北京十一学校2019届高三2月教与学质量诊断

数 学（理科）试卷

命题人：崔君强 曹磊

本试卷共4页，150分。考试时长120分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，不收试卷，只需把答题卡按顺序排好交回。

第一部分（选择题 共40分）

一、选择题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知全集$U=R$，函数$y=\ln(x-1)$的定义域为M，集合$N=\{x|x^2-x<0\}$，则下列结论正确的是（ B ）

A. $M\cap N=N$　　B. $M\cap(\complement_U N)=\varnothing$　　C. $M\cup N=U$　　D. $M=(\complement_U N)$

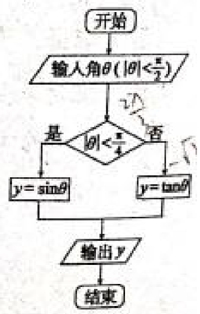
2. 下列函数在其定义域内既是奇函数又是增函数的是（ A ）

A. $y=x^3+x$　　B. $y=2^x$　　C. $y=\frac{1}{x}$　　D. $y=-\log_2 x$

3. "$\sqrt{a}>\sqrt{b}$"是"$\ln a>\ln b$"的（ C ）

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件



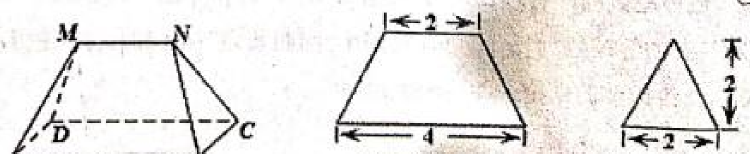
4. 执行如图所示的程序框图．若输出$y=-\sqrt{3}$，则输入角$\theta=$（ D ）

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $-\frac{\pi}{6}$　　C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $-\frac{\pi}{3}$

5. 在ΔABC中，角A,B,C的对边分别为a,b,c若$(a^2+c^2-b^2)\tan B=\sqrt{3}ac$，则角$B$的值为（ C ）

A. $\frac{\pi}{3}$　　B. $\frac{\pi}{6}$　　C. $\frac{\pi}{3}$或$\frac{2\pi}{3}$　　D. $\frac{\pi}{6}$或$\frac{5\pi}{6}$

6. 多面体$MN-ABCD$的底面$ABCD$为矩形，其正（主）视图和侧（左）视图如图，其中正（主）视图为等腰梯形，侧（左）视图为等腰三角形，则AM的长为（ C ）



正（主）视图　　侧（左）视图

A. $\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{5}$　　C. $\sqrt{6}$　　D. $2\sqrt{2}$

7. 已知等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，则下列结论中一定成立的(　　)

A. 若$a_5>0$，则$S_{2019}<0$　　B. 若$a_5>0$，则$S_{2019}>0$

C. 若$a_6>0$，则$S_{2018}<0$　　D. 若$a_6>0$，则$S_{2018}>0$

8. 设函数$f(x)$的定义域D，如果存在正实数m，使得对任意$x\in D$，都有$f(x+m)>f(x)$，则称$f(x)$为D上的"m型增函数". 已知函数$f(x)$是定义在R上的奇函数，且当$x>0$时，$f(x)=|x-a|-a\ (a\in R)$. 若$f(x)$为R上的"20型增f函数"，则实数a的取值范围是(　　)

A. $a>0$　　B. $a<5$　　C. $a<10$　　D. $a<20$

二、填空题共6小题，每小题5分，共30分。

9. 已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的一条渐近线为$y=\sqrt{3}x$，那么双曲线的离心率为__2__.

10. 设i是虚数单位，复数$\frac{1+ai}{2-i}$所对应的点在第一象限，则实数a的取值范围为$(-\frac{1}{2},2)$.

11. 若变量x,y满足约束条件$\begin{cases}x+2y\le 8\\0\le x\le 4\\0\le y\le 3\end{cases}$则$z=2x+y$的最大值等于__10__.

12. 在直角坐标系xOy中，曲线C_1的方程为$x^2+y^2=2$，曲线C_2的参数方程为$\begin{cases}x=2-t\\y=t\end{cases}$（$t$为参数）. 以原点$O$为极点，$x$轴非负半轴为极轴，建立极坐标系，则曲线$C_1$与$C_2$的交点的极坐标为____.

13. 在梯形$ABCD$中，$AB\ /\!/\ CD$，$AB=2CD$，E为BC中点，若$\overrightarrow{AE}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$，则$x+y=$__$\frac{5}{4}$__.

14. 对于函数$f(x)$和实数M，若存在$m,n\in N^*$，使$f(m)+f(m+1)+f(m+2)+\cdots+f(m+n)=M$成立，则称$(m,n)$为函数$f(x)$关于$M$的一个"生长点". 若$(1,2)$为函数$f(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)$关于$M$的一个"生长点"，则$M=$____；若$f(x)=2x+1$，$M=105$，则函数$f(x)$关于$M$的"生长点"共有____个

三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

15.（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)+\sin 2x+a$ 的最大值为 1.

（I）求函数 $f(x)$ 的最小正周期与单调递增区间；$(k\pi-\frac{5\pi}{12}, k\pi+\frac{\pi}{12}), k\in Z$

（II）若将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，得到函数 $g(x)$ 的图象，求函数 $g(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值和最小值.

