北京市西城区 2018 — 2019 学年度第一学期期末试卷

高三数学（理科）

2019.1

第 I 卷（选择题　共 40 分）

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1．已知集合 $A=\{x\,|\,x=2k,k\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{x\,|\,x^2\leqslant 5\}$，那么 $A\cap B=$

（A）$\{0,2,4\}$　　（B）$\{-2,0,2\}$

（C）$\{0,2\}$　　（D）$\{-2,2\}$

2．在等比数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_3=2$，$a_5=8$，则 $a_7=$

（A）10　　（B）16　　（C）24　　（D）32

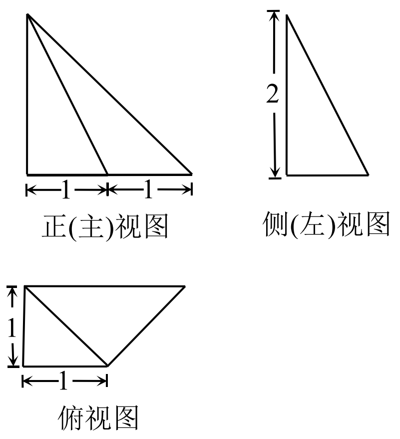
3．一个四棱锥的三视图如图所示，那么这个四棱锥最长棱的棱长为

（A）$\sqrt{5}$

（B）$\sqrt{6}$

（C）$2\sqrt{2}$

（D）$\sqrt{10}$



4．在极坐标系中，点 $P(2,\frac{\pi}{2})$ 到直线 $\rho\cos\theta=-1$ 的距离等于

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）$\sqrt{2}$

5．在平面直角坐标系 xOy 中，点 $A(1,1)$，点 B 在圆 $x^2+y^2=4$ 上，则 $|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|$ 的最大值为

（A）3　　（B）$1+\sqrt{2}$　　（C）$2+\sqrt{2}$　　（D）4

6. 设 $M,N>0$，$0<a<1$，则“$\log_a M>\log_b N$”是“$M<N+1$”的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充要条件　　（D）既不充分也不必要条件

7. 已知函数 $f(x)=\sin \pi x$，$g(x)=x^2-x+2$，则

（A）曲线 $y=f(x)+g(x)$ 不是轴对称图形　　（B）曲线 $y=f(x)-g(x)$ 是中心对称图形

（C）函数 $y=f(x)g(x)$ 是周期函数　　（D）函数 $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 最大值为 $\dfrac{4}{7}$

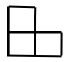
8. 一个国际象棋棋盘（由 8×8 个方格组成），其中有一个小方格因破损而被剪去（破损位置不确定）．“L”形骨牌由三个相邻的小方格组成，如图所示．现要将这个破损的棋盘剪成数个“L”形骨牌，则

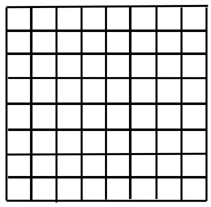
（A）至多能剪成 19 块“L”形骨牌

（B）至多能剪成 20 块“L”形骨牌

（C）一定能剪成 21 块“L”形骨牌

（D）前三个答案都不对


“L”形骨牌


国际象棋棋盘

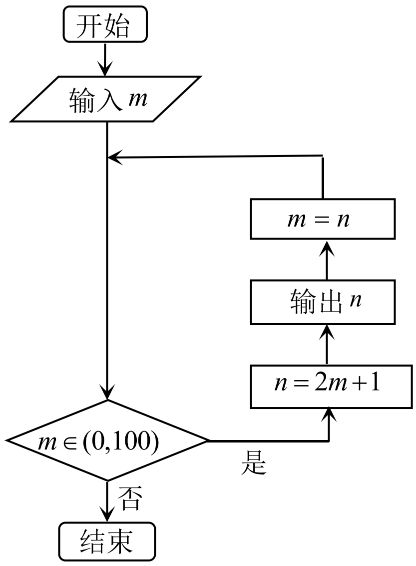
第 II 卷（非选择题　共 110 分）

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9．复数 z 满足方程 $1-\mathrm{i}\cdot z=\mathrm{i}$，则 $z=$____.

