

高二数学

2023.7

本试卷共 5 页，共 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案写在答题卡上，在试卷上作答无效。

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

(1) 等差数列 $-2, 1, 4, \dots$ 的第 10 项为

- (A) 22 (B) 23
(C) 24 (D) 25

(2) 设函数 $f(x) = \sin x$ ，则 $f'(\pi) =$

- (A) 1 (B) -1
(C) 0 (D) π

(3) 某一批种子的发芽率为 $\frac{2}{3}$ 。从中随机选择 3 颗种子进行播种，那么恰有 2 颗种子发芽的概率为

- (A) $\frac{2}{9}$ (B) $\frac{8}{27}$
(C) $\frac{4}{9}$ (D) $\frac{2}{3}$

(4) 记函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 的导函数为 $g(x)$ ，则 $g(x)$

- (A) 是奇函数 (B) 是偶函数
(C) 既是奇函数又是偶函数 (D) 既不是奇函数又不是偶函数

(5) 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_1 = 9$ ， $a_8 = -5$ ，则当 $\{a_n\}$ 的前 n 项和最大时， n 的值为

- (A) 5 (B) 6
(C) 7 (D) 8

关注北京高考在线官方微信：[京考一点通](#)（微信号：[bjgkzx](#)），获取更多试题资料及排名分析信息。

题
答
要
不
内
线
封
密
学
校
班
级
姓
名
学
号

(6) 某钢厂的年产量由 2010 年的 40 万吨增加到 2020 年的 60 万吨, 假设该钢厂的年产量从 2010 年起年平均增长率相同, 那么该钢厂 2030 年的年产量将达

- (A) 80 万吨 (B) 90 万吨
(C) 100 万吨 (D) 120 万吨

(7) 如果函数 $f(x) = x \ln x - ax$ 在区间 $(1, e)$ 上单调递增, 那么实数 a 的取值范围为

- (A) $[1, 2]$ (B) $(-\infty, 2]$
(C) $[1, +\infty)$ (D) $(-\infty, 1]$

(8) 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2$, 公比 $q = \frac{2}{3}$, 记其前 n 项的和为 S_n , 则对于 $n \in \mathbf{N}^*$, 使得 $S_n < m$ 都成立的最小整数 m 等于

- (A) 6 (B) 3
(C) 4 (D) 2

(9) 设随机变量 ξ 的分布列如下:

ξ	1	2	3	4	5
P	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5

则下列说法中不正确的是

- (A) $P(\xi \leq 2) = 1 - P(\xi \geq 3)$ (B) 当 $a_n = \frac{1}{2^n}$ ($n = 1, 2, 3, 4$) 时, $a_5 = \frac{1}{2^4}$
(C) 若 $\{a_n\}$ 为等差数列, 则 $a_3 = \frac{1}{5}$ (D) $\{a_n\}$ 的通项公式可能为 $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$

(10) 若函数 $f(x) = \begin{cases} xe^x + a, & x < 1 \\ a - x, & x \geq 1 \end{cases}$ 有且仅有两个零点, 则实数 a 的取值范围为

- (A) $(0, e)$ (B) $(-\infty, e)$
(C) $(0, \frac{1}{e})$ (D) $(-\infty, \frac{1}{e})$

第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

(11) 函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x-1}$ 的定义域为_____.

(12) 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_1 + a_2 = -6$ ， $a_3 + a_4 = -24$ ，则 $a_5 + a_6 =$ _____.

(13) 若函数 $f(x) = e^{2x}$ 在 $x = x_0$ 处的切线与直线 $y = 2x$ 平行，则 $x_0 =$ _____.

(14) 抛掷甲、乙两枚质地均匀的骰子，在甲骰子的点数为奇数的条件下，乙骰子的点数不小于甲骰子点数的概率为_____.

(15) 已知数列 $\{a_n\}$ ($n \leq 9$) 各项均为正整数，对任意的 $k \in \mathbb{N}^*$ ($2 \leq k \leq 8$)， $a_k = a_{k-1} + 1$ 和

$a_k = a_{k+1} - 1$ 中有且仅有一个成立，且 $a_1 = 6$ ， $a_9 = 14$. 记 $S_9 = a_1 + a_2 + \cdots + a_9$.

