2023年全国中学生数学奥林匹克竞赛（预赛）暨2023年全国高中数学联合竞赛

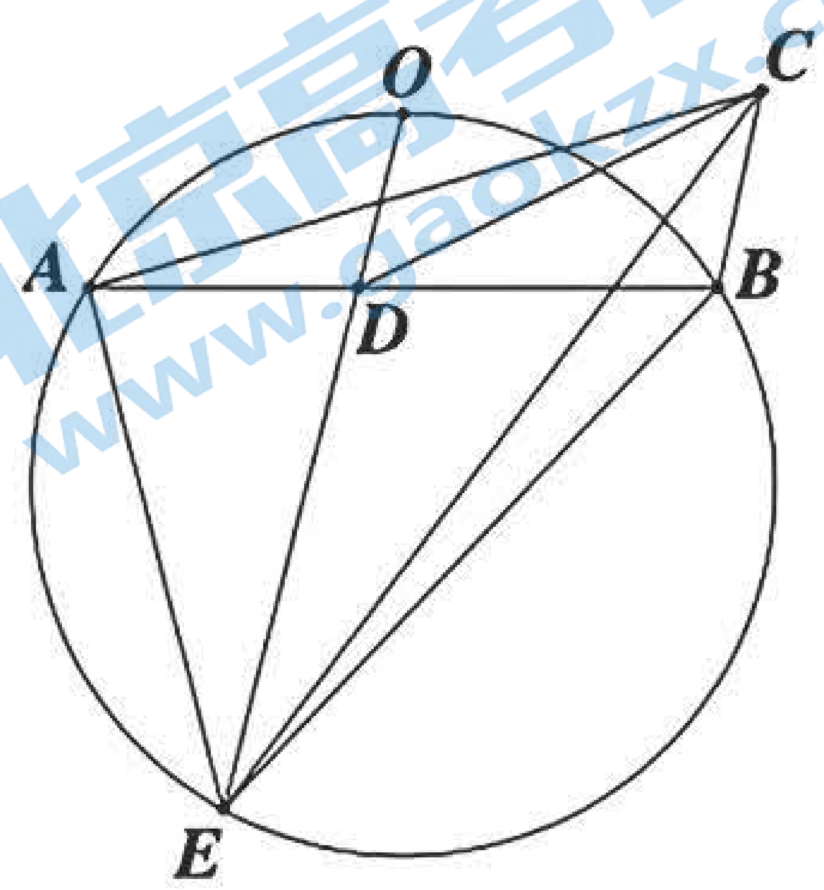
加试（B卷）

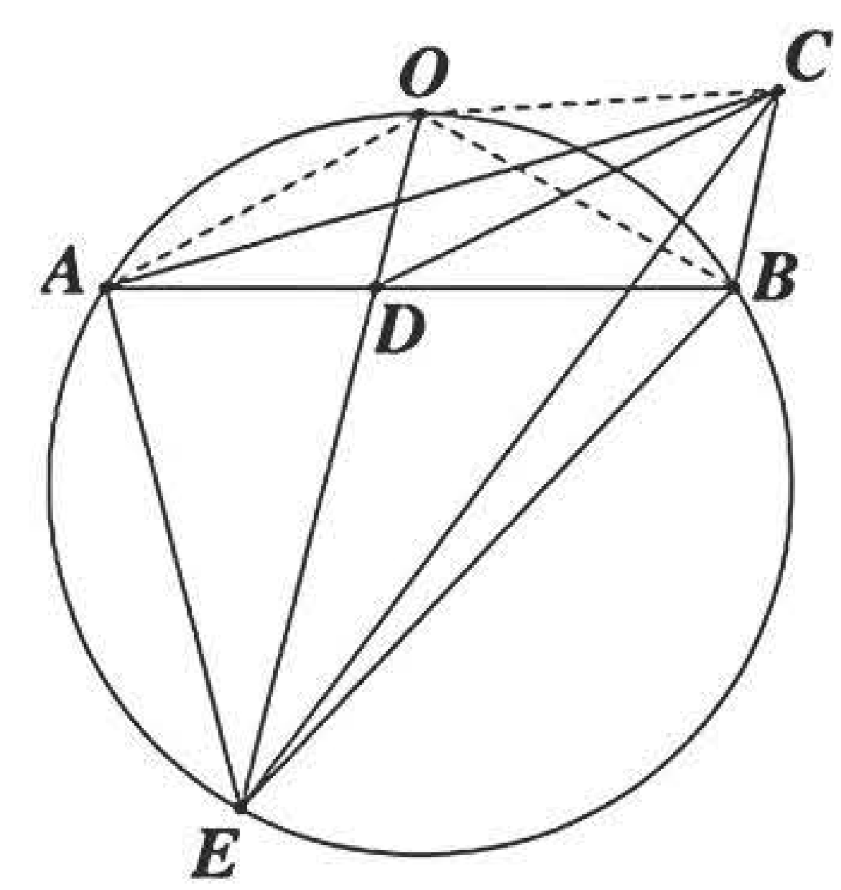
说明：

1．评阅试卷时，请严格按照本评分标准的评分档次给分．

2．如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，10分为一个档次，不得增加其他中间档次．

一．**（本题满分40分）** 如图，ΔABC的外心为O，在边AB上取一点D，延长OD至点E，使得A,O,B,E四点共圆．若$OD=2, AD=3, BD=4, CD=5$，证明：ΔABE与ΔCDE的周长相等．





二．**（本题满分40分）** 设m,n是给定的整数，$m\ge n\ge 3$．求具有下述性质的最小正整数k：若将$1,2,\cdots,k$中的每个数任意染为红色或者蓝色，则或者存在m个红色的数$x_1,x_2,\cdots,x_m$（允许相同），满足$x_1+x_2+\cdots+x_{m-1}<x_m$，或者存在$n$个