10．已知角 α 的终边经过点 $(-3,4)$，则 $\tan\alpha=$____；$\cos(\alpha+\pi)=$____.

11．执行如图所示的程序框图，若输入的 $m=1$，则输出数据的总个数为____.



12．设 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}2x-y+3\geqslant 0,\\ x-y-3\leqslant 0,\\ x+2y\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $z=x+3y$ 的取值范围是____.

13．能说明“若定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(0)f(2)>0$，则 $f(x)$ 在区间 $(0,2)$ 上不存在零点”为假命题的一个函数是____.

14．设双曲线 $C: x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$ 的左焦点为 F，右顶点为 A．若在双曲线 C 上，有且只有 2 个不同的点 P 使得 $\overrightarrow{PF}\cdot\overrightarrow{PA}=\lambda$ 成立，则实数 λ 的取值范围是____.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（本小题满分 13 分）

在 ΔABC 中， $a=3$， $b=2\sqrt{6}$， $B=2A$.

（Ⅰ）求 $\cos A$ 的值；

（Ⅱ）试比较 $\angle B$ 与 $\angle C$ 的大小.

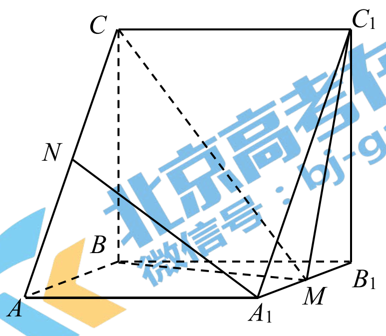
16.（本小题满分 14 分）

如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧面 B_1BCC_1 为正方形， M， N 分别是 A_1B_1， AC 的中点， $AB\perp$ 平面 BCM .

（Ⅰ）求证：平面 $B_1BCC_1\perp$ 平面 A_1ABB_1；

（Ⅱ）求证： A_1N // 平面 BCM ；

（Ⅲ）若 A_1ABB_1 是边长为 2 的菱形，求直线 A_1N 与平面 MCC_1 所成角的正弦值.

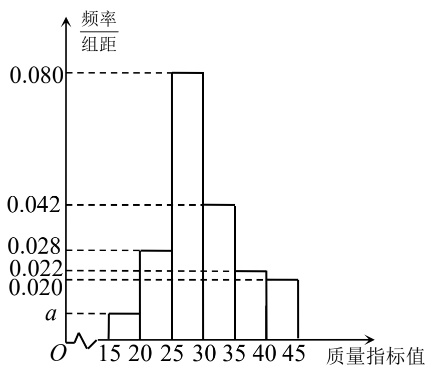


17.（本小题满分 13 分）

为保障食品安全，某地食品监管部门对辖区内甲、乙两家食品企业进行检查，分别从这两家企业生产的某种同类产品中随机抽取了 100 件作为样本，并以样本的一项关键质量指标值为检测依据. 已知该质量指标值对应的产品等级如下：

质量指标值	$[15,20)$	$[20,25)$	$[25,30)$	$[30,35)$	$[35,40)$	$[40,45]$
等级	次品	二等品	一等品	二等品	三等品	次品

根据质量指标值的分组，统计得到了甲企业的样本频率分布直方图和乙企业的样本频数分布表（图表如下，其中 $a>0$）.



