工作秘密 严禁外传
擅自泄露 严肃追责

成都市2019级高中毕业班第三次诊断性检测

数　学(理科)

本试卷分选择题和非选择题两部分。第Ⅰ卷(选择题)1至2页,第Ⅱ卷(非选择题)3至4页,共4页,满分150分,考试时间120分钟。

注意事项:

1. 答题前,务必将自己的姓名、考籍号填写在答题卡规定的位置上。
2. 答选择题时,必须使用2B铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦擦干净后,再选涂其它答案标号。
3. 答非选择题时,必须使用0.5毫米黑色签字笔,将答案书写在答题卡规定的位置上。
4. 所有题目必须在答题卡上作答,在试题卷上答题无效。
5. 考试结束后,只将答题卡交回。

第Ⅰ卷　(选择题,共60分)

一、选择题:本大题共12小题,每小题5分,共60分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 命题“$\forall x\in \mathbf{R}, e^x+2>0$”的否定是

(A) $\exists x_0\in \mathbf{R}, e^{x_0}+2\leqslant 0$　　(B) $\forall x\in \mathbf{R}, e^x+2\leqslant 0$

(C) $\exists x_0\in \mathbf{R}, e^{x_0}+2>0$　　(D) $\forall x_0\in \mathbf{R}, e^{x_0}+2<0$

2. 设集合 $A=\{x \mid |x|<2\}$, $B=\{x \mid x^2-3x<0\}$,则 $A\cup B=$

(A)$(-2,3)$　　(B)$(-2,0)$　　(C)$(0,2)$　　(D)$(2,3)$

3. 二项式$(1+2x)^5$展开式的各项系数之和为

(A)-1　　(B)1　　(C)32　　(D)243

4. 若实数 x,y 满足约束条件$\begin{cases}2x-y-3\leqslant 0,\\ x-y+1\geqslant 0,\\ x+y-3\geqslant 0.\end{cases}$ 则 $z=x+2y$ 的最小值为

(A)-1　　(B)4　　(C)5　　(D)14

5. 在$\triangle ABC$中,已知$\angle A=\dfrac{7\pi}{12}$,$\angle C=\dfrac{\pi}{6}$,$AC=2\sqrt{2}$,则向量$\overrightarrow{BA}$在$\overrightarrow{BC}$方向上的投影为

(A)$2\sqrt{2}$　　(B)2　　(C)$\sqrt{2}$　　(D)$-\sqrt{2}$

6. 设 F_1,F_2 是双曲线 $C:x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$ 的左,右焦点,点 P 在双曲线 C 的右支上. 当$|PF_1|=6$时,$\triangle PF_1F_2$的面积为

(A)$4\sqrt{3}$　　(B)$3\sqrt{7}$　　(C)$\dfrac{\sqrt{455}}{2}$　　(D)$6\sqrt{7}$

7. 将最小正周期为 π 的函数 $f(x)=2\sin(2\omega x-\frac{\pi}{6})+1(\omega>0)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度，得到函数 $g(x)$ 的图象，则函数 $g(x)$ 的图象的对称中心为

(A) $(-\frac{5\pi}{24}+\frac{k\pi}{4},1),k\in\mathbf{Z}$　　(B) $(-\frac{\pi}{48}+\frac{k\pi}{2},1),k\in\mathbf{Z}$

(C) $(-\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2},1),k\in\mathbf{Z}$　　(D) $(-\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{2},1),k\in\mathbf{Z}$

8. 已知 α,β 为空间中的两个平面，m,n 为两条异面直线，且 $m\perp$ 平面 α，$n\perp$ 平面 β. 若直线 l 满足 $l\perp m$，$l\perp n$，$l\not\subset\alpha$，$l\not\subset\beta$，则