1　　$a-2$

16.（本小题满分 13 分）

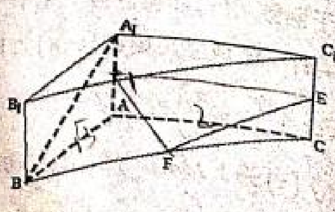
为降低雾霾等恶劣气候对居民的影响，某公司研发了一种新型防雾霾产品．每一台新产品在进入市场前都必须进行两种不同的检测，只有两种检测都合格才能进行销售，否则不能销售．已知该新型防雾霾产品第一种检测不合格的概率为 $\frac{1}{6}$，第二种检测不合格的概率为 $\frac{1}{10}$，两种检测是否合格相互独立.

（I）求每台新型防雾霾产品不能销售的概率；

（II）如果产品可以销售，则每台产品可获利 40 元；如果产品不能销售，则每台产品亏损 80 元（即获利-80 元）．现有该新型防雾霾产品 3 台，随机变量 X 表示这 3 台产品的获利，求 X 的分布列及数学期望.

17.（本小题满分 14 分）

已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AA_1\perp$ 底面 ABC，$\angle BAC=90^\circ$，$AA_1=1$，$AB=\sqrt{3}$，$AC=2$，E,F 分别为棱 CC_1,BC 的中点.



（I）求证：$AC\perp A_1B$；

（II）求直线 EF 与 A_1B 所成的角；$\frac{\pi}{4}$

（III）若 G 为线段 AA_1 的中点，A_1 在平面 EFG 内的射影为 H，求 $\angle HA_1A$.

$[A_1H]$　　$\pi-\arccos\frac{2\sqrt{7}}{7}$

18.（本小题满分 13 分）

已知椭圆 $M:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的焦距为2，点 $D(0,\sqrt{3})$ 在椭圆 M 上，过原点 O 作直线交椭圆 M 于 A,B 两点，且点 A 不是椭圆 M 的顶点，过点 A 作 x 轴的垂线，垂足为 H，点 C 是线段 AH 的中点，直线 BC 交椭圆 M 于点 P，连接 AP.

（Ⅰ）求椭圆 M 的方程及离心率；　$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$　$e=\frac{1}{2}$

（Ⅱ）求证：$AB\perp AP$.

三角换元

$A(2\cos\theta, \sqrt{3}\sin\theta)$

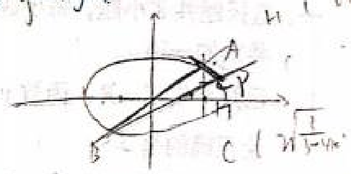
$B(-2\cos\theta, -\sqrt{3}\sin\theta)$

C

点差法　$A(x_1,y_1)$. $B(-x_1,-y_1)$. $P(x_2,y_2)$

$C(x_1,\frac{1}{2}y_1)$

$k_{BC}=k_{AP}$



19.（本小题满分 14 分）

已知函数 $f(x)=2\ln(x+1)$.

（Ⅰ）若函数 $f(x)$ 在点 $P(x_0,f(x_0))$ 处的切线平行于直线 $y=2x-2$，求切点 P 的坐标及此切线方程；

（Ⅱ）求证：当 $x\in[0,e-1]$ 时，$f(x)\geq x^2-2x$；（其中 $e=2.71828\cdots$）

（Ⅲ）确定非负实数 a 的取值范围，使得 $\forall x\geq 0, f(x)\geq a(2x-x^2)$ 成立.

20.（本小题满分 13 分）

若对任意的正整数 n，总存在正整数 m，使得数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=a_m$，则称 $\{a_n\}$ 是“回归数列”.

（Ⅰ）①前 n 项和为 $S_n=2^n$ 的数列 $\{a_n\}$ 是否是“回归数列”？并请说明理由；

②通项公式为 $b_n=2n$ 的数列 $\{b_n\}$ 是否是“回归数列”？并请说明理由；

（Ⅱ）设 $\{a_n\}$ 是等差数列，首项 $a_1=1$，公差 $d<0$，若 $\{a_n\}$ 是“回归数列”，求 d 的值；

（Ⅲ）是否对任意的等差数列 $\{a_n\}$，总存在两个“回归数列”$\{b_n\}$ 和 $\{c_n\}$，使得 $a_n=b_n+c_n$（$n\in N^*$）成立，请给出你的结论，并说明理由.

