

北京市东直门中学 2023-2024 学年度第一学期期中考试

高三数学

2023.11

命题人:刘晓晖 审题人:申轶劼、陈昕、艾乐、宋阳

考试时间: 120 分钟 总分: 150 分

班级 _____ 姓名 _____ 学号 _____

第一部分 (选择题, 共 40 分)

一、单选题 (本大题共 10 小题, 共 40.0 分。在每小题列出的选项中, 选出符合题目的一项)

1. 已知全集 $U = \{x | x > 0\}$, 集合 $A = \{x | x(x-1) < 0\}$, 则 $\complement_U A = ()$

A. $\{x | x > 1, \text{ 或 } x < 0\}$ B. $\{x | x \geq 1, \text{ 或 } x \leq 0\}$ C. $\{x | x > 1\}$ D. $\{x | x \geq 1\}$

2. 若复数 z_1, z_2 在复平面内对应点的坐标分别为 $(2, 1), (0, -1)$, 则 $z_1 \cdot z_2 = ()$

A. $2+i$ B. $1-2i$ C. $-1-2i$ D. $-i$

3. 已知函数 $f(x) = 3\sin 2x$, 将函数 $f(x)$ 的图象沿 x 轴向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度, 得到

函数 $y = g(x)$ 的图象, 则函数 $g(x)$ 的解析式为 $()$

A. $g(x) = 3\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ B. $g(x) = 3\sin\left(2x - \frac{\pi}{8}\right)$

C. $g(x) = 3\sin\left(2x + \frac{\pi}{8}\right)$ D. $g(x) = 3\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

4. 已知向量 \vec{a} 与向量 \vec{b} 的夹角为 120° , $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, 则 $|\vec{a} + 2\vec{b}| = ()$

A. 3 B. $\sqrt{3}$ C. $2 - \sqrt{3}$ D. 1

5. 已知直线 l, m, n 与平面 α, β , 下列命题正确的是 $()$

A. 若 $\alpha // \beta, l \subset \alpha, n \subset \beta$, 则 $l // n$ B. 若 $\alpha \perp \beta, l \subset \alpha$, 则 $l \perp \beta$

C. 若 $l \perp n, m \perp n$, 则 $l // m$ D. 若 $l \perp \alpha, l // \beta$, 则 $\alpha \perp \beta$

6. 已知直线 $l_1: mx + (m+1)y + 2 = 0, l_2: (m+1)x + (m+4)y - 3 = 0$, 则“ $m = -2$ ”是

“ $l_1 \perp l_2$ ”的 $()$

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件

C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

7. 已知直线 $x - \sqrt{3}y + 8 = 0$ 和圆 $x^2 + y^2 = r^2 (r > 0)$ 相交于 A, B 两点. 若 $|AB| = 6$, 则 r 的值为 $()$

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

8. 已知某种垃圾的分解率为 v ，与时间 t （月）满足函数关系式 $v=ab^t$ （其中 a, b 为非零常数），若经过12个月，这种垃圾的分解率为10%，经过24个月，这种垃圾的分解率为20%，那么这种垃圾完全分解，至少需要经过（ ）（参考数据： $\lg 2 \approx 0.3$ ）

- A. 48个月 B. 52个月 C. 64个月 D. 120个月

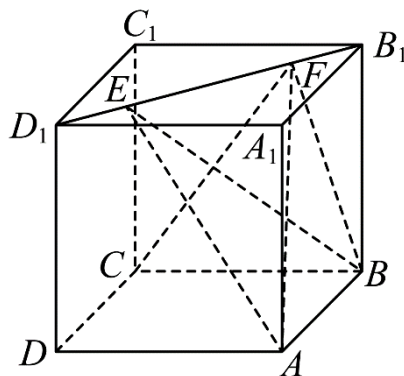
9. 已知奇函数 $f(x)$ 的定义域为 R ，且在 $(0, +\infty)$ 上单调递减，若 $f\left(\frac{1}{2}\right)=f(-2)=1$ ，则

下列命题中正确的是（ ）

- A. $f(x)$ 有两个零点 B. $f(-1) > -1$
 C. $f(-3) < 1$ D. $f\left(\frac{1}{2}\right) < f(2)$

10. 如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为2，线段 B_1D_1 上有两个动点 E, F （ E 在 F 的左边），且 $EF = \sqrt{2}$ 。下列说法不正确的是（ ）

- A. 当 E 运动时，二面角 $E-AB-C$ 的最小值为 45°
 B. 当 E, F 运动时，三棱锥体积 $B-AEF$ 不变
 C. 当 E, F 运动时，存在点 E, F 使得 $AE \parallel BF$
 D. 当 E, F 运动时，二面角 $C-EF-B$ 为定值



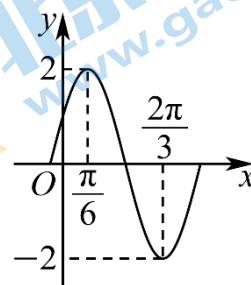
第二部分（非选择题，共110分）

二、填空题（本大题共5小题，共25.0分）

11. 函数 $f(x) = \sqrt{1+x} + \ln(2-x)$ 的定义域为_____.

12. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 中， $a_4 = 6$ ， $a_7 = 48$ ，则 $a_{11} =$ _____.

13. 函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ （ $A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{3}$ ）的部分图像如图



所示，则函数 $f(x)$ 的解析式为 $f(x) =$ _____.

14. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = n + \frac{\lambda}{n}$ ， $n \in \mathbf{N}^*$ ，且 $\{a_n\}$ 为单调递增数列，则实数 λ 的取值范围是_____.

15. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x - a, & x \leq 0 \\ x^2 - 3ax + a, & x > 0 \end{cases}$

①若 $a = 0$ ，则函数 $f(x)$ 的值域为_____；

②若函数 $f(x)$ 有三个不同的零点，则实数 a 的取值范围是_____.

三、解答题（本大题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

16. (本小题14.0分：5 分 + 5 分 + 4 分)

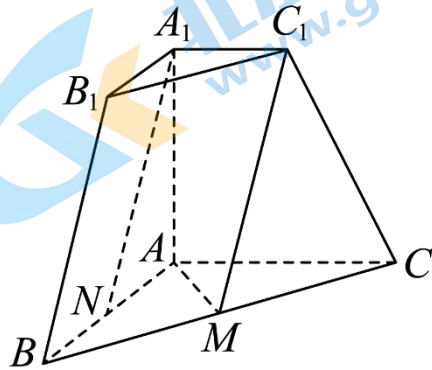
三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，若 $AA_1 \perp$ 面 ABC ， $AB \perp AC$ ， $AB = AC = AA_1 = 2$ ，

$A_1C_1 = 1$ ， M ， N 分别是 BC ， BA 的中点.

(1) 求证： $A_1N \parallel$ 平面 B_1BCC_1 ；

(2) 求平面 B_1MA 与平面 ACC_1A_1 所成夹角的余弦值；

(3) 求点 A_1 到平面 C_1MA 的距离.



17. (本小题13.0分：6 分 + 7 分)

在① $a+c=13$ ，② $b=7$ ，③ $a+b+c=20$ 三个条件中选一个填在下面试题的横线上，并完成试题(如果多选，以选□评分).

已知 $\triangle ABC$ 的角 A ， B ， C 的对边长分别为 a ， b ， c ， $c \cos A - 2b \cos B + a \cos C = 0$.

(1) 求角 B ；

(2) 若 _____， $c > a$ ， $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 20$ ，求 $\sin A$.

18. (本小题13.0分：4 分 + 6 分 + 3 分)

“绿水青山就是金山银山”，某地区甲乙丙三个林场开展植树工程，2011-2020 年的植树成活率 (%) 统计如下：(表中“/”表示该年末植树)：

	2011 年	2012 年	2013 年	2014 年	2015 年	2016 年	2017 年	2018 年	2019 年	2020 年
甲	95.5	92	96.5	91.6	96.3	94.6	/	/	/	/
乙	95.1	91.6	93.2	97.8	95.6	92.3	96.6	/	/	/
丙	97.0	95.4	98.2	93.5	94.8	95.5	94.5	93.5	98.0	92.5

规定：若当年植树成活率大于 95%，则认定该年为优质工程.

(1) 从乙林场植树的年份中任抽取两年，求这两年都是优质工程的概率；

(2) 从甲、乙两个个林场植树的年份中各抽取一年，以 X 表示这 2 年中优质工程的个数，求 X 的分布列；

(3) 若乙丙两个林场每年植树的棵数不变，能否根据两个林场优质工程概率的大小，推断出这两个林场植树成活率平均数的大小？

19. (本小题15.0分: 4分 + 6分 + 5分)

已知函数 $f(x) = 2a \ln x - x^2 + 1$.

- (1) 若 $a=1$, 求函数 $f(x)$ 的单调递减区间;
- (2) 若 $a > 0$, 求函数 $f(x)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上的最大值;
- (3) 若 $f(x) \leq 0$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上恒成立, 求 a 的最大值.

20. (本小题15.0分: 4分 + 8分 + 3分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 长轴的右端点为 $A(2, 0)$.

- (1) 求 C 的方程;
- (2) 直线 $l: y = kx + m$ 与椭圆 C 分别相交于 M, N 两点, 且 $AM \perp AN$, 点 A 不在直线 l 上.
 - ① 试证明直线 l 过一定点, 并求出此定点;
 - ② 从点 A 作 $AD \perp MN$ 垂足为 D , 点 $B(\frac{8}{5}, 2)$, 写出 $|BD|$ 的最小值 (结论不要求证明).

21. (本小题15.0分: 5分 + 5分 + 5分)

已知无穷数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = \max\{a_{n+1}, a_{n+2}\} - \min\{a_{n+1}, a_{n+2}\}$ ($n=1, 2, 3, \dots$), 其中 $\max\{x, y\}$ 表示 x, y 中最大的数, $\min\{x, y\}$ 表示 x, y 中最小的数.

- (1) 当 $a_1 = 1, a_2 = 2$ 时, 写出 a_4 的所有可能值;
- (2) 若数列 $\{a_n\}$ 中的项存在最大值, 证明: 0 为数列 $\{a_n\}$ 中的项;
- (3) 若 $a_n > 0$ ($n=1, 2, 3, \dots$), 是否存在正实数 M , 使得对任意的正整数 n , 都有 $a_n \leq M$? 如果存在, 写出一个满足条件的 M ; 如果不存在, 说明理由.



北京高一高二高三期中试题下载

京考一点通团队整理了【**2023年10-11月北京各区各年级期中试题 & 答案汇总**】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期中**】或者点击公众号底部栏目<**试题专区**>，进入各年级汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！