(A) $\alpha /\!/ \beta$，$l /\!/ \alpha$　　(B) α 与 β 相交，且交线垂直于 l

(C) $\alpha\perp\beta$，$l\perp\beta$　　(D) α 与 β 相交，且交线平行于 l

9. 在某大学一食品超市，随机询问了 70 名不同性别的大学生在购买食物时是否查看营养说明，得到如下的列联表：

	女	男	总　计
要查看营养说明	15	25	40
不查看营养说明	20	10	30
总　计	35	35	70

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

$P(K^2\geqslant k_0)$	0.50	0.40	0.25	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005
k_0	0.455	0.708	1.323	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879

根据列联表的独立性检验，则下列说法正确的是

(A) 在犯错误的概率不超过 0.05 的前提下认为该校大学生在购买食物时要查看营养说明的人数中男生人数更多

(B) 在犯错误的概率不超过 0.010 的前提下认为该校女大学生在购买食物时要查看营养说明的人数与不查看营养说明的人数比为 $\frac{3}{4}$

(C) 在犯错误的概率不超过 0.025 的前提下认为性别与是否查看营养说明有关系

(D) 在犯错误的概率不超过 0.010 的前提下认为性别与是否查看营养说明有关系

10. 若实数 m,n 满足 $\frac{1}{2}n=\sqrt{2m-m^2}$，则 $2m+\sqrt{3}n-2$ 的最大值为

(A) 2　　(B) 3　　(C) $2\sqrt{3}$　　(D) 4

11. 已知三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 的六个顶点都在球 O 的球面上，$AA_1=BB_1=CC_1=\sqrt{10}$，$\triangle ABC$ 和 $\triangle A_1B_1C_1$ 分别是边长为 $\sqrt{3}$ 和 $2\sqrt{3}$ 的正三角形，则球 O 的体积为

(A) $\frac{32\pi}{3}$　　(B) $\frac{20\sqrt{5}\pi}{3}$　　(C) 36π　　(D) $\frac{40\sqrt{10}\pi}{3}$

12. 若函数 $f(x)=9^x+\dfrac{\log_{3}\sqrt{x-1}}{x^2-x}$ 的零点为 x_0，则 $9^{x_0}(x_0-1)=$

(A) $\frac{1}{3}$　　(B) 1　　(C) $\sqrt{3}$　　(D) 2

第Ⅱ卷 （非选择题，共 90 分）

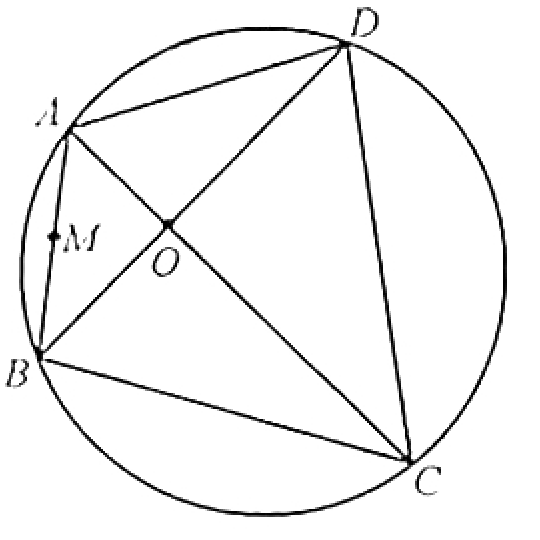
二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．把答案填在答题卡上．

13. 已知 i 为虚数单位，则复数 $z=\dfrac{-1+2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$ 的实部为______．

14. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=3$，$a_na_{n+1}+2=2a_n$，则 a_{2022} 的值为______．

15. 记定义在 R 上的可导函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，且 $f'(x)-f(x)>0$，$f(1)=1$，则不等式 $f(x)>e^{x-1}$ 的解集为______．

16. 如图，经过坐标原点 O 且互相垂直的两条直线 AC 和 BD 与圆 $x^2+y^2-4x+2y-20=0$ 相交于 A，C，B，D 四点，M 为弦 AB 的中点．有下列结论：