北京市十一学校 2019 届高三学部 2 月月考试卷

数 学（理科）

命题人：崔君强　曹磊

本试卷共 4 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，不收试卷，只需把答题卡按顺序排好交回。

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知全集 $U=R$，函数 $y=\ln(x-1)$ 的定义域为 M，集合 $N=\{x|x^2-x>0\}$，则下列结论正确的是（　B　）

A．$M\cap N=N$　　B．$M\cap(\complement_U N)=\varnothing$　　C．$M\cup N=U$　　D．$M=(\complement_U N)$

2.下列函数在其定义域内既是奇函数又是增函数的是（　A　）

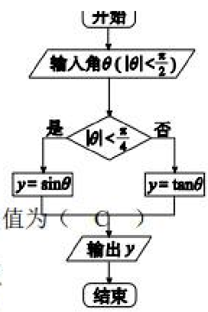
A．$y=x^3+x$　　B．$y=2^x$　　C．$y=\dfrac{1}{x}$　　D．$y=-\log_2 x$

3. “$\sqrt{a}>\sqrt{b}$” 是 “$\ln a>\ln b$” 的　（　B　）

A．充分而不必要条件　B．必要而不充分条件　C．充分必要条件　D．既不充分也不必要条件

【解析】注意 b 为 0 的情况

【解析】注意 b 为 0 的情况



4. 执行如图所示的程序框图．若输出 $y=-\sqrt{3}$，则输入角 $\theta=$（　D　）

A．$\dfrac{\pi}{6}$　　B．$-\dfrac{\pi}{6}$　　C．$\dfrac{\pi}{3}$　　D．$-\dfrac{\pi}{3}$

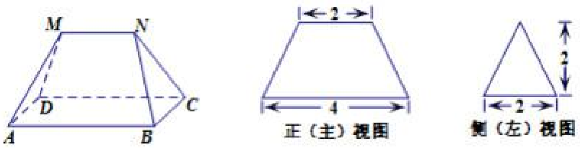
5. 在 ΔABC 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c 若 $(a^2+c^2-b^2)\tan B=\sqrt{3}ac$，则角 B 的值为（　C　）

A．$\dfrac{\pi}{3}$　　B．$\dfrac{\pi}{6}$　　C．$\dfrac{\pi}{3}$或$\dfrac{2\pi}{3}$　　D．$\dfrac{\pi}{6}$或$\dfrac{5\pi}{6}$

【解析】①用余弦定理：$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{\sqrt{3}}{2\tan B}\Leftrightarrow\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 从而选 C

②用正弦定理 $(a^2+c^2-b^2)\tan B=\sqrt{3}ac\Leftrightarrow(\sin^2 A+\sin^2 C-\sin^2 B)\tan B=\sqrt{3}\sin A\sin C$ 没那么好做，此法舍去.

6. 多面体 $MN-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 为矩形，其正（主）视图和侧（左）视图如图，其中正（主）视图为等腰梯形，侧（左）视图为等腰三角形，则 AM 的长为（　C　）



A. $\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{5}$　　C. $\sqrt{6}$　　D. $2\sqrt{2}$

【解析】主视图中等腰梯形腰长为多面体面 MDA 的 AD 边上的高线(三线合一)长度为，由侧视图可知 AD 为 2，由勾股定理可得 AM 为$\sqrt{6}$

7.已知等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，则下列结论中一定成立的(　B　)

A. 若$a_5>0$，则$S_{2019}<0$　　B. 若$a_5>0$，则$S_{2019}>0$

C. 若$a_6>0$，则$S_{2018}<0$　　D. 若$a_6>0$，则$S_{2018}>0$

【解析】我们考虑公比$q(q\neq0)$的正负，若$q>0$，若$a_5(a_6)>0$时，显然$a_n>0(n\in N^*)$，从而$S_n>0(n\in N^*)$排除 A,C；若$q<0$，$a_6>0$时，取$q=-\frac{1}{2}$，则$-a_{2k-1}>a_{2k}\Leftrightarrow a_{2k}+a_{2k-1}<0$，即$S_{2018}<0$，排除 D 从而选 B，对于 B 选项，我们可以如下证明：

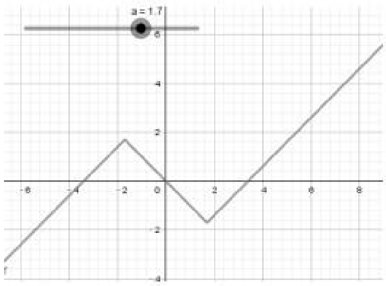
①$q>0$时命题成立；

②$-1<q<0$时，$a_{2k-1}>-a_{2k}$即$a_{2k-1}+a_{2k}>0$，从而$S_{2019}=(S_1+S_2)+\cdots+(S_{2017}+S_{2018})+S_{2019}>0$；

③$q\le-1$时，$-a_{2k}<a_{2k+1}\Leftrightarrow a_{2k}+a_{2k+1}>0$，从而$S_{2019}=S_1+(S_2+S_3)+\cdots+(S_{2018}+S_{2019})>0$

8. 设函数$f(x)$的定义域D，如果存在正实数m，使得对任意$x\in D$，都有$f(x+m)>f(x)$，则称$f(x)$为D上的“m型增函数”. 已知函数$f(x)$是定义在R上的奇函数，且当$x>0$时，$f(x)=|x-a|-a$ $(a\in R)$. 若$f(x)$为R上的“20型增f函数”，则实数a的取值范围是（　B　）

A. $a>0$　　B. $a<5$　　C. $a<10$　　D. $a<20$



【解析】首先$a<0$时，奇函数$f(x)$是个单调递增函数，显然也是“20 型增f函数”，排除 A；

只需考虑$a>0$时；如图所示：注意到，当$x\in[-3a,-a]$时，$f(x)=f(x+4a)$，且$y=f(x+4a)$是增函数，若$4a\ge20$，则$\forall x\in[-3a,-a]$，$f(x+20)\le f(x+4a)=f(x)$，此时$f(x)$不为为R上的“20 型增f函数”，若想若$f(x)$为R上的“20 型增f函数”，只能$a<5$选 B；对于$0<a<5$时，显然可得$\forall x\in R, f(x+20)>f(x)$

第二部分（非选择题 共 110 分）

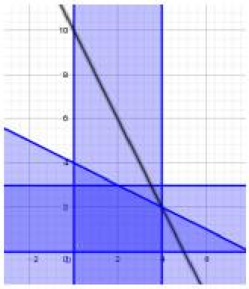
二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

9. 已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的一条渐近线为$y=\sqrt{3}x$，那么双曲线的离心率为____2____.