甲企业

质量指标值	频数
$[15,20)$	2
$[20,25)$	18
$[25,30)$	48
$[30,35)$	14
$[35,40)$	16
$[40,45]$	2
合计	100

乙企业

（Ⅰ）现从甲企业生产的产品中任取一件，试估计该件产品为次品的概率；

（Ⅱ）为守法经营、提高利润，乙企业将所有次品销毁，并将一、二、三等品的售价分别定为 120 元、90 元、60 元. 一名顾客随机购买了乙企业销售的 2 件该食品，记其支付费用为 X 元，用频率估计概率，求 X 的分布列和数学期望；

（Ⅲ）根据图表数据，请自定标准，对甲、乙两企业食品质量的优劣情况进行比较.

18.（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=\ln x-x+a$，其中 $a\in\mathbf{R}$.

（Ⅰ）如果曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴相切，求 a 的值；

（Ⅱ）如果函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x^2}$ 在区间 $(1,\mathrm{e})$ 上不是单调函数，求 a 的取值范围.

19．（本小题满分 14 分）

已知椭圆 C: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{2}=1(a>\sqrt{2})$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，左、右顶点分别为 A,B，点 M 是椭圆 C 上异于 A,B 的一点，直线 AM 与 y 轴交于点 P.

（Ⅰ）若点 P 在椭圆 C 的内部，求直线 AM 的斜率的取值范围;

（Ⅱ）设椭圆 C 的右焦点为 F，点 Q 在 y 轴上，且 $AQ//BM$，求证：$\angle PFQ$ 为定值.

20．（本小题满分 13 分）

设正整数数列 A: $a_1,a_2,\cdots,a_N(N>3)$ 满足 $a_i<a_j$，其中 $1\leqslant i<j\leqslant N$．如果存在 $k\in\{2,3,\cdots,N\}$，使得数列 A 中任意 k 项的算术平均值均为整数，则称 A 为“k 阶平衡数列”.

（Ⅰ）判断数列 2, 4, 6, 8, 10 和数列 1, 5, 9, 13, 17 是否为“4 阶平衡数列”？

（Ⅱ）若 N 为偶数，证明：数列 A: $1,2,3,\cdots,N$ 不是“k 阶平衡数列”，其中 $k\in\{2,3,\cdots,N\}$.

（Ⅲ）如果 $a_N\leqslant 2019$，且对于任意 $k\in\{2,3,\cdots,N\}$，数列 A 均为“k 阶平衡数列”，求数列 A 中所有元素之和的最大值.

北京市西城区 2018 — 2019 学年度第一学期期末

高三数学（理科）参考答案及评分标准

2019.1

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

1．B　　2．D　　3．C　　4．A

5．C　　6．A　　7．D　　8．C

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9．$-1-\mathrm{i}$　　10．$-\frac{4}{3}$；$\frac{3}{5}$　　11．6

12．$[-1,+\infty)$　　13．答案不唯一，如 $f(x)=(x-1)^2$　　14．$(-2,0)$

注：第 10 题第一问 3 分，第二问 2 分.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．其他正确解答过程，请参照评分标准给分.

15．（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）在 ΔABC 中，由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，　………………… 2 分

得 $\frac{3}{\sin A}=\frac{2\sqrt{6}}{\sin 2A}$，即 $\frac{3}{\sin A}=\frac{2\sqrt{6}}{2\sin A\cos A}$，　………………… 4 分

解得 $\cos A=\frac{\sqrt{6}}{3}$.　………………… 6 分

（Ⅱ）由 $A\in(0,\pi)$，得 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.　………………… 7 分

因为 $B=2A$，

所以 $\cos B=\cos 2A=2\cos^2 A-1=\frac{1}{3}$.　………………… 8 分

所以 $\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.　………………… 9 分

又因为 $A+B+C=\pi$，

所以 $\cos C=-\cos(A+B)=-\cos A\cos B+\sin A\sin B=\frac{\sqrt{6}}{9}$.　………………… 11 分

所以 $\cos B>\cos C$.

