $AD=3\sqrt{3}$，$\angle ACB=\angle ACD+\frac{\pi}{6}$，求 $\tan\angle ACD$.

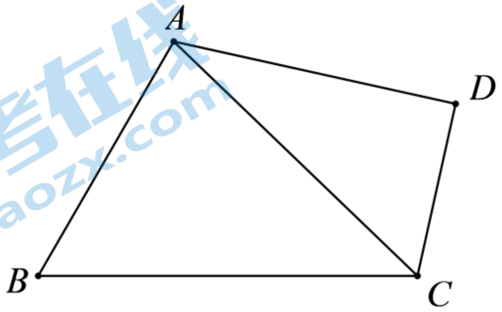


图 6

20.（12 分）

如图 7，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$\angle BAC=90^{\circ}$，$AB=AC=AA_1=2$，M 为 AB 的中点，N 为 B_1C_1 的中点，P 是 BC_1 与 B_1C 的交点.

（1）证明：$A_1C\perp BC_1$；

（2）在线段 A_1N 上是否存在点 Q，使得 $PQ//$平面A_1CM？若存在，请确定 Q 的位置；若不存在，请说明理由.

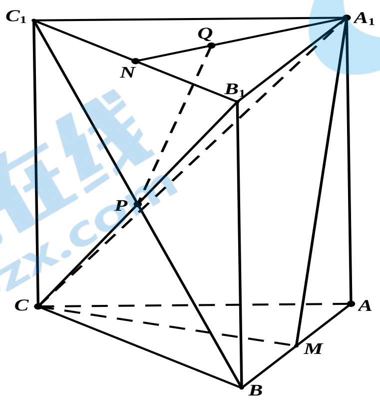


图 7

21.（12 分）

已知抛物线 $C: y^2 = 2px(p>0)$ 上的点 $P(1, y_0)(y_0>0)$ 到其焦点的距离为 2.

（1）求点 P 的坐标及抛物线 C 的方程；

（2）若点 M、N 在抛物线 C 上，且 $k_{PM} \cdot k_{PN} = -\dfrac{1}{2}$，求证：直线 MN 过定点.

22.（12 分）

已知函数 $f(x) = ax + \ln x$

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）若 $x_1, x_2\ (x_1 < x_2)$ 是 $f(x)$ 的两个零点. 证明：

（i）$x_1 + x_2 > -\dfrac{2}{a}$；　　（ii）$x_2 - x_1 > -\dfrac{2\sqrt{1+ea}}{a}$.

2022 届高三·十一月·九校联考

数学答案及评分标准

一、选择题：每小题 5 分，共 40 分.

1. B　　2. C　　3. A　　4. A

5. C　　6. B　　7. B　　8. D

二、选择题：每小题 5 分，共 20 分.全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. ABC　　10. AC　　11. BD　　12. ABD

三、填空题：每小题 5 分，共 20 分.

13. -3　　14. $\frac{1}{4}$

15. $3x-y+2=0$　　16. 64；6（本题第一空 2 分，第二空 3 分.）

四、解答题：共 70 分.

17.（10 分）

解：（1）设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，由条件得$\begin{cases}a_1=2\\a_2+a_3+a_4=3a_1+6d=18\end{cases}$，解得$\begin{cases}a_1=2\\d=2\end{cases}$.

故$a_n=2n$.　　……2 分

(2) 由(1)可知$b_n=|2^n-1000|=\begin{cases}1000-2^n,1\le n\le 9\\2^n-1000,10\le n\le 15\end{cases}$，其中$n\in N^*$　　……4 分

故$\{b_n\}$的前15项和

$T_{15}=(1000-2^1)+(1000-2^2)+\cdots+(1000-2^9)+(2^{10}-1000)+\cdots+(2^{15}-1000)$　　……6 分

$=3000-(2^1+2^2+\cdots+2^9)+(2^{10}+2^{11}+\cdots+2^{15})$

$=3000-\frac{2^1(1-2^9)}{1-2}+\frac{2^{10}(1-2^6)}{1-2}=66490$.　　……10 分

18.（12 分）

解：（1）由题可知，方案一中的日收费y与x的函数关系式为$y=10x+80$，$x\in N$.　　……2 分

方案二中的日收费y与x的函数关系式为$y=\begin{cases}200,x\le 15,x\in N\\20x-100,x>15,x\in N\end{cases}$.　　……4 分