①弦 AC 长度的最小值为 $4\sqrt{5}$；

②线段 BO 长度的最大值为 $10-\sqrt{5}$；

③点 M 的轨迹是一个圆；

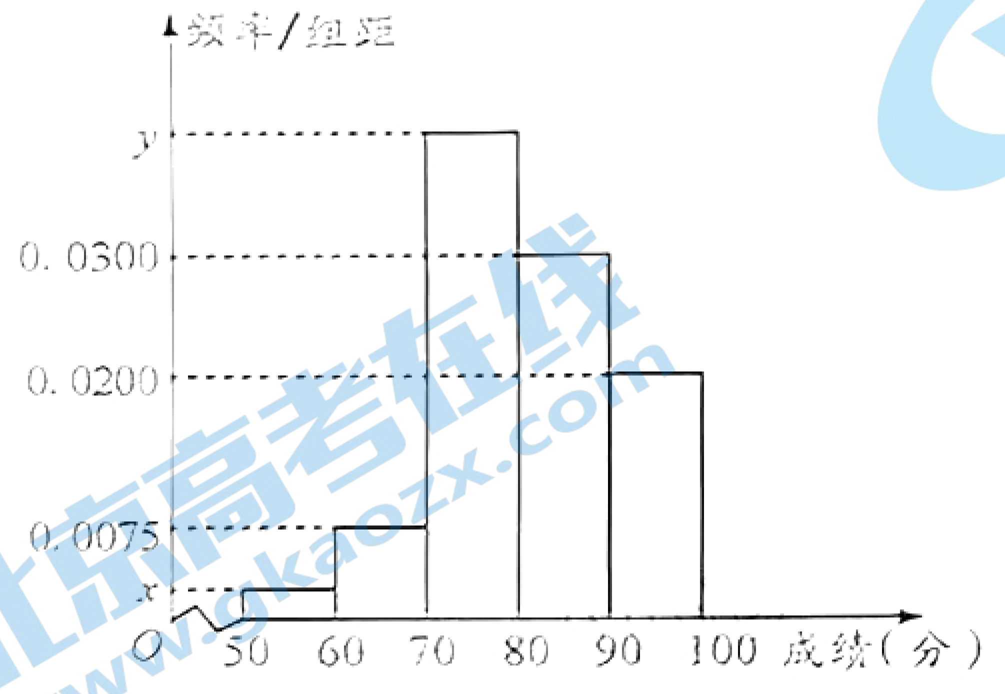
④四边形 $ABCD$ 面积的取值范围为 $[20\sqrt{5},45]$．

其中所有正确结论的序号为______．

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17.（本小题满分 12 分）

某中学为增强学生的环保意识，举办了“爱成都，护环境”的知识竞赛活动．为了解本次知识竞赛活动参赛学生的成绩，从中抽取了 n 名学生的分数（得分取正整数，满分为 100 分，所有学生的得分都在区间 $[50,100]$ 中）作为样本进行统计．按照 $[50,60)$，$[60,70)$，$[70,80)$，$[80,90)$，$[90,100]$ 的分组作出如下的频率分布直方图，并作出下面的样本分数茎叶图（图中仅列出了得分在 $[50,60)$，$[60,70)$ 的数据）．



茎叶图

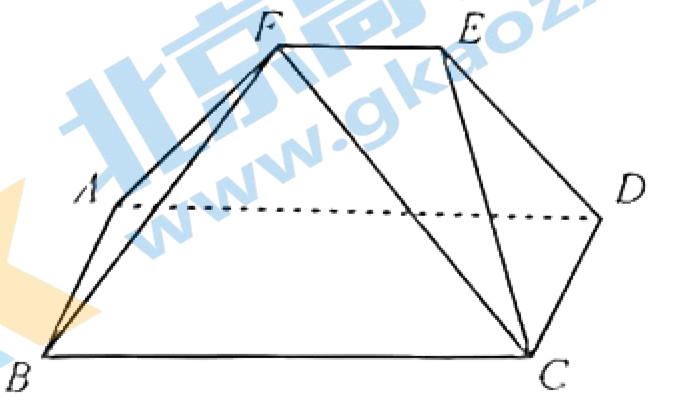
茎	叶
5	7
6	1 3 4
7	
8	
9	

（Ⅰ）求样本容量 n 和频率分布直方图中 x，y 的值；

（Ⅱ）在选取的样本中，从竞赛成绩不低于 70 分的三组学生中按分层抽样抽取了 9 名学生，再从抽取的这 9 名学生中随机抽取 2 名学生到天府广场参加环保知识宣传活动，求这 2 名学生中恰好有 1 名学生的分数在 $[70,80)$ 中的概率．

