2022年汕头市普通高考第一次模拟考试

数学试题参考答案及评分标准

评分说明:

1．本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分参考制订相应的评分细则.

2．对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应得分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分.

3．解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数.

一、单项选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	C	D	A	C	D	B	B

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．全部选对的得 5 分，部分选对的得 3 分，有选错的得 0 分.

题号	9	10	11	12
答案	ACD	BD	AD	BCD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13．0.050　　　14．-2

15．$\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$　　　16．2，　$4m-1$

四、解答题：共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17．（本小题满分 10 分）

选择条件①，解：由正弦定理得 $\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$ 则由已知可得：$\dfrac{2}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin 2B}=\dfrac{c}{2\sin B\cos B}$，

所以 $c=4\cos B$，　------------（3 分）

又由余弦定理得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，

即 $4=1+16\cos^2 B-2\cdot 1\cdot 4\cos^2 B$，

解得 $\cos B=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{4}$，　------------（6 分）

又 $C=2B$，

所以角 B 为锐角，故三角形唯一存在　------------（7 分）

$\therefore \cos B=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$，　$\sin B=\dfrac{\sqrt{10}}{4}$，

$\therefore \cos C=2\cos^2 B-1=-\dfrac{1}{4}$，　------------（9 分）

所以 $c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos C}=\sqrt{5-4\times(-\dfrac{1}{4})}=\sqrt{6}$　------------（10 分）

选择条件② 解：在 ΔABC 中，

$\because S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{\sqrt{7}}{4}$，

$\therefore \sin C=\frac{\sqrt{7}}{4}$， ------------（3 分）

$\therefore \cos C=\pm\sqrt{1-\sin^2 C}=\pm\frac{3}{4}$ ------------（5 分）

（i）当 $\cos C=\frac{3}{4}$ 时，$c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos C}=\sqrt{5-4\times\frac{3}{4}}=\sqrt{2}$

------------（8 分）

（ii）当 $\cos C=-\frac{3}{4}$ 时，$c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos C}=\sqrt{5+4\times\frac{3}{4}}=2\sqrt{2}$

------------（10 分）

选择条件③ 解：在 ΔABC 中，$\sin(B+C)=\sin A=\frac{\sqrt{3}}{3}$ ------------（2 分）

由正弦定理，可知：$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，

由已知可得：$\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{2}{\sin B}$， ------------（5 分）

解得：$\sin B=\frac{2\sqrt{3}}{3}>1$， ------------（8 分）

故该三角形不存在. ------------（10 分）

18. (本小题满分 12 分)

解：（1）①当 $n=1$ 时，$3a_1=2S_1+2a$ $\therefore a_1=2$ ------------（1 分）

②当 $n\geq 2$ 时，由 $3a_n=2S_n+2n$，**得** $3a_{n-1}=2S_{n-1}+2(n-1)$，

$3a_n-3a_{n-1}=2S_n-2S_{n-1}+2$ ------------（2 分）

$\therefore a_n=3a_{n-1}+2$ $\therefore a_n+1=3(a_{n-1}+1)$ ------------（3 分）

$\because a_1+1=3\neq 0$

$\therefore a_{n-1}+1\neq 0$ -----------（4 分）

$\therefore \dfrac{a_n+1}{a_{n-1}+1}=3$　　$\therefore \{a_n+1\}$是以 $a_1+1=3$ 为首项，公比为3的等比数列

$\therefore a_n+1=(a_1+1)\cdot 3^{n-1}=3^n$

$\therefore a_n=3^n-1$ ------------（6分）

$\therefore S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=(3^1-1)+(3^2-1)+\cdots+(3^n-1)$

$=(3^1+3^2+\cdots+3^n)-n=\dfrac{3(1-3^n)}{1-3}-n=\dfrac{3^{n+1}-2n-3}{2}$ -----------（7分）

（2）由（1）知：$b_n=\log_3(a_{n+1}+1)=n+1$ -----------（8分）

$\therefore$当 $n\in N^*$ 时，$\dfrac{1}{b_n^2}=\dfrac{1}{(n+1)^2}<\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$ -----------（10分）

$\therefore \dfrac{1}{b_1^2}+\dfrac{1}{b_2^2}+\cdots\dfrac{1}{b_n^2}<\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)=1-\dfrac{1}{n+1}<1$

$\therefore \dfrac{1}{b_1^2}+\dfrac{1}{b_2^2}+\cdots+\dfrac{1}{b_n^2}<1$ -----------（12分）

19. (本小题满分 12 分)