又因为函数 $y=\cos x$ 在 $(0,\pi)$ 上单调递减，且 $B,C\in(0,\pi)$，

所以 $\angle B<\angle C$.　………………… 13 分

16.（本小题满分 14 分）

解：（Ⅰ）因为 $AB\perp$ 平面 BCM， $BC\subset$ 平面 BCM，

所以 $AB\perp BC$. ………………… 1 分

由正方形 B_1BCC_1，知 $BB_1\perp BC$，

又因为 $AB\cap BB_1=B$，

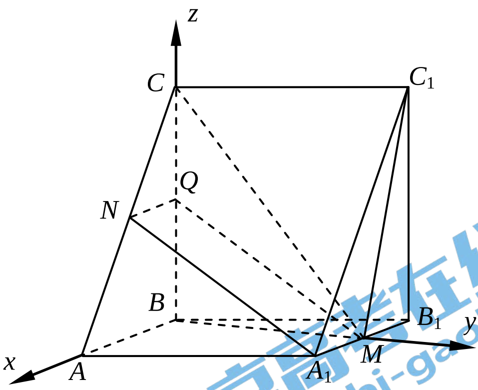
所以 $BC\perp$ 平面 A_1ABB_1. ………………… 3 分

又因为 $BC\subset$ 平面 B_1BCC_1，

所以平面 $B_1BCC_1\perp$ 平面 A_1ABB_1. ………………… 4 分

（Ⅱ）设 BC 中点 Q，连结 $NQ,\ MQ$.

因为 M， N 分别是 A_1B_1， AC 的中点，



所以 $NQ\,//\,AB$，且 $NQ=\dfrac{1}{2}AB$.

又因为 $AB\,//\,A_1B_1$，且 $AB=A_1B_1$，

所以 $NQ\,//\,A_1M$，且 $NQ=A_1M$.

所以四边形 A_1MQN 为平行四边形.

所以 $A_1N\,//\,MQ$. ………………… 6 分

又因为 $MQ\subset$ 平面 BCM， $A_1N\not\subset$ 平面 BCM，

所以 $A_1N\,//$ 平面 BCM. ………………… 8 分

（Ⅲ）由（Ⅰ）可知 BA， BM， BC 两两互相垂直，因此以 B 为原点，以 BA， BM， BC 分别为 x 轴， y 轴， z 轴建立空间直角坐标系 $B-xyz$，如图所示. ………… 9 分

因为 A_1ABB_1 是边长为 2 的菱形， M 为 A_1B_1 的中点，且 $A_1B_1\perp BM$，

易得 $\angle BB_1A_1=60^\circ$，则 $B(0,0,0)$， $A(2,0,0)$， $M(0,\sqrt{3},0)$， $C(0,0,2)$， $A_1(1,\sqrt{3},0)$，

$B_1(-1,\sqrt{3},0)$， $C_1(-1,\sqrt{3},2)$， $N(1,0,1)$. ………………… 10 分

所以 $\overrightarrow{A_1N}=(0,-\sqrt{3},1)$， $\overrightarrow{MC_1}=(-1,0,2)$， $\overrightarrow{CC_1}=(-1,\sqrt{3},0)$.

设平面 MCC_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases} \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{MC_1}=0, \\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CC_1}=0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} -x+2z=0, \\ -x+\sqrt{3}y=0. \end{cases}$

令 $y=2$，则 $x=2\sqrt{3}$， $z=\sqrt{3}$．所以 $\boldsymbol{n}=(2\sqrt{3},2,\sqrt{3})$． ………………… 12 分

设直线 A_1N 与平面 MCC_1 所成角为 α，

则 $\sin\alpha=|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{A_1N}\rangle|=\left|\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1N}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{A_1N}|}\right|=\dfrac{\sqrt{57}}{38}$．

因此直线 A_1N 与平面 MCC_1 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{57}}{38}$． ………………… 14 分

17．（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）由 $(a+0.020+0.022+0.028+0.042+0.080)\times5=1$，得 $a=0.008$， …………2 分

