2022-2023 学年北京八中高二（上）期中数学试卷

一、选择题。共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1．（5 分）直线 m 的方程为 $\sqrt{3}x-y+2=0$，则直线 m 的倾斜角为（　　）

A． 30°　　B． 45°　　C． 60°　　D． 120°

2．（5 分）直线 l 经过点 $P(1,1)$，且与直线 $x-y+2=0$ 平行，则直线 l 的方程为（　　）

A． $x-y-2=0$　　B． $x+y-2=0$　　C． $x-y=0$　　D． $x+y-4=0$

3．（5 分）在空间直角坐标系中，点 $A(2,-1,3)$ 关于 Oxy 平面的对称点为 B，则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=$（　　）

A． -4　　B． -10　　C． 4　　D． 10

4．（5 分）已知直线 $l:x+y+2=0$ 和圆 $C:(x-1)^{2}+(y+1)^{2}=1$，那么圆心 C 到直线 l 的距离是（　　）

A． $\frac{1}{2}$　　B． 1　　C． $\sqrt{2}$　　D． 2

5．（5 分）点 P 在平面 ABC 外，若 $PA=PB=PC$，则点 P 在平面 ABC 上的射影是 ΔABC 的（　　）

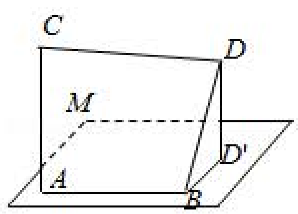
A．外心　　B．重心　　C．内心　　D．垂心

6．（5 分）圆 $(x-3)^{2}+(y+4)^{2}=2$ 关于直线 $y=x$ 对称的圆的方程为（　　）

A． $(x-4)^{2}+(y+3)^{2}=4$　　B． $(x+4)^{2}+(y-3)^{2}=4$

C． $(x-4)^{2}+(y+3)^{2}=2$　　D． $(x+4)^{2}+(y-3)^{2}=2$

7．（5 分）如图，$AB=AC=BD=1$，$AB\subset$ 面 M，$AC\perp$ 面 M，$BD\perp AB$，BD 与面 M 成 30° 角，则 C、D 间的距离为（　　）



A．1　　B．2　　C． $\sqrt{2}$　　D． $\sqrt{3}$

8．（5 分）由直线 $y=x$ 上一点 P 向圆 $C:(x-4)^{2}+y^{2}=1$ 引切线，则切线长的最小值为（　　）

A． $\sqrt{7}$　　B． $2\sqrt{2}$　　C． 2　　D． 4

9．（5 分）已知 F 是椭圆 $C:\frac{x^{2}}{2}+y^{2}=1$ 的左焦点，P 为椭圆 C 上任意一点，点 $Q(4,3)$，则 $|PQ|+|PF|$ 的最

大值为(　　)

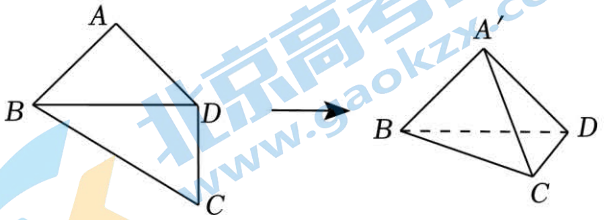
A．$5\sqrt{2}$　　B．$3\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{34}$　　D．$4\sqrt{2}$

10.（5 分）“$m>2$”“是方程$\dfrac{x^2}{m^2}+\dfrac{y^2}{m+2}=1$表示焦点在$x$轴上的椭圆”的(　　)

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

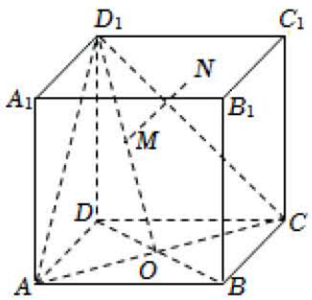
11.（5 分）如图，四边形$ABCD$中，$AB=AD=CD=1$，$BD=\sqrt{2}$，$BD\perp CD$，将四边形$ABCD$沿对角线BD折成四面体$A'-BCD$，使平面$A'BD\perp$平面BCD，则下列结论正确的是(　　)