18.(本小题满分 12 分)

如图,在等腰梯形 $ADEF$ 中,$AD\,/\!/\,EF$,$AD=3$,$DE=\sqrt{2}$,$EF=1$. 在矩形 $ABCD$ 中,$AB=1$. 平面 $ADEF\perp$平面 $ABCD$.



(Ⅰ)证明:$BF\perp CF$;

(Ⅱ)求直线 AF 与平面 CEF 所成角的大小.

19.(本小题满分 12 分)

已知$\triangle ABC$ 中的三个内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c,角 B 为钝角,且 $2a\sin(\frac{\pi}{3}-B)=\frac{\sqrt{3}\,b\sin A}{\sin 2B}$.

(Ⅰ)求角 B 的大小;

(Ⅱ)若点 D 在 AC 边上,满足 $AC=4AD$,且 $AB=4$,$BD=3$,求 BC 边的长.

20.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=2x^3+3ax^2-12a^2x$,其中 $a\in\mathbf{R}$.

(Ⅰ)求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(Ⅱ)设函数 $g(x)=2x^3-x^2-(12a^2-1)x+2\sin x-2$. 当 $a>0$,$x>0$ 时,证明:$g(x)<f(x)$.

21.(本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C:\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{1}{2}$,且经过点$(\sqrt{6},2)$,椭圆 C 的右顶点到抛物线 $E:y^2=2px(p>0)$的准线的距离为 4.

(Ⅰ)求椭圆 C 和抛物线 E 的方程;

(Ⅱ)设与两坐标轴都不垂直的直线 l 与抛物线 E 相交于 A,B 两点,与椭圆 C 相交于 M,N 两点,O 为坐标原点. 若 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-4$,则在 x 轴上是否存在点 H,使得 x 轴平分$\angle MHN$?若存在,求出点 H 的坐标;若不存在,请说明理由.

请考生在第 22,23 题中任选择一题作答,如果多做,则按所做的第一题记分. 作答时,用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目对应的标号涂黑.

22.(本小题满分 10 分)选修 4—4:坐标系与参数方程

在直角坐标系 xOy 中,曲线 C 的参数方程为$\begin{cases}x=t+\frac{1}{t},\\ y=\frac{t}{2}-\frac{1}{2t}\end{cases}$($t$ 为参数). 以坐标原点 O 为极点,x 轴正半轴为极轴建立极坐标系,直线 l 的极坐标方程为 $\rho\sin(\theta+\frac{\pi}{4})=2\sqrt{2}$.

(Ⅰ)求直线 l 的直角坐标方程与曲线 C 的普通方程;

(Ⅱ)已知点 P 的直角坐标为$(0,4)$,直线 l 与曲线 C 相交于不同的两点 A,B,求$|PA|+|PB|$的值.

23.(本小题满分 10 分)选修 4—5:不等式选讲

已知函数 $f(x)=|x^2-x|+1$.

(Ⅰ)求不等式 $f(x)<3$ 的解集;

(Ⅱ)若关于 x 的不等式 $f(x)+|x-2|+m>0$ 恒成立,求实数 m 的取值范围.

成都市2019级高中毕业班第三次诊断性检测

数学(理科)参考答案及评分意见

第Ⅰ卷 (选择题,共60分)

一、选择题:(每小题5分,共60分)

1. A; 2. A; 3. D; 4. B; 5. C; 6. B; 7. C; 8. D; 9. C; 10. D; 11. B; 12. B.

第Ⅱ卷 (非选择题,共90分)

二、填空题:(每小题5分,共20分)

13. $\frac{1}{2}$; 14. $\frac{4}{3}$; 15. $(1,+\infty)$; 16. ①③④.