（2）设方案一中的日收费为X，由条形图可得X的分布列为

X	210	220	230	240	250
P	0.1	0.4	0.1	0.2	0.2

所以$E(X)=210\times0.1+220\times0.4+230\times0.1+240\times0.2+250\times0.2=230$（元）.　　……7 分

方案二中的日收费为Y，由条形图可得Y的分布列为

Y	200	220	240
P	0.6	0.2	0.2

$E(Y)=200\times0.6+220\times0.2+240\times0.2=212$（元）.　　……10 分

所以从节约成本的角度考虑，选择方案二.　　……12 分

19.（12 分）

解：（1）在△ABC 中，$BC=4$，$\angle ABC=\frac{\pi}{3}$，

$\therefore S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin\angle ABC=2\sqrt{3}$，可得 $AB=2$，　　……2 分

在△ABC 中，由余弦定理得 $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos\angle ABC=12$，

$\therefore AC=2\sqrt{3}$.　　……5 分

（2）设 $\angle ACD=\alpha$，则 $\angle ACB=\angle ACD+\frac{\pi}{6}=\alpha+\frac{\pi}{6}$，

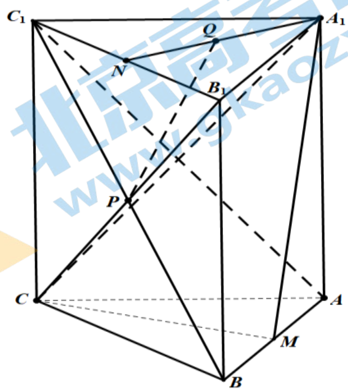
在 $Rt\triangle ACD$ 中，$AD=3\sqrt{3}$，易知：$AC=\frac{AD}{\sin\alpha}=\frac{3\sqrt{3}}{\sin\alpha}$，　　……8 分

在△ABC 中，$\angle BAC=\pi-\angle ACB-\angle ABC=\frac{\pi}{2}-\alpha$，

由正弦定理得 $\frac{BC}{\sin\angle BAC}=\frac{AC}{\sin\angle ABC}$，即 $\frac{4}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{3\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha}$，　　……10 分

$\therefore 2\sin\alpha=3\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=3\cos\alpha$，可得 $\tan\alpha=\frac{3}{2}$，即 $\tan\angle ACD=\frac{3}{2}$.　　……12 分

20.（12 分）



解：(1) 解法一：连结 AC_1，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，有 $AA_1\perp$ 面ABC

因为 $AB\subset$ 面ABC，所以 $AA_1\perp AB$，

△BAC 中，$\angle BAC=90^\circ$，即 $AB\perp AC$，

因为 $AA_1\cap AC=A$，所以 $AB\perp$ 面ACC_1A_1　　……2 分

因为 $A_1C\subset$ 面ACC_1A_1，所以 $AB\perp A_1C$

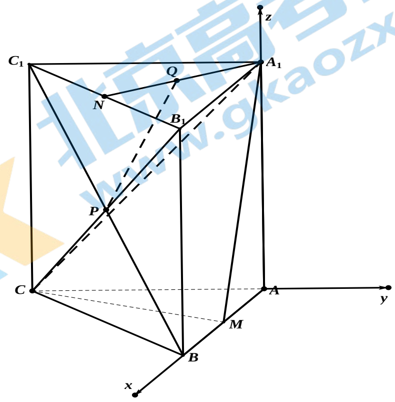
在四边形 AA_1C_1C 中，$AA_1\perp AC$，$AC=AA_1=2$，所以四边形 AA_1C_1C 为正方形，所以 $A_1C\perp AC_1$

因为 $AB\cap AC_1=A$，所以 $A_1C\perp$ 面ABC_1　　……4 分

因为 $BC_1\subset$ 面ABC_1，所以 $A_1C\perp BC_1$.　　……5 分

解法二：在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，因为 $\angle BAC=90^\circ$，以点 A 为坐标原点，AB、CA、AA_1 方向分别为

x、y、z 轴正方向建立如图所示空间直角坐标系 $A-xyz$.



因为 $AB = AC = AA_1 = 2$，所以

$A_1(0,0,2)$、$C(0,-2,0)$、$B(2,0,0)$, $C_1(0,-2,2)$,　　……2 分

所以 $\overrightarrow{BC_1} = (-2,-2,2)$，$\overrightarrow{A_1C} = (0,-2,-2)$

$\overrightarrow{A_1C} \cdot \overrightarrow{BC_1} = (0,-2,2)\cdot(-2,-2,-2) = 0$　所以

$A_1C \perp BC_1$.　　……5 分

(2) 解法一：存在线段 A_1N 上靠近 N 的三等分点 Q，满足 $PQ//$平面A_1CM.