A．$A'C\perp BD$　　B．$\angle BA'C=90^\circ$

C．$\triangle A'DC$是正三角形　　D．四面体$A'-BCD$的体积为$\dfrac{1}{3}$

12.（5 分）如图所示，正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为 1，$BD\bigcap AC=O$，M是线段D_1O上的动点，过点M作平面ACD_1的垂线交平面$A_1B_1C_1D_1$于点N，则点N到点A距离的最小值为(　　)



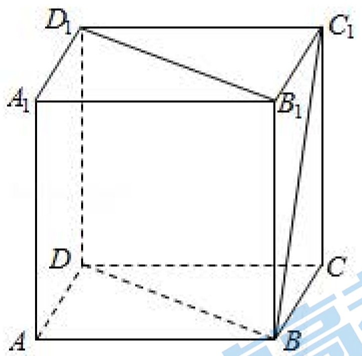
A．$\sqrt{2}$　　B．$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　　C．$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　D．1

二、填空题。共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．

13.（5 分）若直线$ax+2y-1=0$与直线$2x-3y+7=0$垂直，则实数$a=$____．

14.（5 分）若空间向量$\vec{a}=(2,-1,3),\vec{b}=(-1,4,-2),\vec{c}=(7,-7,m)$是共面向量，则实数$m=$____．

15.（5分）如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，直线 BC_1 和 B_1D_1 所成角的大小为_____；直线 BC_1 和平面 B_1D_1DB 所成角的大小为_____.



16.（5分）若单位圆 $x^2+y^2=1$ 与圆 $(x+m)^2+y^2=4$ 相切，则实数 $m=$____.

17.（5分）已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的两个焦点分别为 F_1，F_2，若椭圆上存在点 P 使得 $\angle F_1PF_2$ 是直角，则椭圆离心率的取值范围是 ____.

18.（5分）已知 $\odot O: x^2+y^2=1$．若直线 $y=kx+2$ 上总存在点 P，使得过点 P 的 $\odot O$ 的两条切线互相垂直，则实数 k 的取值范围是____.

三、解答题．共4小题，每题15分，共60分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

19.（15分）已知圆 C 的方程为：$x^2+y^2-2x-4y+1=0$，点 $P(0,4)$．

（1）过点 $A(-1,0)$ 的直线 l_1 将圆 C 分成面积相等的两部分，求直线 l_1 的斜率；

（2）求过点 P 的圆 C 的切线方程；

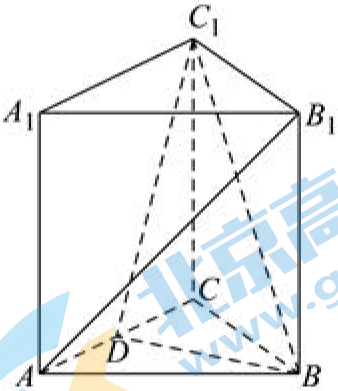
（3）过点 P 的直线 l_2 被圆 C 所截得的弦长为 $2\sqrt{3}$，求直线 l_2 的方程．

20.（15分）直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，点 D 为棱 AC 的中点，$AC=BC=CC_1=2$，$AC\perp BC_1$．

（1）求证：$AB_1//$ 平面 C_1BD；

（2）求证：$BC\perp$ 平面 ACC_1A_1；

（3）判断是否存在经过 BC 的平面 α 满足 $AB_1\perp\alpha$，并说明理由．

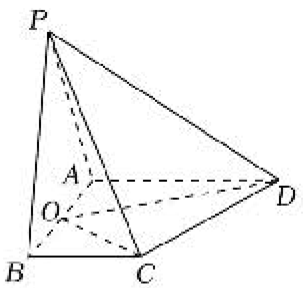


21.（15分）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$，$AD//BC$，$\angle ABC=90^\circ$，$PA=PB=3$，$BC=1$，$AB=2$，$AD=3$，O 是 AB 中点．

（Ⅰ）证明：$CD\perp$ 平面 POC；

（Ⅱ）求二面角 $C-PD-O$ 的平面角的余弦值．

（Ⅲ）在侧棱 PC 上是否存在点 M，使得 $BM//$ 平面 POD，若存在试求出 $\frac{CM}{PC}$，若不存在，请说明理由．



22.（15 分）已知椭圆 C 两焦点坐标分别为 $F_1(-\sqrt{2}，0)$，$F_2(\sqrt{2}，0)$，一个顶点为 $A(0,-1)$.