给出下列四个结论：

① $\{a_n\}$ 可能为等差数列；

② $\{a_n\}$ 中最大的项为 a_9 ；

③ S_9 不存在最大值；

④ S_9 的最小值为 36.

其中所有正确结论的序号是_____.

关注北京高考在线官方微信：[京考一点通](#)（微信号：[bjgkzx](#)），获取更多试题资料及排名分析信息。

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

(16) (本小题 13 分)

已知函数 $f(x) = x^3 - 3x^2 + a$ ，其中 $a \in \mathbf{R}$ 。

(I) 当 $a = 0$ 时，求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程；

(II) 若 $f(x)$ 在区间 $[0, 4]$ 上的最小值为 0，求 $f(x)$ 在该区间上的最大值。

(17) (本小题 13 分)

已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q < 1$ ， $a_4 = 1$ ，且 a_1, a_3 的等差中项等于 $\frac{5}{4}a_2$ 。

(I) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(II) 设 $b_n = \log_2 a_n$ ，证明：数列 $\{b_n\}$ 为等差数列。

(18) (本小题 14 分)

某校开展了为期一年的“弘扬传统文化，阅读经典名著”活动。活动后，为了解阅读情况，学校随机选取了几名学生，统计了他们的阅读量并整理得到以下数据（单位：本）：

男生：3，4，6，7，7，10，11，11，12；

女生：5，5，6，7，8，9，11，13。

假设用频率估计概率，且每个学生的阅读情况相互独立。

(I) 根据样本数据，估计此次活动中学生阅读量超过 10 本的概率；

(II) 现从该校的男生和女生中分别随机选出 1 人，记 X 为选出的 2 名学生中阅读量超过 10 本的人数，求 X 的分布列和数学期望 $E(X)$ ；

(III) 现增加一名女生 A 得到新的女生样本。记原女生样本阅读量的方差为 s_0^2 ，新女生样本阅读量的方差为 s_1^2 。若女生 A 的读量为 8 本，写出方差 s_0^2 与 s_1^2 的大小关系。

(结论不要求证明)

关注北京高考在线官方微信：[京考一点通](#)（微信号：[bjgkzx](#)），获取更多试题资料及排名分析信息。

(19) (本小题 15 分)

某种型号轮船每小时的运输成本 Q (单位:元) 由可变部分和固定部分组成. 其中, 可变部分成本与航行速度的立方成正比, 且当速度为 10 km/h 时, 其可变部分成本为每小时 8 元; 固定部分成本为每小时 128 元.

(I) 设该轮船航行速度为 $x \text{ km/h}$, 试将其每小时的运输成本 Q 表示为 x 的函数;

(II) 当该轮船的航行速度为多少时, 其每千米的运输成本 y (单位:元) 最低?

(20) (本小题 15 分)

已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - a \ln x$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.

(I) 当 $a = 2$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(II) 若函数 $f(x)$ 存在两个不同的极值点 x_1, x_2 , 证明: $f(x_1) + f(x_2) > -\frac{5}{4}$.

(21) (本小题 15 分)

设 $\{a_n\}$ 为无穷数列, 给定正整数 $k (k \geq 2)$, 如果对于任意 $n \in \mathbf{N}^*$, 都有 $a_{n+2k} + a_n = 2a_{n+k}$, 则称数列 $\{a_n\}$ 具有性质 $P(k)$.

(I) 判断下列两个数列是否具有性质 $P(2)$; (结论不需要证明)

① 等差数列 $A: 5, 3, 1, \dots$; ② 等比数列 $B: 1, 2, 4, \dots$.

(II) 已知数列 $\{a_n\}$ 具有性质 $P(2)$, $a_1 = 1, a_2 = 2$, 且由该数列所有项组成的集合

$\{a_n | n \in \mathbf{N}^*\} = \mathbf{Z}$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(III) 若既具有性质 $P(6)$ 又具有性质 $P(k)$ 的数列 $\{a_n\}$ 一定是等差数列, 求 k 的最小值.

关注北京高考在线官方微信: 京考一点通 (微信号:bjgkzx), 获取更多试题资料及排名分析信息.

北京高一高二高三期末试题下载

京考一点通团队整理了【**2023年7月北京各区各年级期末试题&答案汇总**】专题，及时更新 最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期末**】或者底部栏目<**高一高二**>**期末试题**>，进入汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！