证明如下：在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，因为 $\angle BAC = 90^\circ$，以点 A 为坐标原点，AB、CA、AA$_1$ 方向分别为 x、y、z 轴正方向建立如图所示空间直角坐标系 $A-xyz$.　　……6 分

因为 $AB = AC = AA_1 = 2$，M 为 AB 的中点，N 为 B_1C_1 的中点，P 是 BC_1 与 B_1C 的交点，所以

$A_1(0,0,2)$、$C(0,-2,0)$、$P(1,-1,1)$, $M(1,0,0)$, $N(1,-1,2)$,

设 $\overrightarrow{A_1Q} = t\overrightarrow{A_1N}(0 \le t \le 1)$，所以 $Q(t,-t,2)$　　……8 分

所以 $\overrightarrow{PQ} = (t-1, 1-t, 1)$，$\overrightarrow{A_1C} = (0,-2,-2)$，$\overrightarrow{A_1M} = (1,0,-2)$

设 $\vec{n} = (x,y,z)$ 为平面 A_1CM 的法向量，则

$$\begin{cases} \vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1C} = 0 \\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1M} = 0 \end{cases} \text{即} \begin{cases} -2y-2z = 0 \\ x-2z = 0 \end{cases}$$

取 $z = 1$ 得 $x = 2, y = -1$ 可得平面 A_1CM 的一个法向量为 $\vec{n} = (2,-1,1)$.　　……10 分

若 $PQ//$平面A_1CM，则 $\overrightarrow{PQ} \perp \vec{n}$，所以 $\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{n} = (t-1, 1-t, 1)\cdot(2,-1,1) = 0$，即 $2(t-1)-(1-t)+1 = 0$

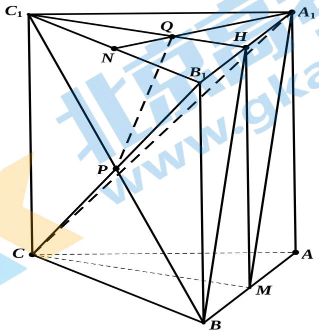
解得 $t = \dfrac{2}{3}$，所以存在线段 A_1N 上靠近 N 的三等分点 Q，使得 $PQ//$平面A_1CM.　　……12 分

解法二：存在线段 A_1N 上靠近 N 的三等分点 Q，满足 $PQ//$平面A_1CM.

证明如下：取 A_1B_1 中点 H，连结 BH、C_1H、MH.

在正方形 AA_1B_1B 中，M 为 AB 的中点，所以 $BH // A_1M$

因为 $A_1M \subset$ 平面A_1MC，$BH \not\subset$ 平面A_1MC



所以 $BH//$平面A_1MC　　　　……6 分

在正方形 AA_1B_1B 中，M 为 AB 的中点，H 为 A_1B_1 中点，所以

$MH//AA_1$.

因为 $AA_1//C_1C$ 且 $AA_1=C_1C$，所以 $MH//CC_1$，$MH=C_1C$，所以四边形 MHC_1C 为平行四边形，所以

$C_1H//CM$

因为 $CM \subset$ 平面A_1MC，$C_1H \not\subset$ 平面A_1MC，所以 $C_1H//$平面A_1MC　　　　……8 分

因为 $C_1H \cap BH = H$，$C_1H \subset$ 平面BHC_1，$BH \subset$ 平面BHC_1

所以平面$BHC_1//$平面A_1MC，　　　　……10 分

记 $C_1H \cap A_1N = Q$，则 Q 为△BAC 的重心，即 Q 为线段 A_1N 上靠近 N 的三等分点，且 $PQ \subset$ 平面BHC_1，

所以 $PQ//$平面A_1CM，所以存在线段 A_1N 上靠近 N 的三等分点 Q，使得 $PQ//$平面A_1CM．　……12 分

21．（12 分）

解：（1）抛物线的焦点 $F(\frac{p}{2},0)$，准线为 $x=-\frac{p}{2}$，因为点 $P(1,y_0)(y_0>0)$ 到其焦点的距离为 2，