蓝色的数$y_1,y_2,\cdots,y_n$（允许相同），满足$y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}<y_n$．

三．**（本题满分 50 分）**是否存在2023个实数$a_1, a_2, \cdots, a_{2023} \in (0,1]$，使得

$$\sum_{1 \le i < j \le 2023} |a_i - a_j| - \sum_{k=1}^{2023} \frac{1}{a_k} > 10^6 \text{ ?}$$

证明你的结论．

四．（本题满分 50 分）设正整数 a, b, c, d 同时满足：

(1) $a+b+c+d=2023$；

(2) $ab+ac+ad+bc+bd+cd$ 是2023的倍数；

(3) $abc+bcd+cda+dab$ 是2023的倍数．

证明：$abcd$ 是2023的倍数．

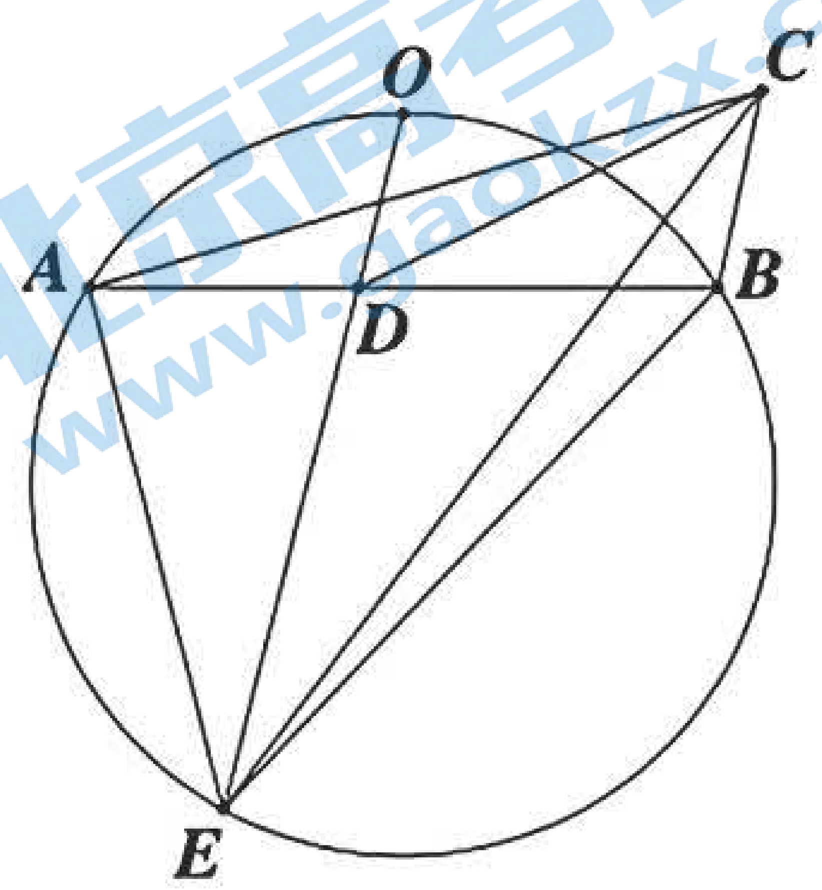
2023年全国中学生数学奥林匹克竞赛（预赛）
暨2023年全国高中数学联合竞赛
加试（B卷）参考答案及评分标准