（1）求椭圆 C 的标准方程；

（2）是否存在斜率为 $k(k\neq 0)$ 的直线 l，使直线 l 与椭圆 C 交于不同的两点 M，N，满足 $|AM|=|AN|$．若存在，求出 k 的取值范围；若不存在，说明理由．

2022-2023学年北京八中高二（上）期中数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题。共12小题，每小题5分，共60分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1．（5分）直线m的方程为$\sqrt{3}x-y+2=0$，则直线m的倾斜角为(　　)

A．$30°$　　B．$45°$　　C．$60°$　　D．$120°$

【解答】解：设直线m的倾斜角为α，

因为直线$\sqrt{3}x-y+2=0$的斜率为$\sqrt{3}$，

所以$\tan\alpha=\sqrt{3}$，

又$\because 0°\leqslant\alpha<180°$，

因此$\alpha=60°$．

故选：C．

2．（5分）直线l经过点$P(1,1)$，且与直线$x-y+2=0$平行，则直线l的方程为(　　)

A．$x-y-2=0$　　B．$x+y-2=0$　　C．$x-y=0$　　D．$x+y-4=0$

【解答】解：由题意可知，直线l的斜率存在，

故设直线方程为$y-1=k(x-1)$，

又因为l与直线$x-y+2=0$平行，

所以斜率相等，

即$k=1$，

将直线化简为一般式得$x-y=0$．

故选：C．

3．（5分）在空间直角坐标系中，点$A(2，-1，3)$关于Oxy平面的对称点为B，则$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=($　　$)$

A．-4　　B．-10　　C．4　　D．10

【解答】解：点$A(2，-1，3)$关于Oxy平面的对称点为$B(2，-1，-3)$，

所以$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=(2，-1，3)\cdot(2，-1，-3)=4+1-9=-4$．

故选：A．

4．（5分）已知直线$l:x+y+2=0$和圆$C:(x-1)^2+(y+1)^2=1$，那么圆心C到直线l的距离是(　　)

A． $\frac{1}{2}$　　B． 1　　C． $\sqrt{2}$　　D． 2

【解答】解：因为圆 C 的圆心为 $C(1,-1)$，

故圆心 C 到直线 l 的距离是 $d=\frac{|1-1+2|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$．

故选：C．

5．（5 分）点 P 在平面 ABC 外，若 $PA=PB=PC$，则点 P 在平面 ABC 上的射影是 ΔABC 的(　　)

A．外心　　B．重心　　C．内心　　D．垂心

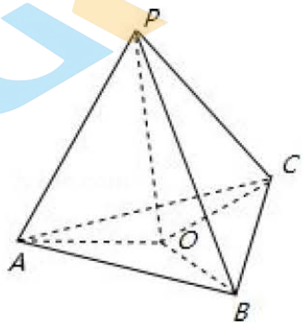
【解答】解：设点 P 作平面 ABC 的射影 O，由题意：$PA=PB=PC$，因为 $PO\perp$ 底面 ABC，

所以 $\Delta PAO\cong\Delta POB\cong\Delta POC$

即：$OA=OB=OC$

所以 O 为三角形的外心．

故选：A．



6．（5 分）圆 $(x-3)^2+(y+4)^2=2$ 关于直线 $y=x$ 对称的圆的方程为(　　)