10. 设 i是虚数单位，复数$\frac{1+ai}{2-i}$所对应的点在第一象限，则实数a的取值范围为_ $-\frac{1}{2}<a<2$ __.

11．若变量x,y满足约束条件$\begin{cases}x+2y\le 8\\0\le x\le 4\\0\le y\le 3\end{cases}$ 则$z=2x+y$的最大值等于___10__.

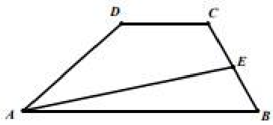
【解析】如图所示：



12. 在直角坐标系xOy中，曲线C_1的方程为$x^2+y^2=2$，曲线C_2的参数方程为$\begin{cases}x=2-t\\y=t\end{cases}$（$t$为参数）. 以原点$O$为极点，$x$轴非负半轴为极轴，建立极坐标系，则曲线$C_1$与$C_2$的交点的极坐标为 $(\sqrt{2},\frac{\pi}{4})$.

13. 在梯形$ABCD$中，$AB\,//\,CD$，$AB=2CD$，E为BC中点，若$\overrightarrow{AE}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$,则$x+y=$___$\frac{5}{4}$___.

【解析】如图所示：



$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$；

14. 对于函数$f(x)$和实数M，若存在$m,n\in N^*$，使$f(m)+f(m+1)+f(m+2)+\cdots+f(m+n)=M$成立，则称$(m,n)$为函数$f(x)$关于$M$的一个"生长点"．若$(1,2)$为函数$f(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)$关于$M$的一个"生长点"，则$M=$__$-\frac{1}{2}$_；若$f(x)=2x+1$，$M=105$，则函数$f(x)$关于$M$的 "生长点"共有_3__个

【解析】$(1,2)$为函数$f(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)$关于$M$的一个"生长点"，即

$M=f(1)+f(1+1)+f(1+2)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$；

设函数$f(x)=2x+1$关于$M=105$的 "生长点"为(m,n)，$m,n\in N^*$；则：

$f(m)+f(m+1)+f(m+2)+\cdots+f(m+n)=105$

$\Leftrightarrow (2m+1)+(2(m+1)+1)+\cdots+(2(m+n)+1)=105$

$\Leftrightarrow (2m+1+n)(n+1)=105=3\times5\times7$，$n+1=3,2m+n+1=35\Rightarrow n=2,m=16$

$n+1=5,2m+n+1=21\Rightarrow n=4,m=8$；$n+1=7,2m+n+1=15\Rightarrow n=6,m=4$；共计3个

$\therefore f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-1$，由 $y=\sin x$ 的单调性，

令 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in Z$，

得 $k\pi-\frac{5\pi}{12}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{12}$，$k\in Z$.

$\therefore$函数 f(x)的单调递增区间为$\left[k\pi-\frac{5\pi}{12}，k\pi+\frac{\pi}{12}\right]$，$k\in Z$. ……………………………………………6 分

(2)$\because$将 f(x)的图象向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度，得到函数 g(x)的图象，

$\therefore g(x)=f\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{3}\right]-1$

$=2\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)-1.$ ……………………………………………8 分

$\because 0\le x\le\frac{\pi}{2}$，$\therefore \frac{2\pi}{3}\le 2x+\frac{2\pi}{3}\le\frac{5\pi}{3}$， ……………………………………………9 分

由 $y=\sin x$ 性质可知，当 $2x+\frac{2\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$，即 $x=0$ 时，$\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，g(x)取最大值$\sqrt{3}-1$；

当 $2x+\frac{2\pi}{3}=\frac{3\pi}{2}$，即 $x=\frac{5\pi}{12}$时，$\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)=-1$，g(x)取最小值$-3$.

……………………………………………13 分

16.（本小题满分 13 分）

为降低雾霾等恶劣气候对居民的影响，某公司研发了一种新型防雾霾产品．每一台新产品在进入市场前都必须进行两种不同的检测，只有两种检测都合格才能进行销售，否则不能销售．已知该新型防雾霾产品第一种检测不合格的概率为$\frac{1}{6}$，第二种检测不合格的概率为$\frac{1}{10}$，两种检测是否合格相互独立．

（Ⅰ）求每台新型防雾霾产品不能销售的概率；

（Ⅱ）如果产品可以销售，则每台产品可获利 40 元；如果产品不能销售，则每台产品亏损 80 元（即获利-80 元）．现有该新型防雾霾产品 3 台，随机变量 X 表示这 3 台产品的获利，求 X 的分布列及数学期望．