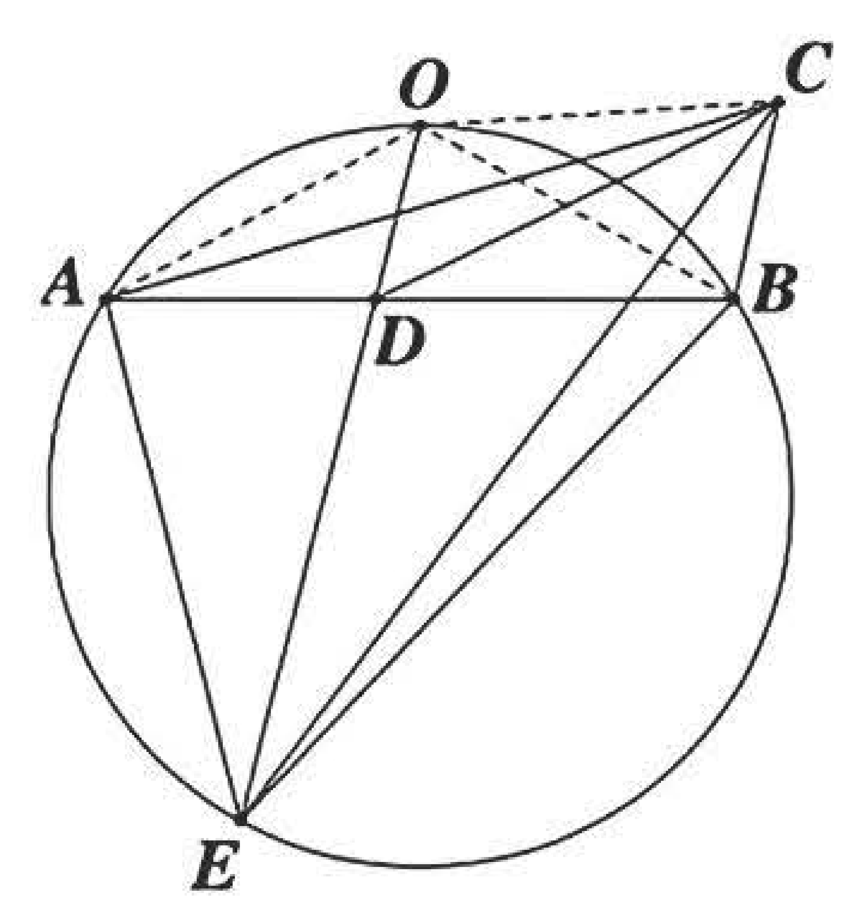
说明：

1．评阅试卷时，请严格按照本评分标准的评分档次给分．

2．如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，10分为一个档次，不得增加其他中间档次．

一．（本题满分40分） 如图，$\triangle ABC$ 的外心为 O，在边 AB 上取一点 D，延长 OD 至点 E，使得 A,O,B,E 四点共圆．若 $OD=2, AD=3, BD=4, CD=5$，证明：$\triangle ABE$ 与 $\triangle CDE$ 的周长相等．





证明： 由 A,O,B,E 共圆得 $AD\cdot BD=OD\cdot DE$，又 $OD=2, AD=3, BD=4$，所以 $DE=6$． ……………10分