解：（1）依题意知：$X\sim B(3,\dfrac{3}{5})$，X 可能取值为：0,1,2,3 -----------（1分）

$\therefore P(X=0)=\left(1-\dfrac{3}{5}\right)^3=\dfrac{8}{125}$；$P(X=1)=C_3^1\cdot\dfrac{3}{5}\cdot\left(1-\dfrac{3}{5}\right)^2=\dfrac{36}{125}$

$P(X=2)=C_3^2\cdot\left(\dfrac{3}{5}\right)^2\cdot\left(1-\dfrac{3}{5}\right)=\dfrac{54}{125}$；$P(X=3)=\left(\dfrac{3}{5}\right)^3=\dfrac{27}{125}$ ------------（5分）

$\therefore X$ 的分布列：

X	0	1	2	3
P	$\dfrac{8}{125}$	$\dfrac{36}{125}$	$\dfrac{54}{125}$	$\dfrac{27}{125}$

$\therefore E(X)=3\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{9}{5}$ ------------（6分）

（2）记“在第4轮结束时，甲队进了3个球并刚好胜出”为事件 A．

依题意知：在第4轮结束时，甲队进了3个球并刚好胜出，甲乙两队进球数比为：“甲VS乙:3:0”记为事件 A_1，或“甲VS乙:3:1”记为事件 A_2，则 $A=A_1+A_2$，且 A_1 与 A_2 互斥-----------（7分）

依题意有：$P(A_1)=C_3^2\left(\dfrac{3}{5}\right)^2\left(1-\dfrac{3}{5}\right)\dfrac{3}{5}\times\left(1-\dfrac{1}{2}\right)^4=3\times\dfrac{9}{25}\times\dfrac{2}{5}\times\dfrac{3}{5}\times\dfrac{1}{16}=\dfrac{81}{5000}$ ------------（9分）

$P(A_2)=\left(\frac{3}{5}\right)^3\left(1-\frac{3}{5}\right)\times C_3^1\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{2}+C_3^2\left(\frac{3}{5}\right)^2\left(1-\frac{3}{5}\right)\frac{3}{5}\times C_4^1\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)^3$ ------------（11 分）

$=\frac{3^4}{5^4}\times\frac{1}{2^4}\times 2+\frac{3^4}{5^4}\times\frac{1}{2^4}\times 8=\frac{81}{1000}$

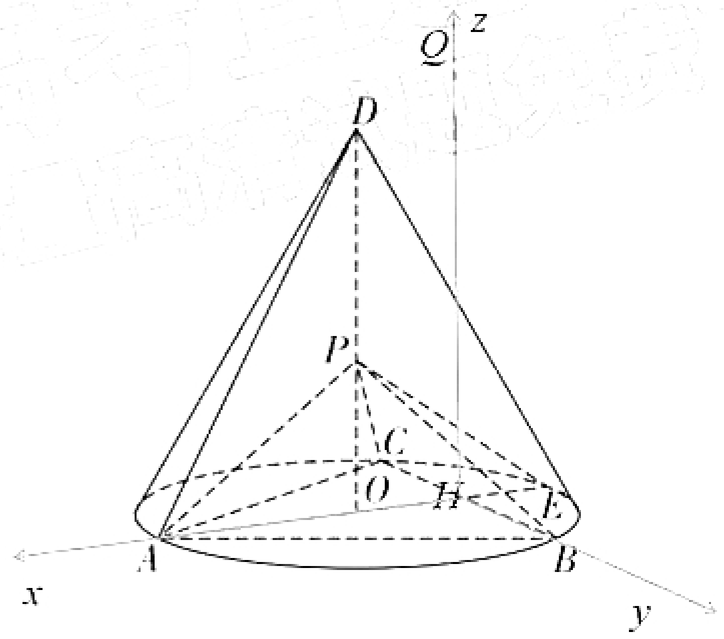
$\therefore P(A)=P\left(A_1+A_2\right)=P(A_1)+P(A_2)=\frac{81}{5000}+\frac{81}{1000}=\frac{243}{2500}$ ------------（12 分）

20. （本小题满分 12 分）

解：由题意得，设 $AD=AE=2r$，则在 $Rt\Delta DOA$ 中，$AD^2-AO^2=DO^2$

所以，$(2r)^2-r^2=6^2$，$r=2\sqrt{3}$， ------------（1 分）

又∵ ΔABC 是等边三角形



$\therefore\frac{AB}{\sin 60^\circ}=2r$，$\therefore AB=2r\sin 60^\circ=4\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6$

$\therefore AB=AC=BC=6$，$AH\perp BC$，

设 $AE\cap BC=H$，$OH=HE=\sqrt{3}$.

