

海淀区高一年级第一学期期末练习

数 学

2018.01

学校_____ 班级_____ 姓名_____ 成绩_____

一、选择题（本大题共 8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 已知集合 $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{x | (x-1)(x-3) = 0\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. \emptyset B. $\{1\}$ C. $\{3\}$ D. $\{1, 3\}$

2. $\sin(-\frac{2\pi}{3}) =$ ()

- A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

3. 下列函数为奇函数的是 ()

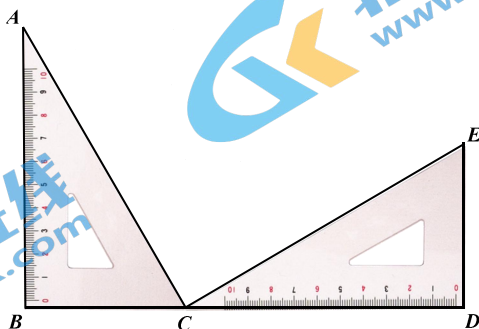
- A. $y = 2^x$ B. $y = \sin x, x \in [0, 2\pi]$
 C. $y = x^3$ D. $y = \lg|x|$

4. 若幂函数 $y = f(x)$ 的图象经过点 $(-2, 4)$, 则 $f(x)$ 在定义域内 ()

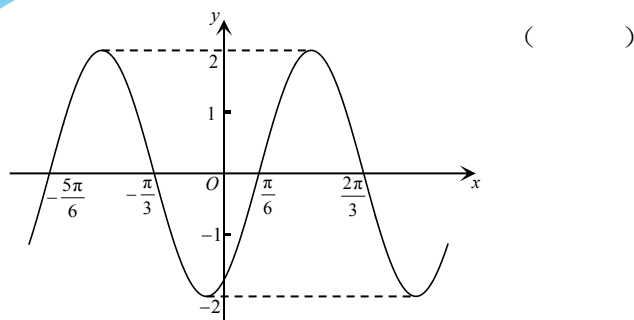
- A. 为增函数 B. 为减函数 C. 有最小值 D. 有最大值

5. 如图，在平面内放置两个相同的直角三角板，其中 $\angle A = 30^\circ$ ，且 B, C, D 三点共线，则下列结论不成立的是 ()

- A. $CD = \sqrt{3}BC$
 B. $CA \cdot CE = 0$
 C. AB 与 DE 共线
 D. $CA \cdot CB = CE \cdot CD$



6. 函数 $f(x)$ 的图象如图所示，为了得到函数 $y = 2\sin x$ 的图象，可以把函数 $f(x)$ 的图象



- A. 每个点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ (纵坐标不变), 再向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位
- B. 每个点的横坐标伸长到原来的 2 倍 (纵坐标不变), 再向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位
- C. 先向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位, 再把所得各点的横坐标伸长到原来的 2 倍 (纵坐标不变)
- D. 先向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位, 再把所得各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ (纵坐标不变)

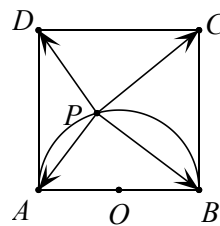
7. 已知 $f(x) = \log_2 x - \left(\frac{1}{2}\right)^x$, 若实数 a, b, c 满足 $0 < a < b < c$, 且 $f(a)f(b)f(c) < 0$, 实数 x_0 满足 $f(x_0) = 0$,

那么下列不等式中, 一定成立的是 ()

- A. $x_0 < a$ B. $x_0 > a$ C. $x_0 < c$ D. $x_0 > c$

8. 如图, 以 AB 为直径在正方形 $ABCD$ 内部作半圆 O (不含 A, B 两点), P 为半圆上一动点, 下面关于 $|PA + PB + PC + PD|$ 的说法正确的是 ()

- A. 无最大值, 但有最小值
- B. 既有最大值, 又有最小值
- C. 有最大值, 但无最小值
- D. 既无最大值, 又无最小值

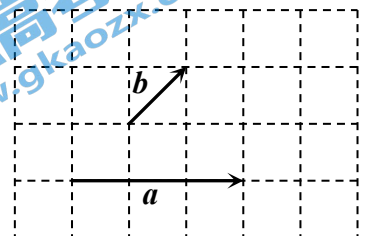


二、填空题 (本大题共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 把答案填在题中横线上)

9. 已知向量 $a = (1, 2)$, 写出一个与 a 共线的非零向量的坐标 _____.