所以甲企业的样本中次品的频率为 $(a+0.020)\times5=0.14$，

故从甲企业生产的产品中任取一件，该产品是次品的概率约为 0.14． ……… 4 分

（Ⅱ）由图表知，乙企业在 100 件样品中合格品有 96 件，

则一等品的概率为 $\dfrac{48}{96}=\dfrac{1}{2}$，二等品的概率为 $\dfrac{18+14}{96}=\dfrac{1}{3}$，三等品的概率为 $\dfrac{16}{96}=\dfrac{1}{6}$，

………………… 5 分

由题意，随机变量 X 的所有可能取值为：120，150，180，210，240． …… 6 分

且 $P(X=120)=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{36}$， $P(X=150)=\mathrm{C}_2^1\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{9}$，

$P(X=180)=\mathrm{C}_2^1\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{5}{18}$， $P(X=210)=\mathrm{C}_2^1\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}$，

$P(X=240)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$． ………………… 8 分

所以随机变量 X 的分布列为：

X	120	150	180	210	240
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

………………… 9 分

所以 $E(X)=120\times\dfrac{1}{36}+150\times\dfrac{1}{9}+180\times\dfrac{5}{18}+210\times\dfrac{1}{3}+240\times\dfrac{1}{4}=200$． ………10 分

（Ⅲ）答案不唯一，只要言之有理便可得分（下面给出几种参考答案）．

（1）以产品的合格率（非次品的占有率）为标准，对甲、乙两家企业的食品质量进行比较．

由图表可知：甲企业产品的合格率约为0.86，乙企业产品的合格率约为0.96，即乙企业产品的合格率高于甲企业产品的合格率，

所以可以认为乙企业的食品生产质量更高.

（2）以产品次品率为标准对甲、乙两家企业的食品质量进行比较（略）.

（3）以产品中一等品的概率为标准，对甲、乙两家企业的食品质量进行比较.

根据图表可知，甲企业产品中一等品的概率约为0.4；乙企业产品中一等品的概率约为0.48，即乙企业产品中一等品的概率高于甲企业产品中一等品的概率，

所以乙企业的食品生产质量更高.

（4）根据第（II）问的定价，计算购买一件产品费用的数学期望，进而比较甲、乙两个企业产品的优劣（略）. ………………… 13 分

18.（本小题满分 13 分）

解：（I）求导，得 $f'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$， ………………… 1 分

因为曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴相切，所以此切线的斜率为 0， ………………… 2 分

由 $f'(x)=0$，解得 $x=1$，

又由曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴相切，得 $f(1)=-1+a=0$，

解得 $a=1$. ………………… 4 分

（II）由题意，得 $g(x)=\frac{f(x)}{x^2}=\frac{\ln x-x+a}{x^2}$，

求导，得 $g'(x)=\frac{x-2\ln x+1-2a}{x^3}$， ………………… 5 分

因为 $x\in(1,\mathrm{e})$，所以 $g'(x)$ 与 $h(x)=x-2\ln x+1-2a$ 的正负号相同.…… 6 分

对 $h(x)$ 求导，得 $h'(x)=1-\frac{2}{x}=\frac{x-2}{x}$，

由 $h'(x)=0$，解得 $x=2$， ………………… 7 分

当 x 变化时，$h'(x)$ 与 $h(x)$ 的变化情况如下表所示：

x	$(1,2)$	2	$(2,\mathrm{e})$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	↘	极小值	↗

所以 $h(x)$ 在 $(1,2)$ 上单调递减，在 $(2,\mathrm{e})$ 上单调递增.