过 H 作 $HQ\parallel DO$，

因为 $DO\perp$ 面 ABC，所以 $HQ\perp$ 面 ABC ------------（2 分）

则以 H 为原点，分别以 HA,HB,HQ 为 x,y,z 轴正方向建立空间直角坐标系 $H-xyz$，

$H(0,0,0)$，$A(3\sqrt{3},0,0)$，$E(-\sqrt{3},0,0)$，$B(0,3,0)$，$C(0,-3,0)$，$O(\sqrt{3},0,0)$

因为 P 是线段 DO 上一点，设 $PO=a$，$a\in[0,6]$，$P(\sqrt{3},0,a)$ ------------（3 分）

（1）解法一：假设存在点 P，使得 $PA\perp$ 平面 PBC，此时

$\overrightarrow{PA}=(2\sqrt{3},0,-a)$，$\overrightarrow{PB}=(-\sqrt{3},3,-a)$，$\overrightarrow{PC}=(-\sqrt{3},-3,-a)$ ------------（4 分）

因为 $PA\perp$ 平面 PBC，所以 $PA\perp PB$.

则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=-6+0+a^2=0$，$a=\sqrt{6}$　$\therefore\overrightarrow{PA}=(2\sqrt{3},0,-\sqrt{6})\overrightarrow{PC}=(-\sqrt{3},-3,-\sqrt{6})$　$\therefore\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=0$

$\therefore PA\perp PC$ ------------（5 分）

所以存在点 P，使得 $PA\perp$ 平面 PBC，此时 $PO=\sqrt{6}$ ------------（6 分）

解法二：假设存在点 P，使得 $PA\perp$ 平面 PBC，则 $PA\perp PB$

$\therefore PA^2+PB^2=AB^2$

设 $PO=x, x\in[0,6]$，则 $PA^2=PB^2=PC^2=x^2+12$

$\because PA\perp PB$

$\therefore PA^2+PB^2=AB^2$，即 $2\left(x^2+12\right)=36$，解得：$x=\sqrt{6}$

$\therefore PA^2=PB^2=PC^2=6+12=18$

$\therefore PA^2+PC^2=AC^2$

$\therefore PA\perp PC$

故，存在点 P，使得 $PA\perp$ 平面 PBC，此时 $PO=\sqrt{6}$

（2）设面 PBC 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则 $\overrightarrow{CB}=(0,6,0),\overrightarrow{PB}=(-\sqrt{3},3,-a)$，

所以 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{PB}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{CB}=0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}6y=0\\ -\sqrt{3}x+3y-az=0\end{cases}$ 令 $x=a,z=-\sqrt{3}$，$y=0$

则 $\vec{n}=(a,0,-\sqrt{3})$ ----------（9 分）

又因为 $\overrightarrow{EP}=(2\sqrt{3},0,a)$，设直线 EP 与面 PBC 所成的角为 θ，

所以 $\sin\theta=\dfrac{\overrightarrow{EP}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{EP}||\vec{n}|}=\dfrac{\sqrt{3}a}{\sqrt{a^2+3}\cdot\sqrt{a^2+12}}=\sqrt{3}\sqrt{\dfrac{a^2}{(a^2+3)(a^2+12)}}$

$=\sqrt{3}\sqrt{\dfrac{a^2}{a^4+15a^2+36}}=\sqrt{3}\sqrt{\dfrac{1}{a^2+\dfrac{36}{a^2}+15}}$ -----------（10 分）

因为 $a^2>0,a^2+\dfrac{36}{a^2}\geq 2\sqrt{a^2\cdot\dfrac{36}{a^2}}=12$，当且仅当 $a^2=\dfrac{36}{a^2}$ 等号成立，即 $a=\sqrt{6}$ ----------（11 分）

所以 $\sin\theta\leq\sqrt{3}\sqrt{\dfrac{1}{12+15}}=\dfrac{1}{3}$

所以当 $PO=\sqrt{6}$ 时，直线 EP 与面 PBC 所成的角的正弦值最大，最大值为 $\dfrac{1}{3}$ ----------（12 分）

21. (本小题满分 12 分)

解：（1）设 $G(x,y)$，则 $\overrightarrow{OG}=(x,y)$，依题意有：$\overrightarrow{OM}=(x_0,0),\overrightarrow{ON}=(0,y_0)$ ----------（1 分）

由 $\overrightarrow{OG}=2\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}$ 得：

$\therefore(x,y)=2(x_0,0)+(0,y_0)=(2x_0,y_0)$，$\therefore x=2x_0$，$y=y_0$.