由 $OA=OB$ 得 $\angle OAD=\angle OEA$，故 $\triangle OAD\backsim\triangle OEA$，故 $\dfrac{OA}{OD}=\dfrac{OE}{OA}=\dfrac{AE}{AD}$．

所以 $OA^2=OD\cdot OE=2\times(2+6)=16$，得 $OA=4$．

进而 $AE=AD\cdot\dfrac{OE}{OA}=2AD=6$．

同理可得 $\triangle OBD\backsim\triangle OEB$，$BE=2BD=8$． ……………20分

由于 $OC^2=OA^2=OD\cdot OE$，故 $\triangle OCD\backsim\triangle OEC$． ……………30分

因此 $\dfrac{EC}{CD}=\dfrac{OC}{OD}$．

由 $OD=2, OE=OD+DE=8$ 知 $OC=4$，又 $CD=5$，故 $EC=2CD=10$．

计算得

$$AB+AE+BE=7+6+8=21,\quad CD+DE+EC=5+6+10=21,$$

即 $\triangle ABE$ 与 $\triangle CDE$ 的周长相等． ……………40分

二．（本题满分40分） 设 m,n 是给定的整数，$m\ge n\ge 3$．求具有下述性质的最小正整数 k：若将 $1,2,\cdots,k$ 中的每个数任意染为红色或者蓝色，则或者存在 m 个红色的数 $x_1,x_2,\cdots,x_m$（允许相同），满足 $x_1+x_2+\cdots+x_{m-1}<x_m$，或者存在 n 个蓝色的数 $y_1,y_2,\cdots,y_n$（允许相同），满足 $y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}<y_n$．

解：答案是 $mn-n+1$.

若 $k=mn-n$，将 $1,2,\cdots,n-1$ 染为蓝色，$n,n+1,\cdots,mn-n$ 染为红色．则对任意 m 个红色的数 $x_1,x_2,\cdots,x_m$，有 $x_1+x_2+\cdots+x_{m-1}\ge n(m-1)\ge x_m$，对任意 n 个蓝色的数 $y_1,y_2,\cdots,y_n$，有 $y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}\ge n-1\ge y_n$，上述例子不满足要求．

对 $k<mn-n$，可在上述例子中删去大于 k 的数，则得到不符合要求的例子．因此所求 $k\ge mn-n+1$． ………………10 分

下面证明 $k=mn-n+1$ 具有题述性质．

假设可将 $1,2,\cdots,mn-n+1$ 中的每个数染为红色或蓝色，使得结论不成立．

情形一：若 1 是红色的数，则红色的数均不超过 $m-1$，否则可取一个红色的数 $x_m\ge m$，再取 $x_1=x_2=\cdots=x_{m-1}=1$，则 $x_1+\cdots+x_{m-1}<x_m$，与假设矛盾． ………………20 分

故 $m,m+1,\cdots,mn-n+1$ 均为蓝色的数，此时取

$$y_1=y_2=\cdots=y_{n-1}=m,\ y_n=mn-n+1,$$

有

$$y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}=m(n-1)<mn-m+1\le mn-n+1=y_n,\ (*)$$

与假设矛盾． ………………30 分

情形二：若 1 是蓝色的数，则同情形一可知蓝色的数均不超过 $n-1$，故 $n,n+1,\cdots,mn-n+1$ 均是红色的数．此时取 $x_1=x_2=\cdots=x_{m-1}=n,x_m=mn-n+1$，与（*）类似，可得矛盾．

故 $k=mn-n+1$ 时结论成立．

综上，所求最小的正整数 $k=mn-n+1$． ………………40 分

三．（本题满分 50 分） 是否存在 2023 个实数 $a_1,a_2,\cdots,a_{2023}\in(0,1]$，使得

$$\sum_{1\le i<j\le 2023}|a_i-a_j|-\sum_{k=1}^{2023}\frac{1}{a_k}>10^6\ ?$$

证明你的结论．

解：记 $S=\sum\limits_{1\le i<j\le 2023}|a_i-a_j|-\sum\limits_{k=1}^{2023}\frac{1}{a_k}$.