【答案】（Ⅰ）记“该产品不能销售”为事件 A，则

$P(A)=1-(1-\frac{1}{6})\times(1-\frac{1}{10})=\frac{1}{4}$ …………………3 分

（Ⅱ）X 的所有可能取值为-240，-120,0,120 …………………4 分

$P(X=-240)=(\frac{1}{4})^3=\frac{1}{64}$　　$P(X=-120)=C_3^2(\frac{1}{4})^2\frac{3}{4}=\frac{9}{64}$

$P(X=0)=C_3^1\frac{1}{4}(\frac{3}{4})^2=\frac{27}{64}$　　$P(X=120)=(\frac{3}{4})^3=\frac{27}{64}$

……………………………8 分

所以 X 的分布列为

X	-240	-120	0	120
P	$\frac{1}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$

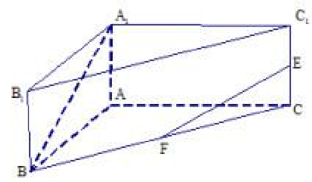
……………………………10 分

$EX=-240?\ \frac{1}{64}\quad 120?\ \frac{9}{64}\quad 0?\ \frac{27}{64}\quad 120?\ \frac{27}{64}\quad 30$

……………………………13 分

17.（本小题满分 14 分）

已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AA_1\perp$ 底面 ABC，$\angle BAC=90^\circ$，$AA_1=1$，$AB=\sqrt{3}$，$AC=2$，E,F 分别为棱 CC_1,BC 的中点.



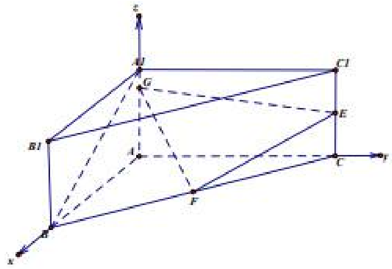
（Ⅰ）求证：　$AC\perp A_1B$；

（Ⅱ）求直线 EF 与 A_1B 所成的角；

（Ⅲ）若 G 为线段 AA_1 的中点，A_1 在平面 EFG 内的射影为 H，求 $\angle HA_1A$.

【答案】（Ⅰ）证明　因为三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$，$AA_1\perp$ 底面 ABC

所以 $AC \perp AA_1$.



因为 $\angle BAC = 90^\circ$,

所以 $AC \perp AB$.

因为 $A_1A \cap AB = A$,

所以 $AC \perp$ 平面A_1ABB_1 .

因为 $A_1B \subset$ 平面A_1ABB_1 ,

所以 $AC \perp A_1B$. ……4 分

（II）解

如图建立空间直角坐标系 A－xyz，

则 $A_1(0,0,1)$， $B(\sqrt{3},0,0)$，

$E\left(0,2,\frac{1}{2}\right)$， $F\left(\frac{\sqrt{3}}{2},1,0\right)$.

所以 $\overrightarrow{A_1B} = (\sqrt{3},0,-1)$， $\overrightarrow{EF} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2},-1,-\frac{1}{2}\right)$.

所以 $\cos\left\langle \overrightarrow{A_1B}, \overrightarrow{EF} \right\rangle = \frac{\overrightarrow{A_1B} \cdot \overrightarrow{EF}}{|\overrightarrow{A_1B}| \cdot |\overrightarrow{EF}|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

因为 $0^0 < \left\langle \overrightarrow{A_1B}, \overrightarrow{EF} \right\rangle < 90^0$,

所以 直线 EF 与 A_1B 所成的角为 45° . ……9 分

（III）解 设 $G\left(0,0,\frac{1}{2}\right)$

则 $\overrightarrow{GE} = (0,2,0)$ ， $\overrightarrow{GF} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2},1,-\frac{1}{2}\right)$.

AH 所在直线的向量与平面 GEF 的法向量平行.

设平面 GEF 的法向量为，$\vec{n} = (x,y,z)$ ，

因为 $\begin{cases} \vec{n} \perp \overrightarrow{GE} \\ \vec{n} \perp \overrightarrow{GF} \end{cases}$,

所以 $\begin{cases} 2y = 0, \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x + y - \frac{1}{2}z = 0. \end{cases}$

令 $z=\sqrt{3}$，则 $\vec{n}=\left(1,0,\sqrt{3}\right)$.

所以 AH 所在直线的单位向量为 $\vec{e}=\left(\frac{1}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

因为 $\overrightarrow{AA_1}=(0,0,1)$，

所以 $\cos\left\langle\overrightarrow{AA_1},\vec{e}\right\rangle=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

因为 $0<\left\langle\overrightarrow{AA_1},\vec{e}\right\rangle<\pi$，

所以 $\angle HA_1A=\frac{\pi}{6}$. .…14 分

18. （本小题满分 13 分）

已知椭圆 $M:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ 的焦距为 2，点 $D\left(0,\sqrt{3}\right)$ 在椭圆 M 上，过原点 O 作直线交椭圆 M 于 A,B 两点，且点 A 不是椭圆 M 的顶点，过点 A 作 x 轴的垂线，垂足为 H，点 C 是线段 AH 的中点，直线 BC 交椭圆 M 于点 P，连接 AP.

（Ⅰ）求椭圆 M 的方程及离心率；

（Ⅱ）求证：$AB\perp AP$.