又因为 $h(1)=2-2a$，$h(\mathrm{e})=\mathrm{e}-1-2a$，

所以 $h(x)_{\min}=h(2)=3-2\ln 2-2a$； $h(x)_{\max}=h(1)=2-2a$． ………………… 9 分

如果函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x^2}$ 在区间 $(1,\mathrm{e})$ 上单调递增，则当 $x\in(1,\mathrm{e})$ 时，$g'(x)\geqslant 0$．

所以 $h(x)\geqslant 0$ 在区间 $(1,\mathrm{e})$ 上恒成立，即 $h(x)_{\min}=h(2)=3-2\ln 2-2a\geqslant 0$，

解得 $a\leqslant\dfrac{3}{2}-\ln 2$，且当 $a=\dfrac{3}{2}-\ln 2$ 时，$g'(x)=0$ 的解有有限个，

即当函数 $g(x)$ 在区间 $(1,\mathrm{e})$ 上单调递增时，$a\leqslant\dfrac{3}{2}-\ln 2$； ① ………… 11 分

如果函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x^2}$ 在区间 $(1,\mathrm{e})$ 上单调递减，则当 $x\in(1,\mathrm{e})$ 时，$g'(x)\leqslant 0$，

所以 $h(x)\leqslant 0$ 在区间 $(1,\mathrm{e})$ 上恒成立，即 $h(x)_{\max}=h(1)=2-2a\leqslant 0$，

解得 $a\geqslant 1$，且当 $a=1$ 时，$g'(x)=0$ 的解有有限个，

所以当函数 $g(x)$ 在区间 $(1,\mathrm{e})$ 上单调递减时，$a\geqslant 1$． ② ………… 12 分

因为函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x^2}$ 在区间 $(1,\mathrm{e})$ 上不是单调函数，

结合①②，可得 $\dfrac{3}{2}-\ln 2<a<1$，

所以实数 a 的取值范围是 $\dfrac{3}{2}-\ln 2<a<1$． ………………… 13 分

19．（本小题满分 14 分）

解：（Ⅰ）由题意，得 $c^2=a^2-2$，$\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$， ………………… 2 分

解得 $a=2$，$c=\sqrt{2}$，所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$． ………………… 3 分

设 $P(0,m)$，由点 P 在椭圆 C 的内部，得 $-\sqrt{2}<m<\sqrt{2}$，

又因为 $A(-2,0)$，

所以直线 AM 的斜率 $k_{AM}=\dfrac{m-0}{0+2}=\dfrac{m}{2}\in(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2})$， ………………… 5 分

又因为 M 是椭圆 C 上异于 A,B 的一点，

所以 $k_{AM}\in(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},0)\cup(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2})$． ………………… 6 分

（Ⅱ）由题意 $F(\sqrt{2},0)$，设 $M(x_0,y_0)$，其中 $x_0\neq\pm 2$，则 $\dfrac{x_0^2}{4}+\dfrac{y_0^2}{2}=1$．

所以直线 AM 的方程为 $y=\dfrac{y_0}{x_0+2}(x+2)$． ………………… 7 分

令 $x=0$，得点 P 的坐标为 $(0,\dfrac{2y_0}{x_0+2})$. ………………8 分

因为 $k_{MB}=\dfrac{y_0}{x_0-2}$，所以 $k_{AQ}=\dfrac{y_0}{x_0-2}$.

所以直线 AQ 的方程为 $y=\dfrac{y_0}{x_0-2}(x+2)$. ………………10 分

令 $x=0$，得点 Q 的坐标为 $(0,\dfrac{2y_0}{x_0-2})$.

由 $\overrightarrow{FP}=(-\sqrt{2},\dfrac{2y_0}{x_0+2})$，$\overrightarrow{FQ}=(-\sqrt{2},\dfrac{2y_0}{x_0-2})$， ………………12 分

得 $\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FQ}=2+\dfrac{4y_0^2}{x_0^2-4}=\dfrac{2x_0^2+4y_0^2-8}{x_0^2-4}=0$，

所以 $\overrightarrow{FP}\perp\overrightarrow{FQ}$，即 $\angle PFQ=90^\circ$，

所以 $\angle PFQ$ 为定值. ………………14 分

20.（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）数列 2, 4, 6, 8, 10 不是 4 阶平衡数列；

数列 1, 5, 9, 13, 17 是 4 阶平衡数列. ………………3 分

（Ⅱ）若 k 为偶数，设 $k=2m\,(m\in\mathbf{N}^*)$.