三、解答题:(共70分)

17. 解:(Ⅰ)由茎叶图可知成绩在$[60,70)$中的频数为3.

结合频率分布直方图,得 $n=\frac{3}{0.0075\times10}=40$. ……2分

$\therefore x=\frac{1}{10n}=\frac{1}{400}=0.0025$. ……3分

$\therefore y=\frac{1}{10}-x-0.0075-0.0200-0.0300=0.0400$. ……5分

(Ⅱ)由题意,本次竞赛成绩样本中分数在$[70,80)$中的学生有 $40\times0.04\times10=16$ 名,

分数在$[80,90)$中的学生有 $40\times0.03\times10=12$ 名,

分数在$[90,100]$中的学生有 $40\times0.02\times10=8$ 名. ……7分

按分层抽样抽取的9名学生中,分数在$[70,80)$中的学生有 $9\times\frac{16}{16+12+8}=4$ 名,

分数在$[80,90)$中的学生有 $9\times\frac{12}{16+12+8}=3$ 名,

分数在$[90,100]$中的学生有 $9\times\frac{8}{16+12+8}=2$ 名. ……9分

$\therefore$从这9名学生中随机选取2名学生的情况种数 $m=C_9^2=36$. ……10分

又所选2名学生中恰好有1名学生的分数在$[70,80)$中的情况种数 $n=C_4^1C_5^1=20$,

……11分

$\therefore$所选2名学生中恰好有1名学生的分数在$[70,80)$中的概率 $P=\frac{n}{m}=\frac{20}{36}=\frac{5}{9}$.

……12分

18. 解:(Ⅰ)如图,过点F作AD的垂线,垂足为M,连接MB,MC.

$\because$四边形$ADEF$为等腰梯形,$AD=3$,$DE=\sqrt{2}$,$EF=1$,

$\therefore AM=MF=1$,$MD=2$. ……2分

$\because$ 平面 $ADEF \perp$ 平面 $ABCD$，平面 $ADEF \cap$ 平面 $ABCD = AD$，

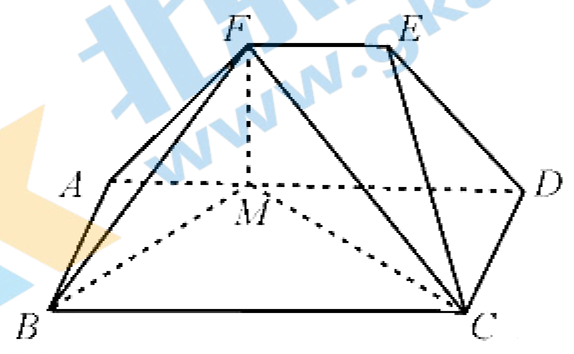
$FM \subset$ 平面 $ADEF$，$FM \perp AD$，

$\therefore FM \perp$ 平面 $ABCD$.

$\therefore FM \perp MB$，$FM \perp MC$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形，$AB=1$，$BC=3$，

$\therefore BM=\sqrt{2}$，$CM=\sqrt{5}$，$BF=\sqrt{3}$，$CF=\sqrt{6}$. ……4 分

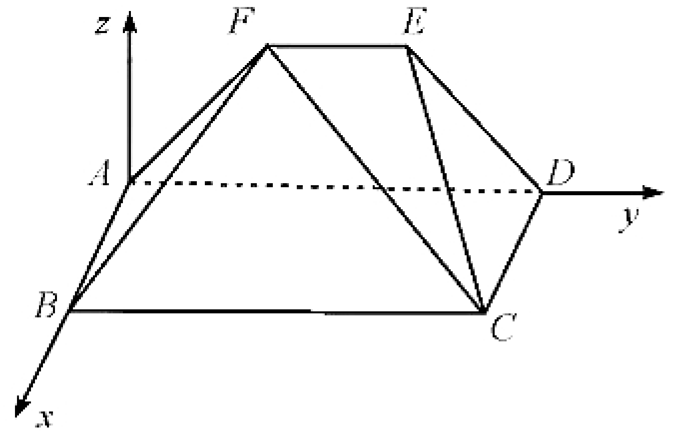


$\because BF^2+CF^2=BC^2$，$\therefore BF \perp CF$. ……6 分

（Ⅱ）以 A 为坐标原点，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$ 的方向分别为 x 轴，y 轴的正方向，以过点 A 垂直于平面 $ABCD$ 且向上的方向为 z 轴的正方向，建立如图所示的空间直角坐标系 $Axyz$.