假设存在 $a_1,a_2,\cdots,a_{2023}\in(0,1]$，使得 $S>10^6$．

不妨设 $0<a_1\le a_2\le\cdots\le a_{2023}\le 1$，则将 $\sum\limits_{1\le i<j\le 2023}|a_i-a_j|$ 去掉绝对值后，a_k 的系数为 $2k-2024$，从而

$$S=\sum_{k=1}^{2023}\left((2k-2024)a_k-\frac{1}{a_k}\right).$$ ………………10 分

当 $1\le k\le 1011$ 时，由基本不等式知

$$(2k-2024)a_k-\frac{1}{a_k}=-\left((2024-2k)a_k+\frac{1}{a_k}\right)\le -2\sqrt{2024-2k}.$$

………………20 分

当 $1012\le k\le 2023$ 时，由于 $f_k(x)=(2k-2024)x-\frac{1}{x}$ 在 $(0,1]$ 上单调增，故

$$(2k-2024)a_k-\frac{1}{a_k}\le f_k(1)=2k-2025.$$

从而

$$S\le -2\cdot\sum_{k=1}^{1011}\sqrt{2024-2k}+\sum_{k=1012}^{2023}(2k-2025)$$
$$=1010\times 1012-\sum_{k=1}^{1011}\left(\sqrt{2024-2k}+\sqrt{2k}\right).$$ ……………30 分

注意到 $\sqrt{2024-2k}+\sqrt{2k}\ge\sqrt{(2024-2k)+2k}=\sqrt{2024}>44$，故

$$S\le 1010\times 1012-1011\times 44<10^6,$$

这意味者不存在 $a_1,a_2,\cdots,a_{2023}$ 满足条件. ……………50 分

四．（本题满分 50 分） 设正整数 a,b,c,d 同时满足：

(1) $a+b+c+d=2023$；

(2) $ab+ac+ad+bc+bd+cd$ 是 2023 的倍数；

(3) $abc+bcd+cda+dab$ 是 2023 的倍数.

证明：$abcd$ 是 2023 的倍数.

证明： 易知 $2023=7\times 17^2$.

首先，由(1)，(3)知

$$(a+b)(a+c)(a+d)=a^2(a+b+c+d)+(abc+bcd+cda+dab)$$

是 2023 的倍数，故 $a+b,a+c,a+d$ 中至少有一个是 7 的倍数. ……………10 分

由对称性，不妨设 $a+b$ 是 7 的倍数，则 $c+d=2023-(a+b)$ 也是 7 的倍数，$ac+ad+bc+bd=(a+b)(c+d)$ 也是 7 的倍数，故结合(2)知 $ab+cd$ 是 7 的倍数，因此

$$a^2+c^2=a(a+b)+c(c+d)-(ab+cd)$$

也是 7 的倍数. 又平方数除以 7 的余数只能是 $0,1,2,4$，因此 a^2,c^2 只能同时是 7 的倍数，这表明 a,b,c,d 都是 7 的倍数. ……………20 分

同上面分析可知：$(a+b)(a+c)(a+d)$ 是 17^2 的倍数，故或者其中有一个因子是 17^2 的倍数，或者其中有两个因子是 17 的倍数.

如果有一个因子是 17^2 的倍数，不妨设 $a+b$ 是 17^2 的倍数，结合 a,b 都是 7 的倍数知，$a+b$ 是 $2023=7\times 17^2$ 的倍数，但这与 $a+b+c+d=2023$ 及 a,b,c,d 是正整数相矛盾！ ……………30 分

因此 $a+b,a+c,a+d$ 中至少有两个是 17 的倍数. 不妨设 $a+b,a+c$ 都是 17 的倍数，那么 $b+d$ 也是 17 的倍数，由

$$ab+ac+ad+bc+bd+cd=(a+b)d+(b+d)c+a(a+b)+a(a+c)-2a^2$$

知，$2a^2$ 是 17 的倍数，故 a 是 17 的倍数.

因此 a,b,c,d 都是 17 的倍数，这就说明了 $abcd$ 是 $7^4\times 17^4$ 的倍数，也就是 2023 的倍数. ……………50 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ‘’ 精益求精、专业严谨 ‘’ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。