10. 已知角 θ 的终边过点 $(3, -4)$, 则 $\cos \theta =$ _____.

11. 向量 a, b 在边长为 1 的正方形网格中的位置如图所示, 则 $a \cdot b =$ _____.



12. 函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq t, \\ x, & 0 < x < t. \end{cases}$ ($t > 0$) 是区间 $(0, +\infty)$ 上的增函数, 则 t 的取值范围是 _____.

13. 有关数据显示, 中国快递行业产生的包装垃圾在 2015 年约为 400 万吨, 2016 年的年增长率为 50%. 有专家预测, 如果不采取措施, 未来包装垃圾将以此增长率持续增长. 请预测, 从 _____ 年开始, 快递业产生的包装垃圾将超过 4000 万吨.

(参考数据: $\lg 2 \approx 0.3010, \lg 3 \approx 0.4771$)

14. 已知函数 $f(x) = \sin \omega x$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{6})$ 上是增函数, 则下列结论正确的是 _____ (将所有符合题意的序号填在横线上)

① 函数 $f(x) = \sin \omega x$ 在区间 $(-\frac{\pi}{6}, 0)$ 上是增函数;

② 满足条件的正整数 ω 的最大值为 3;

③ $f(\frac{\pi}{4}) \geq f(\frac{\pi}{12})$.



三、解答题 (本大题共 4 小题, 共 44 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤)

15. (本小题 10 分)

已知向量 $a = (\sin x, 1)$, $b = (1, k)$, $f(x) = a \cdot b$.

(I) 若关于 x 的方程 $f(x) = 1$ 有解, 求实数 k 的取值范围;

(II) 若 $f(\alpha) = \frac{1}{3} + k$ 且 $\alpha \in (0, \pi)$, 求 $\tan \alpha$.

16. (本小题 12 分)

已知二次函数 $f(x) = x^2 + bx + c$ 满足 $f(1) = f(3) = -3$.

(I) 求 b, c 的值;

(II) 若函数 $g(x)$ 是奇函数, 当 $x \geq 0$ 时, $g(x) = f(x)$,

(i) 直接写出 $g(x)$ 的单调递减区间为 _____;

(ii) 若 $g(a) > a$, 求 a 的取值范围.



扫描二维码, 获取更多期末试题



长按识别关注

17. (本小题 12 分)

某同学用“五点法”画函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 在某一个周期内的图象时, 列表并填入了部分数据, 如下表:

$\omega x + \varphi$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{2\pi}{3}$	
$y = A \sin(\omega x + \varphi)$	0	2	0		0

(I) 请将上表数据补充完整;

函数 $f(x)$ 的解析式为 $f(x) =$ _____ (直接写出结果即可);

(II) 求函数 $f(x)$ 的单调递增区间;

(III) 求函数 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ 上的最大值和最小值.

18. (本小题 10 分)

定义: 若函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 且存在非零常数 T , 对任意 $x \in \mathbf{R}$, $f(x+T) = f(x) + T$ 恒成立, 则称 $f(x)$ 为线周期函数, T 为 $f(x)$ 的线周期.

(I) 下列函数① $y = 2^x$, ② $y = \log_2 x$, ③ $y = [x]$ (其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数), 是线周期函数的是 (直接填写序号);

(II) 若 $g(x)$ 为线周期函数, 其线周期为 T , 求证: $G(x) = g(x) - x$ 为周期函数;

(III) 若 $\varphi(x) = \sin x + kx$ 为线周期函数, 求 k 的值.

海淀区高一年级第一学期期末练习参考答案

2018.1

数 学

阅卷须知:

1. 评分参考中所注分数, 表示考生正确做到此步应得的累加分数.
2. 其它正确解法可以参照评分标准按相应步骤给分.

一、选择题: 本大题共 8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	A	C	C	D	C	B	A

二、填空题: 本大题共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分.

9. 答案不唯一, 纵坐标为横坐标 2 倍即可, 例如 (2,4) 等.
10. $\frac{3}{5}$ 11. 3 12. $t \geq 1$ 13. 2021 14. ①②③

注: 第 14 题选对一个给 1 分, 选对两个给 2 分, 选对三个给 4 分.