则 $B(1,0,0)$，$C(1,3,0)$，$D(0,3,0)$，$E(0,2,1)$，$F(0,1,1)$.

$\therefore \overrightarrow{AF}=(0,1,1)$，$\overrightarrow{CE}=(-1,-1,1)$，$\overrightarrow{EF}=(0,-1,0)$. ……7 分



设平面 CEF 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$.

由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EF}=0, \\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CE}=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}y=0, \\ -x-y+z=0.\end{cases}$

令 $x=1$，得 $\boldsymbol{n}=(1,0,1)$. ……9 分

设直线 AF 与平面 CEF 所成的角为 θ.

则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{AF},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\overrightarrow{AF}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{AF}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$. ……11 分

又 $\theta\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$，$\therefore \theta=\dfrac{\pi}{6}$.

$\therefore$ 直线 AF 与平面 CEF 所成角的大小为 $\dfrac{\pi}{6}$. ……12 分

19. **解**：（Ⅰ）由已知得 $2a\sin 2B\sin(\dfrac{\pi}{3}-B)=\sqrt{3}b\sin A$，

$\therefore 4a\sin B\cos B(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos B-\dfrac{1}{2}\sin B)=\sqrt{3}b\sin A$. ……2 分

由正弦定理，得 $2\sqrt{3}\sin A\sin B\ \cos^2 B-2\sin A\ \sin^2 B\cos B=\sqrt{3}\sin B\sin A$.

$\because A,B\in(0,\pi)$，$\therefore \sin A\sin B\neq 0$.

$\therefore 2\sqrt{3}\cos^2 B-2\sin B\cos B=\sqrt{3}$. ……4 分

$\therefore \sqrt{3}\cos 2B=\sin 2B$，即 $\tan 2B=\sqrt{3}$. ……5 分

$\because B\in(\dfrac{\pi}{2},\pi)$，$\therefore 2B\in(\pi,2\pi)$. $\therefore 2B=\dfrac{4\pi}{3}$，即 $B=\dfrac{2\pi}{3}$. ……6 分

（Ⅱ）由题意，得 $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$. ……7 分

$\because AC=4AD$，

$\therefore \overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\dfrac{3}{4}\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BC}+\dfrac{3}{4}(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC})=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{BC}+\dfrac{3}{4}\overrightarrow{BA}$. ……9 分

$\therefore \overrightarrow{BD}^2=(\dfrac{1}{4}\overrightarrow{BC}+\dfrac{3}{4}\overrightarrow{BA})^2=\dfrac{1}{16}(\overrightarrow{BC}^2+6\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+9\overrightarrow{BA}^2)$. ……10 分

$\because B=\frac{2\pi}{3}, AB=4, BD=3$,

$\therefore 9=\frac{1}{16}(|\overrightarrow{BC}|^2+6\times4\cdot\cos\frac{2\pi}{3}\cdot|\overrightarrow{BC}|+9\times16)$.