18. （本小题满分 13 分）

（I）由题意知 $c=1,\ b=\sqrt{3}$，则 $a^2=b^2+c^2=4$，$a=2$ ……………3 分

所以椭圆 M 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，椭圆 M 的离心率为 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$. ……………5 分

（II）法一：设 $A(x_0,y_0),P(x_1,y_1)$，则 $B(-x_0,-y_0),C(x_0,\frac{y_0}{2})$.

由点 A,P 在椭圆上，所以 $\frac{{x_0}^2}{4}+\frac{{y_0}^2}{3}=1$ ① $\frac{{x_1}^2}{4}+\frac{{y_1}^2}{3}=1$ ② ……………7 分

点 A 不是椭圆 M 的顶点，②-①得 $\frac{{y_1}^2-{y_0}^2}{{x_1}^2-{x_0}^2}=-\frac{3}{4}$. ……………8 分

又 $k_{PB}=\dfrac{y_1+y_0}{x_1+x_0},k_{BC}=\dfrac{\frac{3}{2}y_0}{2x_0}=\dfrac{3y_0}{4x_0}$, 且点 B,C,P 三点共线，

所以 $\dfrac{y_1+y_0}{x_1+x_0}=\dfrac{3y_0}{4x_0}$，即 $\dfrac{y_0}{x_0}=\dfrac{4(y_1+y_0)}{3(x_1+x_0)}$. ……………11 分

所以，$k_{AB}\cdot k_{PA}=\dfrac{y_0}{x_0}\cdot\dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=\dfrac{4(y_1+y_0)}{3(x_1+x_0)}\cdot\dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$

$=\dfrac{4(y_1^2-y_0^2)}{3(x_1^2-x_0^2)}=\dfrac{4}{3}\times(-\dfrac{3}{4})=-1$

即 $AB\perp AP$. ……………13 分

法二：设 $A(x_0,y_0),P(x_1,y_1)$，则 $B(-x_0,-y_0),C(x_0,\dfrac{y_0}{2})$.

由点 A,P 在椭圆上，所以 $\dfrac{x_0^2}{4}+\dfrac{y_0^2}{3}=1$① $\dfrac{x_1^2}{4}+\dfrac{y_1^2}{3}=1$ ②

点 A 不是椭圆 M 的顶点，②-①得 $\dfrac{y_1^2-y_0^2}{x_1^2-x_0^2}=-\dfrac{3}{4}$

由已知 AB 与 AP 的斜率都存在，

$k_{PA}\bullet k_{PB}=\dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0}\bullet\dfrac{y_1+y_0}{x_1+x_0}=\dfrac{y_1^2-y_0^2}{x_1^2-x_0^2}=\dfrac{-\frac{3}{4}(x_1^2-x_0^2)}{x_1^2-x_0^2}=-\dfrac{3}{4}$

又 $k_{PB}=k_{BC}=\dfrac{3y_0}{4x_0}$, 得 $k_{PA}=-\dfrac{x_0}{y_0}$,

则 $k_{AB}\bullet k_{PA}=\dfrac{y_0}{x_0}\bullet(\dfrac{-x_0}{y_0})=-1$，

即 $AB\perp AP$. ……………13 分

法三：设 $A(x_0,y_0),P(x_1,y_1)$，则 $B(-x_0,-y_0),C(x_0,\dfrac{y_0}{2})$. 则 $3x_0^2+4y_0^2-12=0$

则 $k_{AB}=\dfrac{y_0}{x_0}$，$k_{BP}=k_{BC}=\dfrac{3y_0}{4x_0}$，直线 BP 的方程为 $y+y_0=\dfrac{3y_0}{4x_0}(x+x_0)$，即 $y=\dfrac{3y_0}{4x_0}x-\dfrac{1}{4}y_0$

代入 $3x^2+4y^2-12=0$ 中得 $\left(3+\dfrac{9y_0^2}{4x_0^2}\right)x^2-\dfrac{3y_0^2}{2x_0}x+\dfrac{1}{4}y_0^2-12=0$

所以 $x_1+(-x_0)=\dfrac{\frac{3y_0^2}{2x_0}}{3+\frac{9y_0^2}{4x_0^2}}=\dfrac{2x_0y_0^2}{4x_0^2+3y_0^2}$，即 $x_1=\dfrac{2x_0y_0^2}{4x_0^2+3y_0^2}+x_0$

所以 $y_1-y_0=\left(\dfrac{3y_0}{4x_0}x_1-\dfrac{1}{4}y_0\right)-y_0=\dfrac{3y_0}{4x_0}\left(\dfrac{2x_0y_0^2}{4x_0^2+3y_0^2}+x_0\right)-\dfrac{5}{4}y_0=-\dfrac{2x_0^2y_0}{4x_0^2+3y_0^2}$

所以 $k_{AP}=\dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=-\dfrac{x_0}{y_0}$

所以 $k_{AB}\cdot k_{AP}=-1$，所以 $AB\perp AP$。

法四：设 $A(x_0,y_0),P(x_1,y_1)$，则 $B(-x_0,-y_0),C(x_0,\dfrac{y_0}{2})$. 则 $3x_0^2+4y_0^2-12=0$