A． $(x-4)^2+(y+3)^2=4$　　B． $(x+4)^2+(y-3)^2=4$

C． $(x-4)^2+(y+3)^2=2$　　D． $(x+4)^2+(y-3)^2=2$

【解答】解：圆 $(x-3)^2+(y+4)^2=2$ 的圆心为 $C(3,-4)$，半径为 $\sqrt{2}$，

设圆心 $C(3,-4)$ 关于直线 $y=x$ 对称的点坐标为 $D(a,b)$，直线 $y=x$ 的斜率 $k_l=1$，

则 $k_{CD}\cdot k_l=-1$，CD 中点 $(\frac{a+3}{2},\frac{b-4}{2})$ 在直线 $y=x$ 上，

故 $\frac{b-4}{2}=\frac{a-3}{2}$ 且 $\frac{b+4}{a-3}=-1$，

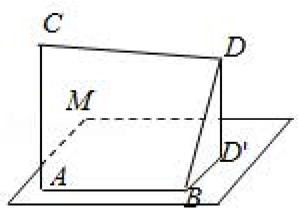
解得 $a=-4$，$b=3$，

即 $D(-4,3)$，

所以对称的圆的方程为 $(x+4)^2+(y-3)^2=2$．

故选：D．

7．（5分）如图，$AB=AC=BD=1$，$AB\subset$面M，$AC\perp$面M，$BD\perp AB$，BD与面M成30°角，则C、D间的距离为（　　）



A．1　　　　B．2　　　　C．$\sqrt{2}$　　　　D．$\sqrt{3}$

【解答】解：由题意，作$DD'\perp$面M，垂足为D'，连接AD'，则$\angle DBD'=30^{\circ}$，$BD'\perp AB$

$\because BD=1$，

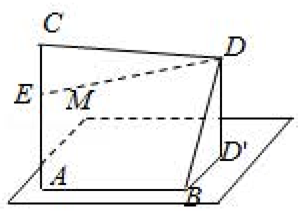
$\therefore DD'=\dfrac{1}{2}$，$BD'=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

$\because AB=1$，$\therefore AD'=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$．

过D作$DE\perp AC$，垂足为E，则$DE=AD'=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$，$CE=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore CD=\sqrt{\dfrac{7}{4}+\dfrac{1}{4}}=\sqrt{2}$．

故选：C．



8．（5分）由直线$y=x$上一点P向圆$C:(x-4)^{2}+y^{2}=1$引切线，则切线长的最小值为（　　）

A．$\sqrt{7}$　　　　B．$2\sqrt{2}$　　　　C．2　　　　D．4

【解答】解：$\because$圆$C:(x-4)^{2}+y^{2}=1$，

$\therefore$圆心$C(4,0)$，半径$r=1$．

由题意可知，直线$y=x$上的点P到圆$C:(x-4)^{2}+y^{2}=1$的切线长最小时，

$CP\perp$直线$y=x$．

$\because$圆心到直线的距离$d=\dfrac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$，

$\therefore$切线长的最小值为$\sqrt{8-1}=\sqrt{7}$.

故选：A.

9.（5 分）已知F是椭圆$C:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$的左焦点，P为椭圆C上任意一点，点$Q(4,3)$，则$|PQ|+|PF|$的最大值为(　　)

A．$5\sqrt{2}$　　　B．$3\sqrt{2}$　　　C．$\sqrt{34}$　　　D．$4\sqrt{2}$

【解答】解：$\because$点F为椭圆$C:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$的左焦点，$\therefore F(-1,0)$，

$\because$点P为椭圆C上任意一点，点Q的坐标为$(4,3)$，

设椭圆C的右焦点为$F'(1,0)$，

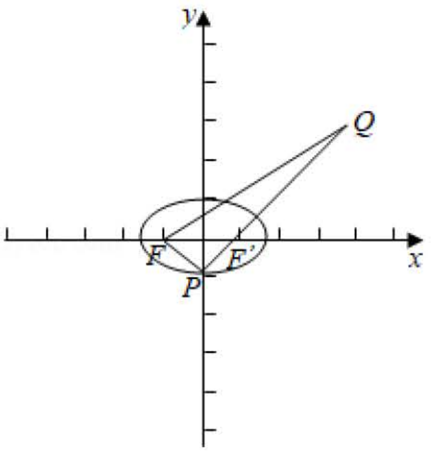
$\therefore|PQ|+|PF|=|PQ|+2\sqrt{2}-|PF'|$

$=2\sqrt{2}+|PQ|-|PF'|$，

$\because|PQ|-|PF'|\leqslant|QF'|=3\sqrt{2}$，

$\therefore|PQ|+|PF|\leqslant5\sqrt{2}$，即最大值为$5\sqrt{2}$，此时$Q$，$F'$，$P$共线.