$\therefore |\overrightarrow{BC}|^2-12|\overrightarrow{BC}|=0$. ……11 分

$\because |\overrightarrow{BC}|\neq0$, $\therefore BC=12$. ……12 分

20. **解**:(Ⅰ)$f'(x)=6x^2+6ax-12a^2=6(x+2a)(x-a)$. ……1 分

①若 $a>0$,当 $-2a<x<a$ 时,$f'(x)<0$;当 $x<-2a$ 或 $x>a$ 时,$f'(x)>0$. ……2 分

②若 $a=0$,恒有 $f'(x)\geqslant0$. ……3 分

③若 $a<0$,当 $a<x<-2a$ 时,$f'(x)<0$;当 $x<a$ 或 $x>-2a$ 时,$f'(x)>0$. ……4 分

综上,当 $a>0$ 时,函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-2a,a)$,单调递增区间为 $(-\infty,-2a)$,$(a,+\infty)$;

当 $a=0$ 时,函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,+\infty)$;

当 $a<0$ 时,函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(a,-2a)$,单调递增区间为 $(-\infty,a)$,$(-2a,+\infty)$. ……5 分

(Ⅱ)$f(x)-g(x)=3ax^2+x^2-x-2\sin x+2$. ……6 分

由题意,则需证明对任意 $a>0$,$x>0$,不等式 $3ax^2+x^2-x-2\sin x+2>0$ 成立.

由 $3ax^2>0$ 恒成立,只需证明对任意 $x>0$,不等式 $x^2-x\geqslant2(\sin x-1)$ 成立. ……7 分

①当 $x\geqslant1$ 时,$\because x^2-x\geqslant0$,$2(\sin x-1)\leqslant0$,

$\therefore$ 不等式 $x^2-x\geqslant2(\sin x-1)$ 成立. ……9 分

②当 $0<x<1$ 时,设 $h(x)=x^2-x-2\sin x+2$.

$\therefore h'(x)=2x-1-2\cos x$.

设 $t(x)=2x-1-2\cos x$.

$\therefore t'(x)=2+2\sin x$.

$\because$ 当 $0<x<1$ 时,$t'(x)>0$ 恒成立,函数 $t(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增,

$\therefore t(x)<t(1)=1-2\cos1<1-2\cos\frac{\pi}{3}=0$. ……11 分

$\therefore$ 当 $0<x<1$ 时,$h'(x)<0$ 恒成立,函数 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减,

$\therefore h(x)>h(1)=2(1-\sin1)>0$. 即不等式 $x^2-x\geqslant2(\sin x-1)$ 成立.

综上,当 $a>0$,$x>0$ 时,不等式 $3ax^2+x^2-x-2\sin x+2>0$ 成立,

即 $g(x)<f(x)$ 成立. ……12 分

21. **解**:(Ⅰ)由已知得 $\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$(c 为半焦距),$\frac{4}{a^2}+\frac{6}{b^2}=1$.

又 $a^2=b^2+c^2$,$\therefore a^2=12$,$b^2=9$. ……2 分

$\therefore$ 椭圆 C 的方程为 $\frac{y^2}{12}+\frac{x^2}{9}=1$. ……3 分

$\therefore$ 椭圆 C 的右顶点为 $(3,0)$.

$\therefore 3+\frac{p}{2}=4$. 解得 $p=2$.

∴抛物线 E 的方程为 $y^2=4x$. ……4 分

(Ⅱ)由题意知直线 l 的斜率存在且不为 0. 设直线 l 的方程为 $y=kx+m$, $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$.

由 $\begin{cases} y=kx+m, \\ y^2=4x \end{cases}$ 消去 y, 得 $k^2x^2+(2km-4)x+m^2=0$.

∴$\Delta_1=(2km-4)^2-4k^2m^2=-16km+16>0$, ∴$km<1$.

∴$x_1+x_2=\dfrac{4-2km}{k^2}$, $x_1x_2=\dfrac{m^2}{k^2}$. ……5 分

∴$y_1y_2=(kx_1+m)(kx_2+m)=k^2x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2$

$=\dfrac{km(4-2km)}{k^2}+2m^2=\dfrac{4m}{k}$.

∴$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=\dfrac{m^2}{k^2}+\dfrac{4m}{k}=-4$. ……7 分

∴$(\dfrac{m}{k}+2)^2=0$, ∴$\dfrac{m}{k}=-2$. ∴$m=-2k$, 此时 $km=-2k^2<1$.

∴直线 l 的方程为 $y=k(x-2)$. ……8 分

假设在 x 轴上存在点 $H(x_0,0)$, 使得 x 轴平分 $\angle MHN$. 则直线 HM 的斜率与直线 HN 的斜率之和为 0.