则 $x_0=\dfrac{1}{2}x$，$y_0=y$， -----------（3 分）

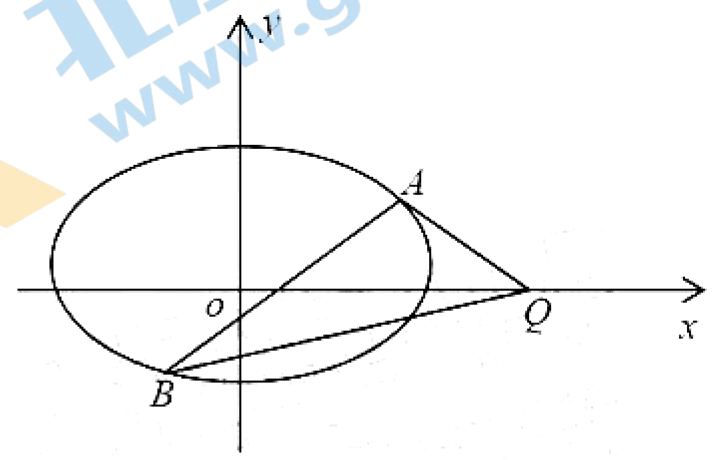
又 $|MN|=1$

$\therefore x_0{}^2+y_0{}^2=1$， -----------（4 分）

$\therefore \dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 即为 E 的方程. ---------- （5 分）

（3）依题意可知：直线 AB 的斜率存在，设直线 AB 的直线方程为 $y=kx+m$，

$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，---------- （6 分）



则联立方程组 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+y^2=1\\ y=kx+m\end{cases}$，可得 $\left(4k^2+1\right)x^2+8kmx+4m^2-4=0$，

--------- （7 分）

则 $\Delta=16(4k^2-m^2+1)>0$，即 $m^2<4k^2+1$L L ①，

且 $x_1+x_2=\dfrac{-8km}{4k^2+1}$，$x_1x_2=\dfrac{4m^2-4}{4k^2+1}$， ---------- （8 分）

因为 $\angle AQO=\angle BQO$，所以 $k_{AQ}+k_{BQ}=0$， ---------- （9 分）

$$\therefore k_{AQ}+k_{BQ}=\frac{y_1}{x_1-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}}+\frac{y_2}{x_2-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}}=\frac{kx_1+m}{x_1-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}}+\frac{kx_2+m}{x_2-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}}=0$$

即 $(kx_1+m)(x_2-\dfrac{4\sqrt{3}}{3})+(kx_2+m)(x_1-\dfrac{4\sqrt{3}}{3})=2kx_1x_2+(m-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}k)(x_1+x_2)-\dfrac{8\sqrt{3}}{3}m=0$，

整理得 $2k(4m^2-4)-8km(m-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}k)-\dfrac{8\sqrt{3}}{3}m(1+4k^2)=0$， ---------- （11 分）