则 $k_{AB}=\dfrac{y_0}{x_0}$，$k_{BP}=k_{BC}=\dfrac{3y_0}{4x_0}$，直线 BP 的方程为 $y+y_0=\dfrac{3y_0}{4x_0}(x+x_0)$，即 $y=\dfrac{3y_0}{4x_0}x-\dfrac{1}{4}y_0$

代入 $3x^2+4y^2-12=0$ 中得 $\left(3+\dfrac{9y_0^2}{4x_0^2}\right)x^2-\dfrac{3y_0^2}{2x_0}x+\dfrac{1}{4}y_0^2-12=0$

所以 $x_1(-x_0)=\dfrac{x_0^2(y_0^2-48)}{12x_0^2+9y_0^2}$，即 $x_1=\dfrac{x_0(48-y_0^2)}{12x_0^2+9y_0^2}$（或 $x_1=\dfrac{x_0(4x_0^2+5y_0^2)}{4x_0^2+3y_0^2}$）

所以 $y_1=\dfrac{3y_0}{4x_0}x_1-\dfrac{1}{4}y_0=\dfrac{y_0(36-3x_0^2-3y_0^2)}{12x_0^2+9y_0^2}$（或 $y_1=\dfrac{y_0(2x_0^2+3y_0^2)}{4x_0^2+3y_0^2}$）

所以 $k_{AP}=\dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=-\dfrac{x_0}{y_0}$

所以 $k_{AB}\cdot k_{AP}=-1$，所以 $AB\perp AP$。

法五：设 $A(x_0,y_0),P(x_1,y_1)$，则 $B(-x_0,-y_0),C(x_0,\dfrac{y_0}{2})$. 则 $3x_0^2+4y_0^2-12=0$①

设直线 BP 的方程为 $y=kx+m$，则 $-y_0=k(-x_0)+m$，且 $\dfrac{y_0}{2}=kx_0+m$

所以 $k_{AB}=\dfrac{y_0}{x_0}=\dfrac{4}{3}k$，②

将 $y=kx+m$ 代入 $3x^2+4y^2-12=0$ 中得 $\left(3+4k^2\right)x^2+8kmx+4m^2-12=0$

由韦达定理得 $x_1+(-x_0)=\dfrac{-8km}{3+4k^2}$，即 $x_1=\dfrac{-8km}{3+4k^2}+x_0$

所以 $y_1-y_0=\left(kx_1+m\right)-y_0=k\left(\dfrac{-8km}{3+4k^2}+x_0\right)+m-y_0=\dfrac{-8km}{3+4k^2}+2m=\dfrac{6m}{3+4k^2}$

所以 $k_{AP}=\dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=-\dfrac{3}{4k}$

所以 $k_{AB}\cdot k_{AP}=-1$，所以 $AB\perp AP$。

19. （本小题满分 14 分）

已知函数 $f(x)=2\ln(x+1)$.

（Ⅰ）若函数 $f(x)$ 在点 $P(x_0,f(x_0))$ 处的切线平行于直线 $y=2x-2$，求切点 P 的坐标及此切线方程；

（Ⅱ）求证：当 $x\in[0,e-1]$ 时，$f(x)\ge x^2-2x$；（其中 $e=2.71828\cdots$）

（Ⅲ）确定非负实数 a 的取值范围，使得 $\forall x\ge 0, f(x)\ge a(2x-x^2)$ 成立.

【答案】（Ⅰ）解：定义域为 $(-1,+\infty)$， ………1 分

$f'(x)=\dfrac{2}{x+1}$. ………2 分

由题意，$f'(x_0)=2$，所以 $x_0=0, f(0)=0$，

即切点 P 的坐标为 $(0,0)$. ………3 分

此时切线方程 $y=2x$ ………4 分

（Ⅱ）证明：当 $x\in[0,e-1]$ 时，$f(x)\ge x^2-2x$，可转化为

当 $x\in[0,e-1]$ 时，$f(x)-x^2+2x\ge 0$ 恒成立.

设 $g(x)=f(x)-x^2+2x$，

所以原问题转化为当 $x\in[0,e-1]$ 时，$g(x)_{\min}\ge 0$ 恒成立. ………5 分

所以 $g'(x)=\dfrac{2}{x+1}-2x+2=\dfrac{4-2x^2}{x+1}$.

令 $g'(x)=0$，则 $x_1=-\sqrt{2}$（舍），$x_2=\sqrt{2}$.

所以 $g(x)$，$g'(x)$ 变化如下：

x	0	$(0,\sqrt{2})$	$\sqrt{2}$	$(\sqrt{2},e-1)$	$e-1$
$g'(x)$		+	0	−	
$g(x)$	$g(0)$	↗	极大值	↘	$g(e-1)$

………7 分

因为 $g(0)=f(0)-0=0$，$g(e-1)=2-(e-1)^2+2(e-1)=2+(e-1)(3-e)>0$，

所以 $g(x)_{\min}=0$.