故选：A.



10.（5 分）“$m>2$”“是方程$\dfrac{x^2}{m^2}+\dfrac{y^2}{m+2}=1$表示焦点在$x$轴上的椭圆”的(　　)

A．充分不必要条件　　　B．必要不充分条件

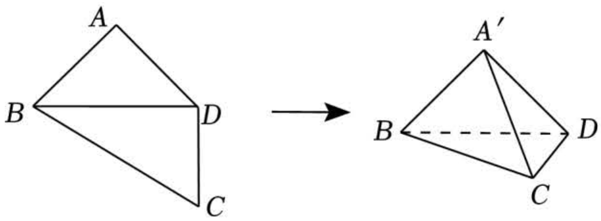
C．充要条件　　　D．既不充分也不必要条件

【解答】解：由方程$\dfrac{x^2}{m^2}+\dfrac{y^2}{m+2}=1$表示焦点在$x$轴上的椭圆，可得：$m^2>m+2>0$，解得$-2<m<-1$或$m>2$.

$\therefore$ “$m>2$”“是方程$\dfrac{x^2}{m^2}+\dfrac{y^2}{m+2}=1$表示焦点在$x$轴上的椭圆”的充分不必要条件.

故选：A.

11.（5 分）如图，四边形 $ABCD$ 中，$AB=AD=CD=1$，$BD=\sqrt{2}$，$BD\perp CD$，将四边形 $ABCD$ 沿对角线 BD 折成四面体 $A'-BCD$，使平面 $A'BD\perp$ 平面 BCD，则下列结论正确的是(　　)



A．$A'C\perp BD$　　B．$\angle BA'C=90^{\circ}$

C．$\triangle A'DC$ 是正三角形　　D．四面体 $A'-BCD$ 的体积为 $\frac{1}{3}$

【解答】解：$\because$ 四边形 $ABCD$ 中，$AB=AD=CD=1$，$BD=\sqrt{2}$，$BD\perp CD$，平面 $A'BD\perp$ 平面 BCD，

则由 $A'D$ 与 BD 不垂直，$BD\perp CD$，故 BD 与平面 $A'CD$ 不垂直，则 BD 仅于平面 $A'CD$ 与 CD 平行的直线垂直，故 A 错误；

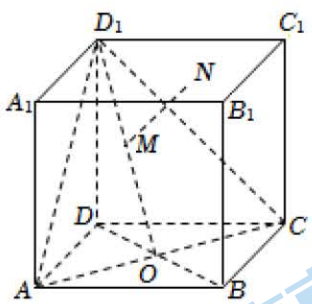
由 $BD\perp CD$，平面 $A'BD\perp$ 平面 BCD，我们易得 $CD\perp$ 平面 $A'BD$，$\therefore CD\perp A'B$，又由 $AB=AD$，$BD=\sqrt{2}$，可得 $A'B\perp A'D$，则 $A'B$ 垂直平面 $A'CD$，$\therefore\angle BA'C=90^{\circ}$，故 B 正确；

由 $CD\perp$ 平面 $A'BD$ 得 $CD\perp A'D$，即△ $A'DC$ 是直角三角形，故 C 答案△ $A'DC$ 是正三角形错误；

$\because$ 四面体 $A'-BCD$ 的体积 $V=\frac{1}{3}\times CD\times S_{\triangle A'BD}=\frac{1}{6}$，$\therefore D$ 答案四面体 $A'-BCD$ 的体积为 $\frac{1}{3}$ 错误；