所以 $1+\frac{p}{2}=2$，解得 $p=2$，所以抛物线的方程为 $y^2=4x$，　　　……2 分

因为点 $P(1,y_0)(y_0>0)$ 在抛物线上，所以 ${y_0}^2=4$，解得 $y_0=2$，所以 $P(1,2)$，

综上，P 点坐标为 $(1,2)$，抛物线的方程为 $y^2=4x$．　　……4 分

（2）证明：设直线 MN 的方程为 $x=my+n$，$M(\frac{1}{4}{y_1}^2,y_1)$，$N(\frac{1}{4}{y_2}^2,y_2)$，

联立 $\begin{cases} x=my+n \\ y^2=4x \end{cases}$，得 $y^2-4my-4n=0$，所以 $y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-4n$，　　……6 分

所以 $k_{PM}=\dfrac{y_1-2}{\frac{1}{4}y_1^2-1}=\dfrac{4}{y_1+2}$，同理可得 $k_{PN}=\dfrac{4}{y_2+2}$，　　……8 分

因 $k_{PM}\cdot k_{PN}=-\frac{1}{2}$，

所以 $\frac{16}{(y_1+2)(y_2+2)}=-\frac{1}{2}$，所以 $y_1y_2+2(y_1+y_2)+36=0$， ……10 分

所以 $-n+2m+9=0$，即 $n=2m+9$（满足 $\Delta>0$），

直线 MN 的方程为 $x=my+2m+9=m(y+2)+9$，

所以直线 MN 过定点 $(9,-2)$． ……12 分

22.（12 分）

解：（1） $f\left(x\right)$ 定义域 $\left(0,+\infty\right)$， $f'\left(x\right)=\frac{1}{x}+a=\frac{1+ax}{x}$， ……1 分

则当 $a\geq 0$ 时， $f'\left(x\right)>0$， $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 为增函数； ……2 分

当 $a<0$ 时，令 $f'\left(x\right)=0$，解得 $x=-\frac{1}{a}$，当 $x\in\left(0,-\frac{1}{a}\right)$ 时， $f'\left(x\right)>0$， $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,-\frac{1}{a}\right)$ 为增函数；

当 $x\in\left(-\frac{1}{a},+\infty\right)$ 时， $f'\left(x\right)<0$， $f\left(x\right)$ 在 $\left(-\frac{1}{a},+\infty\right)$ 为减函数， ……3 分

综上， $a\geq 0$ 时， $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 为增函数；

$a<0$ 时， $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,-\frac{1}{a}\right)$ 为增函数，在 $\left(-\frac{1}{a},+\infty\right)$ 为减函数． ……4 分

（2）**解法一**：（i）由（1）可知，要使函数 $f\left(x\right)$ 有两个零点，需 $a<0$，且 $f(x)_{\max}=f(-\frac{1}{a})>0$，

则 $-\frac{1}{e}<a<0$，又 $x_2>x_1>0$，故 $0<x_1<-\frac{1}{a}<x_2$，则 $-\frac{2}{a}-x_1>-\frac{1}{a}$， ……5 分

令 $g(x)=f(-\frac{2}{a}-x)-f(x)$，$0<x<-\frac{1}{a}$ 则

$$g'(x)=\frac{1}{\frac{2}{a}+x}-a-\frac{1}{x}-a=-\frac{2(1+ax)^2}{ax(\frac{2}{a}+x)}<0,$$ ……6 分

所以 $g(x)$ 在 $\left(0,-\frac{1}{a}\right)$ 上单减，所以 $g(x_1)>g(-\frac{1}{a})=0$，又 $f\left(x_1\right)=0$，所以

$f(-\frac{2}{a}-x_1)=\ln(-\frac{2}{a}-x_1)+a(-\frac{2}{a}-x_1)-f(x_1)=g(x_1)>0$，

又 $f\left(x_2\right)=0$，所以 $x_2>-\frac{2}{a}-x_1$ 即 $x_1+x_2>-\frac{2}{a}$；　　　　……7 分

（ii）要证 $x_2-x_1>-\frac{2\sqrt{1+ea}}{a}$，由（i）可知，只需证 $x_1+x_2+x_2-x_1>-\frac{2}{a}-\frac{2\sqrt{1+ea}}{a}$，即证

$x_2>-\frac{1+\sqrt{1+ea}}{a}$，注意到 $-\frac{1+\sqrt{1+ea}}{a}>-\frac{1}{a}$，只需证 $f(-\frac{1+\sqrt{1+ea}}{a})>f(x_2)$　　　　……8 分