三、解答题: 本大题共 4 小题, 共 44 分.

15.

解: (I)

\because 向量 $a=(\sin x, 1)$, $b=(1, k)$, $f(x) = a \cdot b$,

$\therefore f(x) = a \cdot b = \sin x + k$.

关于 x 的方程 $f(x) = 1$ 有解, 即关于 x 的方程 $\sin x = 1 - k$ 有解.

$\therefore \sin x \in [-1, 1]$,

\therefore 当 $1 - k \in [-1, 1]$ 时, 方程有解.

则实数 k 的取值范围为 $[0, 2]$.

(II) 因为 $f(\alpha) = \frac{1}{3} + k$, 所以 $\sin \alpha + k = \frac{1}{3} + k$, 即 $\sin \alpha = \frac{1}{3}$.

当 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2}]$ 时, $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

当 $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ 时, $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\tan \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{4}$.

16. 解: (I) $b = -4$;

$c = 0$.

(II) (i) $[-2, 2]$. -----6分

(ii) 由(I)知 $f(x) = x^2 - 4x$, 则当 $x \geq 0$ 时, $g(x) = x^2 - 4x$;

当 $x < 0$ 时, $-x > 0$, 则 $g(-x) = (-x)^2 - 4(-x) = x^2 + 4x$

因为 $g(x)$ 是奇函数, 所以 $g(x) = -g(-x) = -x^2 - 4x$. -----8分

若 $g(a) > a$, 则

$$\begin{cases} a > 0, \\ a^2 - 4a > a; \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a \leq 0, \\ -a^2 - 4a > a. \end{cases}$$
 -----10分

解得 $a > 5$ 或 $-5 < a < 0$. -----12分

综上, a 的取值范围为 $a > 5$ 或 $-5 < a < 0$.

17. 解: (I)

$\omega x + \varphi$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	$-\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{12}$
$y = A \sin(\omega x + \varphi)$	0	2	0	-2	0

-----4分

解析式为: $f(x) = 2 \sin(2x + \frac{\pi}{6})$ -----6分

(II) 函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[-\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi]$, $k \in \mathbf{Z}$. -----8分

(III) 因为 $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0$, 所以 $-\frac{5\pi}{6} \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{6}$.

$$\text{得: } -1 \leq \sin(2x + \frac{\pi}{6}) \leq \frac{1}{2}.$$

所以, 当 $2x + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{2}$ 即 $x = -\frac{\pi}{3}$ 时, $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ 上的最小值为 -2. -----10分

当 $2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$ 即 $x = 0$ 时, $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ 上的最大值为 1. -----12分

18. 解:

(I) ③; -----2分

(II) 证明: $\because g(x)$ 为线周期函数, 其线周期为 T ,

\therefore 存在非零常数 T , 对任意 $x \in \mathbf{R}$, $g(x+T) = g(x) + T$ 恒成立.

$$\because G(x) = g(x) - x,$$

$$\therefore G(x+T) = g(x+T) - (x+T) = g(x) + T - (x+T) = g(x) - x = G(x).$$

$\therefore G(x) = g(x) - x$ 为周期函数. -----6分

(III) $\therefore \varphi(x) = \sin x + kx$ 为线周期函数,

\therefore 存在非零常数 T , 对任意 $x \in \mathbf{R}$, $\sin(x+T) + k(x+T) = \sin x + kx + T$.

$\therefore \sin(x+T) + kT = \sin x + T$.

令 $x=0$, 得 $\sin T + kT = T$; -----①

令 $x = \pi$, 得 $-\sin T + kT = T$; -----②

①②两式相加, 得 $2kT = 2T$.

$\therefore T \neq 0$,

$\therefore k = 1$.

检验:

当 $k=1$ 时, $\varphi(x) = \sin x + x$. 存在非零常数 2π , 对任意 $x \in \mathbf{R}$,

$$\varphi(x+2\pi) = \sin(x+2\pi) + x + 2\pi = \sin x + x + 2\pi = \varphi(x) + 2\pi,$$

$\therefore \varphi(x) = \sin x + x$ 为线周期函数

综上, $k=1$.

-----10分