故选：B．

12.（5 分）如图所示，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，$BD\bigcap AC=O$，M 是线段 D_1O 上的动点，过点 M 作平面 ACD_1 的垂线交平面 $A_1B_1C_1D_1$ 于点 N，则点 N 到点 A 距离的最小值为(　　)

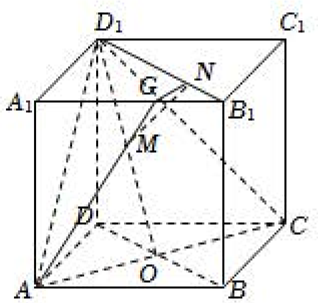


A．$\sqrt{2}$　　B．$\frac{\sqrt{6}}{2}$　　C．$\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　D．1

【解答】解：$\because$ 平面 $ACD_1\perp$ 平面 BDD_1B_1，又 $MN\perp$ 平面 ACD_1，

$\therefore MN\subset$ 平面 BDD_1B_1，$\therefore N\in B_1D_1$

过 N 作 $NG\perp A_1B_1$，交 A_1B_1 于 G，将平面 $A_1B_1C_1D_1$ 展开，如图：



设 $NG=x$，$(0\leqslant x\leqslant 1)$，

$\therefore AN=\sqrt{1^2+(1-x)^2+x^2}=\sqrt{2x^2-2x+2}=\sqrt{2(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{2}}\geqslant\frac{\sqrt{6}}{2}$，

当 $x=\frac{1}{2}$ 时最小．

故选：B．

二、填空题．共6小题，每小题5分，共30分．

13．（5分）若直线 $ax+2y-1=0$ 与直线 $2x-3y+7=0$ 垂直，则实数 $a=$__3__．

【解答】解：根据题意，可得 $2a+2\times(-3)=0$，解得 $a=3$．

故答案为：3．

14．（5分）若空间向量 $\vec{a}=(2,-1,3),\vec{b}=(-1,4,-2),\vec{c}=(7,-7,m)$ 是共面向量，则实数 $m=$__11__．

【解答】解：$\because$ 向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 共面，

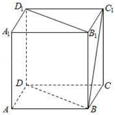
$\therefore$ 存在 x，$y\in R$，使得 $\vec{a}=x\vec{b}+y\vec{c}$，

$\therefore(2,-1,3)=x(-1,4,-2)+y(7,-7,m)$，

$\therefore\begin{cases}2=-x+7y\\-1=4x-7y\\3=-2x+ym\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=\frac{1}{3}\\y=\frac{1}{3}\\m=11\end{cases}$，

故答案为：11．

15．（5分）如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，直线 BC_1 和 B_1D_1 所成角的大小为__60°__；直线 BC_1 和平面 B_1D_1DB 所成角的大小为_____．



【解答】解：连结 DC_1，A_1C_1，设 $A_1C_1 \cap B_1D_1 = O$，连结 BO，

$\because B_1D_1 // BD$，$\therefore \angle DBC_1$是线 BC_1和 B_1D_1所成角，

$\because BD = BC_1 = DC_1$，

$\therefore \angle DBC_1 = 60^\circ$，

$\therefore$直线 BC_1和 B_1D_1所成角的大小为 60°；

正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$中，

$\because B_1D_1 \perp A_1C_1$，$BB_1 \perp A_1C_1$，$B_1D_1 \cap BB_1 = B_1$，

$\therefore C_1O \perp$平面 B_1D_1DB，

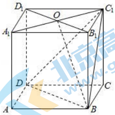
$\therefore \angle OBC_1$是直线 BC_1和平面 B_1D_1DB所成角，

$\because OC_1 = \frac{1}{2}BC_1$，$\therefore \sin\angle OBC_1 = \frac{OC_1}{BC_1} = \frac{1}{2}$，

$\therefore \angle OBC_1 = 30^\circ$．

$\therefore$直线 BC_1和平面 B_1D_1DB所成角为 30°．

故答案为：60°，30°．



16.（5 分）若单位圆 $x^2+y^2=1$ 与圆 $(x+m)^2+y^2=4$ 相切，则实数 $m=$ ___±3 或 ±1___.