设 $M(x_3,y_3)$, $N(x_4,y_4)$.

由 $\begin{cases} y=k(x-2), \\ \dfrac{y^2}{12}+\dfrac{x^2}{9}=1 \end{cases}$ 消去 y, 得 $(3k^2+4)x^2-12k^2x+12k^2-36=0$.

∴$\Delta_2=(12k^2)^2-4(3k^2+4)(12k^2-36)>0$, 即 $5k^2+12>0$ 恒成立.

∴$x_3+x_4=\dfrac{12k^2}{3k^2+4}$, $x_3x_4=\dfrac{12k^2-36}{3k^2+4}$. ……9 分

∵$\dfrac{y_3}{x_3-x_0}+\dfrac{y_4}{x_4-x_0}=0$,

∴$k(x_3-2)(x_4-x_0)+k(x_4-2)(x_3-x_0)=0$.

∴$2x_3x_4-(x_0+2)(x_3+x_4)+4x_0=0$.

∴$\dfrac{24k^2-72}{3k^2+4}-(x_0+2)\dfrac{12k^2}{3k^2+4}+4x_0=0$. ……11 分

∴$\dfrac{16x_0-72}{3k^2+4}=0$.

解得 $x_0=\dfrac{9}{2}$.

∴在 x 轴上存在点 $H(\dfrac{9}{2},0)$, 使得 x 轴平分 $\angle MHN$. ……12 分

22. 解:(Ⅰ)由曲线 C 的参数方程得 $x^2-(2y)^2=(t+\dfrac{1}{t})^2-(t-\dfrac{1}{t})^2=4$. ……2 分

∴曲线 C 的普通方程为 $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$. ……3 分

直线 l 的极坐标方程化简为 $\rho\sin\theta+\rho\cos\theta=4$. ……4 分

由极坐标与直角坐标的互化关系 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$,

得直线 l 的直角坐标方程为 $x+y-4=0$. ……5 分

(Ⅱ)设直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}m, \\ y=4+\dfrac{\sqrt{2}}{2}m \end{cases}$ (m 为参数). ……6 分

将直线 l 的参数方程代入曲线 C 的普通方程，整理可得

$3m^2+32\sqrt{2}m+136=0$. …(*)

$\Delta=(32\sqrt{2})^2-4\times3\times136=416>0$.

设 m_1, m_2 是方程(*)的两个实数根.

则 $m_1+m_2=-\dfrac{32\sqrt{2}}{3}, m_1m_2=\dfrac{136}{3}>0$. ……8 分

$\therefore |PA|+|PB|=|m_1|+|m_2|=|m_1+m_2|=\dfrac{32\sqrt{2}}{3}$. ……10 分

23. 解:(Ⅰ)由 $f(x)<3$,有 $|x^2-x|+1<3$. ……1 分

$\therefore |x^2-x|<2$,即 $-2<x^2-x<2$. ……3 分

解 $\begin{cases} x^2-x>-2, \\ x^2-x<2 \end{cases}$ 得 $-1<x<2$. ……4 分

$\therefore$不等式 $f(x)<3$ 的解集为 $(-1,2)$. ……5 分

(Ⅱ)由已知,有 $|x^2-x|+|x-2|+m+1>0$ 恒成立,

即 $-m<|x^2-x|+|x-2|+1$ 恒成立.

令 $g(x)=|x^2-x|+|x-2|+1$.

则 $g(x)=\begin{cases} x^2-2x+3, x<0; \\ -x^2+3, 0\leqslant x<1; \\ x^2-2x+3, 1\leqslant x<2; \\ x^2-1, x\geqslant 2. \end{cases}$ ……7 分

$\therefore g(x)$的最小值为 2. ……9 分

$\therefore -m<2$,即 $m>-2$.

$\therefore$实数 m 的取值范围为 $(-2,+\infty)$. ……10 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ‘’ 精益求精、专业严谨 ‘’ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。