当 $x\in[0,e-1]$ 时，$f(x)\ge x^2-2x$ 成立. ………………..8 分

（III）解：$\forall x\ge 0, f(x)\ge a(2x-x^2)$，可转化为

当 $x\ge 0$ 时，$f(x)-a(2x-x^2)\ge 0$ 恒成立. ………9 分

设 $h(x)=f(x)-a(2x-x^2)$，

所以 $h'(x)=\dfrac{2}{x+1}-2a+2ax=\dfrac{2(ax^2+1-a)}{x+1}$. ………10 分

(1)当 $a=0$ 时，对于任意的 $x\ge 0$，$h'(x)=\dfrac{2}{x+1}>0$，

所以 $h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上为增函数，所以 $h(x)_{\min}=h(0)=0$，

所以命题成立.

当 $a>0$ 时，令 $h'(x)=0$，则 $ax^2+1-a=0$， ………11 分

(2)当 $1-a\ge 0$，即 $0<a\le 1$ 时，对于任意的 $x\ge 0$，$h'(x)>0$，

所以 $h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上为增函数，所以 $h(x)_{\min}=h(0)=0$，

所以命题成立. ………12 分

(3)当 $1-a<0$，即 $a>1$ 时，

则 $x_1=-\sqrt{\dfrac{a-1}{a}}$（舍），$x_2=\sqrt{\dfrac{a-1}{a}}=\sqrt{1-\dfrac{1}{a}}>0$.

所以 $h(x)$，$h'(x)$ 变化如下：

x	0	$(0,x_2)$	x_2	$(x_2,+\infty)$
$h'(x)$		$-$	0	$+$
$h(x)$		↘	极小值	↗

因为 $h(x)_{\min}=h(x_2)<h(0)=0$，

所以，当 $x\ge 0$ 时，命题不成立. ……………………………13 分

综上，非负实数 a 的取值范围为 $[0,1]$. ……………………………14 分

20.（本小题满分 13 分）

若对任意的正整数 n，总存在正整数 m，使得数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=a_m$，则称 $\{a_n\}$ 是"回归数列".

（Ⅰ）①前 n 项和为 $S_n=2^n$ 的数列 $\{a_n\}$ 是否是"回归数列"？并请说明理由；

②通项公式为 $b_n=2n$ 的数列 $\{b_n\}$ 是否是"回归数列"？并请说明理由；

（Ⅱ）设 $\{a_n\}$ 是等差数列，首项 $a_1=1$，公差 $d<0$，若 $\{a_n\}$ 是"回归数列"，求 d 的值；

（Ⅲ）是否对任意的等差数列 $\{a_n\}$，总存在两个"回归数列" $\{b_n\}$ 和 $\{c_n\}$，使得 $a_n=b_n+c_n$（$n\in N^*$）成立，请给出你的结论，并说明理由.

解:（Ⅰ）①$\because S_n=2^n$，作差法可得 $a_n=S_n-S_{n-1}=2^{n-1}\ (n\geq 2)$，

当 $n=1$ 时，$S_1=a_1$；

当 $n\geq 2$ 时，$S_n=a_{n+1}$，存在 $m=n+1$，使得 $S_n=a_m$

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是"回归数列". ....2 分

②$\because b_n=2n$，$\therefore$ 前 n 项和 $T_n=n^2+n$，根据题意 $n^2+n=2m$

$\because n(n+1)$ 一定是偶数，$\therefore$ 存在 $m=\dfrac{n(n+1)}{2}$，使得 $T_n=b_m$

$\therefore$ 数列 $\{b_n\}$ 是"回归数列". ....4 分

（Ⅱ）$S_n=n+\dfrac{n(n-1)}{2}d$，根据题意，存在正整数 m，使得 $S_2=a_m$ 成立

即 $2+d=1+(m-1)d$，$d=\dfrac{1}{m-2}<0$，$m<2$，$m\in N^*$

$\therefore m=1$，即 $d=-1$. ....8 分

（Ⅲ）设等差数列 $a_n=a_1+(n-1)d$

总存在两个回归数列 $b_n=a_1-(n-1)a_1$，$c_n=(n-1)(a_1+d)$

使得 $a_n=b_n+c_n$ ....9 分

证明如下：

$b_n+c_n=a_1-(n-1)a_1+(n-1)a_1+(n-1)d=a_n$

数列 $\{b_n\}$ 前 n 项和 $B_n=na_1-\dfrac{n(n-1)}{2}a_1$，

$n=1$ 时，$m=1$；$n=2$ 时，$m=1$；

$n\geq 3$ 时，$2+\dfrac{(n-3)n}{2}$ 为正整数，当 $m=2+\dfrac{(n-3)n}{2}$ 时，$b_m=B_n$.

$\therefore$ 存在正整数 $m=2+\dfrac{(n-3)n}{2}$，使得 $B_n=b_m$，$\therefore \{b_n\}$ 是"回归数列"......11 分

数列 $\{c_n\}$ 前 n 项和 $C_n=\dfrac{n(n-1)}{2}(a_1+d)$ 存在正整数 $m=\dfrac{n(n-1)}{2}+1$，使得 $C_n=c_m$，$\therefore \{c_n\}$ 是"回归数列"，

所以结论成立. ....13 分

目前，北京高考在线拥有旗下拥有北京高考在线网站和北京高考资讯微信公众号两大媒体矩阵，关注用户超 10 万+。

北京高考在线_2018 年北京高考门户网站

http://www.gaokzx.com/

北京高考资讯微信：bj-gaokao