【解答】解：若两圆外切，则圆心距 $|m|$ 等于两圆半径之和 3，即 $m=\pm3$；

若两圆内切，则圆心距 $|m|$ 等于两圆半径之差的绝对值 1，即 $m=\pm1$；

故 $m=\pm3$ 或 ±1.

故答案为：±3 或 ±1.

17.（5 分）已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的两个焦点分别为 F_1，F_2，若椭圆上存在点 P 使得 $\angle F_1PF_2$ 是直角，则椭圆离心率的取值范围是 ___$[\frac{\sqrt{2}}{2},1)$___.

【解答】解：根据题意可得：$\angle F_1PF_2=2\theta$ 的最大张角大于等于 $90°$，

又当 P 为 B 点时，2θ 最大，

$\therefore\angle OBF_2\geqslant45°$，

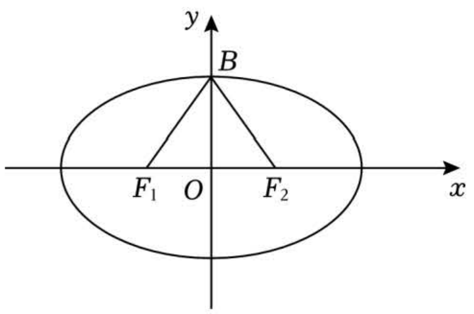
$\therefore\sin\angle OBF_2\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$，

即 $\frac{c}{a}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore e\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$，

又 $0<e<1$，

故 $e\in[\frac{\sqrt{2}}{2},1)$.

故答案为：$[\frac{\sqrt{2}}{2},1)$.



18.（5 分）已知 $\odot O:x^2+y^2=1$．若直线 $y=kx+2$ 上总存在点 P，使得过点 P 的 $\odot O$ 的两条切线互相垂直，则实数 k 的取值范围是___$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$___.

【解答】解：$\because$ 圆心为 $O(0,0)$，半径 $R=1$.