由 $f(x_2)=ax_2+\ln x_2=0$，只需证 $f(-\frac{1+\sqrt{1+ea}}{a})>0$，

即证 $\ln(-\frac{1+\sqrt{1+ea}}{a})-(1+\sqrt{1+ea})>0$，　　　　……9 分

令 $t=1+\sqrt{1+ea}$，则 $a=\frac{(t-1)^2-1}{e}$，因为 $-\frac{1}{e}<a<0$，所以 $1<t<2$，所以上述不等式等价于

$\ln\frac{et}{1-(t-1)^2}-t>0$，即 $\ln\frac{e}{2-t}-t>0$，亦即 $\ln(2-t)+t<1$，对 $1<t<2$ 恒成立　　　　……11 分

令 $\varphi(t)=\ln(2-t)+t$，则 $\varphi'(t)=-\frac{1}{2-t}+1=\frac{1-t}{2-t}<0$，$t\in(1,2)$

所以 $\varphi(t)$ 在 $(1,2)$ 上单调递减，即 $\varphi(t)<\varphi(1)=1$，即得证.　　　　……12 分

解法二：证明：（i）原不等式等价于 $\frac{x_1+x_2}{2}>-\frac{1}{a}$，

因为 $-ax_1=\ln x_1$①，$-ax_2=\ln x_2$②，

由②-①得，$-a\left(x_2-x_1\right)=\ln x_2-\ln x_1$，则 $-a=\frac{\ln x_2-\ln x_1}{x_2-x_1}$，　　　　……5 分

则 $\frac{x_1+x_2}{2}>-\frac{1}{a}$ 等价于 $\frac{x_1+x_2}{2}>\frac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}$，

因为 $x_2>x_1>0$，所以 $\ln x_2-\ln x_1>0$，

即证 $\ln x_2-\ln x_1>\frac{2\left(x_2-x_1\right)}{x_1+x_2}$，等价于 $\ln\frac{x_2}{x_1}-\frac{2\left(\frac{x_2}{x_1}-1\right)}{1+\frac{x_2}{x_1}}>0$③，　　　　……6 分

设 $t=\frac{x_2}{x_1}$，$\left(t>1\right)$，设 $g\left(t\right)=\ln t-\frac{2\left(t-1\right)}{1+t}$，$\left(t>1\right)$，

③等价于 $g(t)>0$，$\because g'(t)=\dfrac{1}{t}-\dfrac{2}{(1+t)^2}=\dfrac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$，

所以 $g(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上为增函数.

所以 $g(t)>g(1)=0$，即 $\dfrac{x_1+x_2}{2}>-\dfrac{1}{a}$；　　……7 分

（ii）设 $h(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，则 $h'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，令 $h'(x)=0$，解得 $x=e$，

所以 $h(x)$ 在 $(0,e]$ 上递增，在 $(e,+\infty)$ 上递减，

因为 $-a=h(x)$ 有两个不相等的实根，则 $-\dfrac{1}{e}<a<0$ 且 $1<x_1<e<x_2$，　　……8 分

易知 $\ln x<x-1$ 对 $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$ 恒成立，则 $\ln\dfrac{1}{x}>1-x$ 对 $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$ 恒成立，

所以 $-ax-1=\ln x-1=\ln\dfrac{x}{e}>1-\dfrac{e}{x}$，因为 $x>0$，所以 $-ax^2-2x+e>0$，　　……10 分

又因为 $a<0$，$\Delta=4+4ae>0$，所以 $x<-\dfrac{1}{a}+\dfrac{\sqrt{1+ea}}{a}$ 或 $x>-\dfrac{1}{a}-\dfrac{\sqrt{1+ea}}{a}$，

因为 $1<x_1<e$ 且 $-\dfrac{1}{e}<a<0$，所以 $x_1<-\dfrac{1}{a}+\dfrac{\sqrt{1+ea}}{a}$，$x_2>-\dfrac{1}{a}-\dfrac{\sqrt{1+ea}}{a}$，

因为 $\dfrac{x_1+x_2}{2}>-\dfrac{1}{a}$，所以 $\dfrac{x_1+x_2}{2}-x_1>-\dfrac{1}{a}-\left(-\dfrac{1}{a}+\dfrac{\sqrt{1+ea}}{a}\right)$，即 $x_2-x_1>-\dfrac{2\sqrt{1+ea}}{a}$.　　……12 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “ 精益求精、专业严谨 ” 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。