化简得：$m=-\sqrt{3}k$ 满足①

$\therefore$ 直线 AB 的方程为 $y=k(x-\sqrt{3})$，

$\therefore$ 直线 AB 恒过定点 $(\sqrt{3},0)$. ---------- （12 分）

22. （本小题满分 12 分）

解：（1）由题设知：$f(x)$ 的定义域为 R，$f'(x)=xe^x-a$，

令 $f'(x)=0$ 得，$xe^x-a=0$，$\therefore a=xe^x$

令 $g(x)=xe^x$ 则 $g'(x)=(x+1)e^x$，令 $g'(x)=0$ 得，$x=-1$ ---------- （1 分）

当 x 变化时，$g'(x),g(x)$ 变化如下表

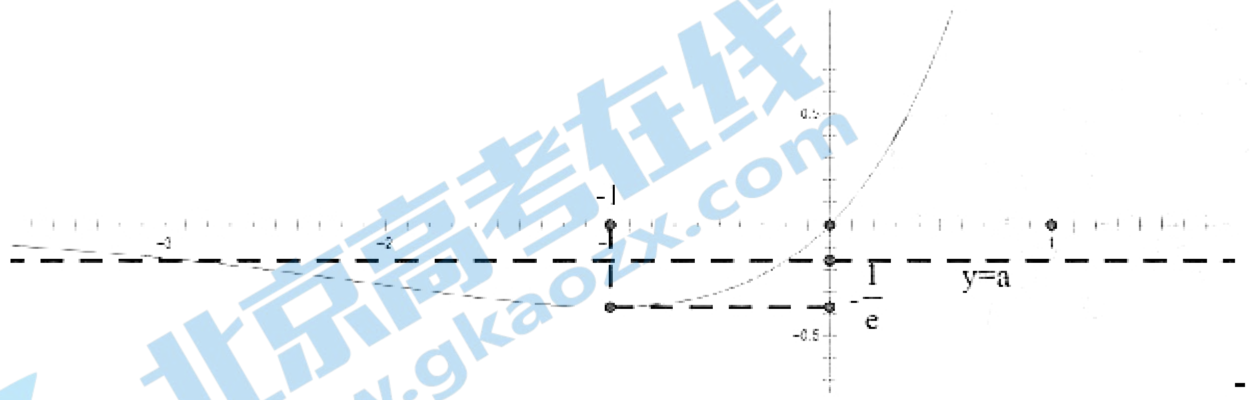
x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,+\infty)$

$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	单调递减	极小值 $-\frac{1}{e}$	单调递增

-----------（2 分）

当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$g(x)<0$，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$g(x)>0$，$g(0)=0$

$\therefore y=g(x)$ 与 $y=a$ 的草图如图所示：



-----------（3 分）

①当 $a\le -\frac{1}{e}$ 时，直线 $y=a$ 与 $y=g(x)$ 图像没有交点或相切于一点.此时，$f'(x)$ 没有零点或有一个不变号零点，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递增.故，此时 $f(x)$ 无极值点；----------（4 分）

②当 $-\frac{1}{e}<a<0$ 时，直线 $y=a$ 与 $y=g(x)$ 图像有两个不同的交点.此时，$f'(x)$ 有两个变号零点，故，此时 $f(x)$ 有两个极值点；-----------（5 分）

③当 $a\ge 0$ 时，直线 $y=a$ 与 $y=g(x)$ 图像有一个交点.此时，$f'(x)$ 有一个变号零点，故，此时 $f(x)$ 有一个极值点.-----------（6 分）

（2）不等式 $f(x)\ge \ln x-e^x+1$ 对任意的 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，

等价于 $xe^x-\ln x-1\ge ax$ 对任意的 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，

$\therefore a\le e^x-\frac{\ln x+1}{x}$ 对任意的 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立.-----------（7 分）

记 $F(x)=e^x-\frac{\ln x+1}{x}$，则 $F'(x)=e^x+\frac{\ln x}{x^2}=\frac{x^2e^x+\ln x}{x^2}$，

记 $h(x)=x^2e^x+\ln x$，则 $h'(x)=\left(x^2+2x\right)e^x+\frac{1}{x}$，易知 $h'(x)>0$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上恒成立，

$\therefore h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且 $h(\frac{1}{e})=e^{\frac{1}{e}-2}-1<0$，$h(1)=e>0$，-----------（8 分）

$\therefore$ 存在 $x_0\in(\frac{1}{e},1)$，使得 $h(x_0)=0$，且当 $x\in(0,x_0)$ 时，$h(x)<0$，即 $F'(x)<0$，

$\therefore$函数 $F(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减；

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$h(x)>0$，即 $F'(x)>0$，故 $F(x)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore F(x)_{\min}=F(x_0)=e^{x_0}-\dfrac{\ln x_0+1}{x_0}$，　　----------- (9 分)

又 $h(x_0)=0$，故 $x_0{}^2e^{x_0}=-\ln x_0$，即 $x_0e^{x_0}=-\dfrac{\ln x_0}{x_0}$，即 $x_0e^{x_0}=\ln\dfrac{1}{x_0}\cdot e^{\ln\frac{1}{x_0}}$，　　---------- (10 分)

由（Ⅰ）知函数 $g(x)=xe^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，又 $g(x_0)=g\left(\ln\dfrac{1}{x_0}\right)$

$\therefore x_0=\ln\dfrac{1}{x_0}$，$F(x)_{\min}=\dfrac{1}{x_0}-\dfrac{-x_0+1}{x_0}=1$，　　----------- (11 分)

$\therefore a\le 1$．综上，实数 a 的取值范围是 $(-\infty,1]$．　　----------- (12 分)

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 " 精益求精、专业严谨 " 的建设理念，不断探索"K12 教育+互联网+大数据"的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供"衔接和桥梁纽带"作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。