考虑 $1,2,3,\cdots,k$ 这 k 项，其和为 $S=\dfrac{k(k+1)}{2}$，

所以这 k 项的算术平均值为 $\dfrac{S}{k}=\dfrac{(k+1)}{2}=\dfrac{2m+1}{2}$，此数不是整数. ………… 5 分

若 k 为奇数，设 $k=2m+1\,(m\in\mathbf{N}^*)$.

考虑 $1,2,3,\cdots,k-1,k+1$ 这 k 项，其和为 $S'=\dfrac{k(k+1)}{2}+1$，

所以这 k 项的算术平均值为 $\dfrac{S'}{k}=\dfrac{(k+1)}{2}+\dfrac{1}{k}=m+1+\dfrac{1}{2m+1}$，此数不是整数.

故数列 A: $1,2,3,\cdots,N$ 不是“k 阶平衡数列”，其中 $k\in\{2,3,\cdots,N\}$. ……… 8 分

（Ⅲ）在数列 A 中任取两项 $a_s,a_t\,(s\neq t)$，对于任意 $k\in\{2,3,\cdots,N-1\}$，在 A 中任取与 a_s,a_t 相

异的 $k-1$ 项，并设这 $k-1$ 项的和为 S_0.

由题意，得 S_0+a_s, S_0+a_t 都是 k 的倍数，即 $S_0+a_s=pk, S_0+a_t=qk\ (p,q\in\mathbf{Z})$，

因此 $a_s-a_t=(p-q)k$，

即数列中任意两项的差 a_s-a_t 都是 k 的倍数，其中 $k\in\{2,3,\cdots,N-1\}$.

因此所求数列 A 的任意两项之差都是 $2,3,\cdots,N-1$ 的公倍数. ……………… 9 分

如果数列 A 的项数超过 8，那么 $a_2-a_1, a_3-a_2,\cdots,a_8-a_7$ 均为 2, 3, 4, 5, 6, 7 的倍数，

即 $a_2-a_1, a_3-a_2,\cdots,a_8-a_7$ 均为 420 的倍数（注：420 为 2, 3, 4, 5, 6, 7 的最小公倍数），

所以 $a_8-a_1=(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_8-a_7)>420\times7=2940$，

所以 $a_8>2940+a_1>2940$，这与 $a_N\leqslant2019$ 矛盾，

因此数列 A 至多有 7 项. ……………… 11 分

如果数列 A 的项数为 7，那么 $a_2-a_1, a_3-a_2,\cdots,a_7-a_6$ 均为 2, 3, 4, 5, 6 的倍数，

即 $a_2-a_1, a_3-a_2,\cdots,a_7-a_6$ 均为 60 的倍数（注：60 为 2, 3, 4, 5, 6 的最小公倍数），

又因为 $a_7\leqslant2019$，且 $a_1<a_2<a_3<\cdots<a_7$，

所以 $a_6\leqslant2019-60$，$a_5\leqslant2019-2\times60$，…，$a_1\leqslant2019-6\times60$，

所以 $a_1+a_6+\cdots+a_7\leqslant2019+(2019-60)+\cdots+(2019-6\times60)=12873$.

当且仅当 $a_i=2019-60(7-i)=1599+60i$（其中 $i=1,2,\cdots,7$）时，$a_1+a_6+\cdots+a_7$ 取到最大值 12873.

验证知此数列为"k 阶平衡数列"，其中 $k\in\{2,3,\cdots,N\}$.

如果数列 A 的项数小于或等于 6，由 $a_N\leqslant2019$，得数列 A 中所有项之和小于或等于 $2019\times6=12114$.

综上可得：数列 A 的所有元素之和的最大值为 12873. ……………… 13 分