设两个切点分别为 A、B，则由题意可得四边形 $PAOB$ 为正方形，

故有 $PO=\sqrt{2}R=\sqrt{2}$，

$\therefore$ 圆心 O 到直线 $y=kx+2$ 的距离 $d\leqslant\sqrt{2}$，

即 $\dfrac{|2|}{\sqrt{1+k^2}}\leqslant\sqrt{2}$，

即 $1+k^2\geqslant 2$，解得 $k\geqslant 1$ 或 $k\leqslant -1$，

故答案为：$(-\infty，-1]\bigcup[1，+\infty)$

三、解答题。共 4 小题，每题 15 分，共 60 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

19．（15 分）已知圆 C 的方程为：$x^2+y^2-2x-4y+1=0$，点 $P(0,4)$．

（1）过点 $A(-1,0)$ 的直线 l_1 将圆 C 分成面积相等的两部分，求直线 l_1 的斜率；

（2）求过点 P 的圆 C 的切线方程；

（3）过点 P 的直线 l_2 被圆 C 所截得的弦长为 $2\sqrt{3}$，求直线 l_2 的方程．

【解答】解：（1）$x^2+y^2-2x-4y+1=0\Rightarrow(x-1)^2+(y-2)^2=4$，圆心为 $(1,2)$，半径为 2．

因为直线 l_1 将圆 C 分成面积相等的两部分，所以直线 l_1 过 $(1,2)$．

所以 $k_1=\dfrac{2-0}{1-(-1)}=1$．

（2）将 $P(0,4)$ 代入 $(x-1)^2+(y-2)^2=4$，得 $1+4>4$，所以 P 在圆外．

当切线斜率不存在时，设切线为 $x=0$，

圆心 $(1,2)$ 到切线 $x=0$ 的距离为 $1\neq 2$，不符合条件．

当切线的斜率存在时，设切线为 $y=kx+4$，

则 $\dfrac{|k+2|}{\sqrt{k^2+1}}=2$，解得 $k=0$ 或 $k=\dfrac{4}{3}$．

所以切线为：$y=4$ 或 $y=\dfrac{4}{3}x+4$．

（3）设圆心到 l_2 的距离为 d，因为过点 P 的直线 l_2 被圆 C 所截得的弦长为 $2\sqrt{3}$，

所以 $d=\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}=1$．

当直线 l_2 斜率不存在时，直线 l_2 为 $x=0$，

圆心 $(1,2)$ 到 $x=0$ 的距离为 1，符合题意．

当直线 l_2 斜率存在时，设 $l_2:y=kx+4$，

则$\frac{|k+2|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，解得$k=-\frac{3}{4}$，即$l_1: y=-\frac{3}{4}x+4$．

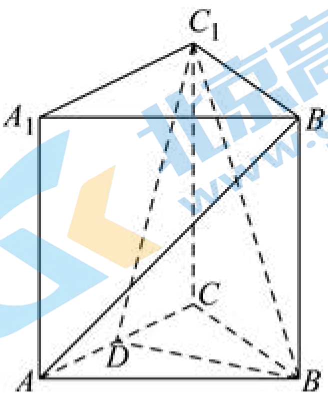
综上：$l_1: y=-\frac{3}{4}x+4$或$x=0$．

20．（15分）直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，点D为棱AC的中点，$AC=BC=CC_1=2$，$AC\perp BC_1$．

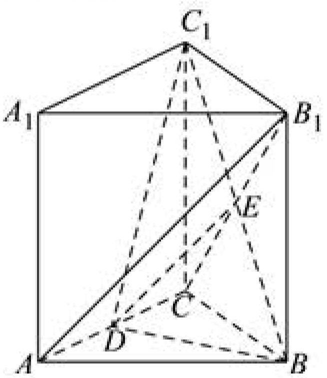
（1）求证：$AB_1//$平面C_1BD；

（2）求证：$BC\perp$平面ACC_1A_1；

（3）判断是否存在经过BC的平面α满足$AB_1\perp\alpha$，并说明理由．



【解答】（1）证明：连接B_1C交BC_1于点E，连接DE，



在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$BB_1//CC_1$且$BB_1=CC_1$，

故四边形BB_1C_1C为平行四边形，

因为$B_1C\bigcap BC_1=E$，

则E为B_1C的中点，

又因为D为AC的中点，

故$AB_1//DE$，

因为 $AB_1 \not\subset$ 平面 C_1BD， $DE \subset$ 平面 C_1BD，

因此， $AB_1 // $ 平面 C_1BD .

（2）证明：$\because CC_1 \perp$ 平面 ABC， BC 、 $AC \subset$ 平面 ABC，

$\therefore AC \perp CC_1$， $BC \perp CC_1$，

$\because AC \perp BC_1$， $BC_1 \cap CC_1 = C_1$， BC_1 、 $CC_1 \subset$ 平面 BB_1C_1C，

$\therefore AC \perp$ 平面 BB_1C_1C， $\because BC \subset$ 平面 BB_1C_1C， $\therefore AC \perp BC$，

又因为 $AC \cap CC_1 = C$， AC 、 $CC_1 \subset$ 平面 AA_1C_1C，

$\therefore BC \perp$ 平面 AA_1C_1C .

（3）解：假设存在经过 BC 的平面 α 满足 $AB_1 \perp \alpha$，因为 $BC \subset$ 平面 α，则 $BC \perp AB_1$，

因为 $BB_1 \perp$ 平面 ABC， $BC \subset$ 平面 ABC，

$\therefore BC \perp BB_1$，

$\because AB_1 \cap BB_1 = B_1$， AB_1 、 $BB_1 \subset$ 平面 AA_1B_1B，

$\therefore BC \perp$ 平面 AA_1B_1B，

$\because AB \subset$ 平面 AA_1B_1B，

$\therefore BC \perp AB$，

事实上， $AC \perp BC$， $AC = BC = 2$，故 ΔABC 为等腰直角三角形，且 $\angle ABC = 45^\circ$，矛盾.

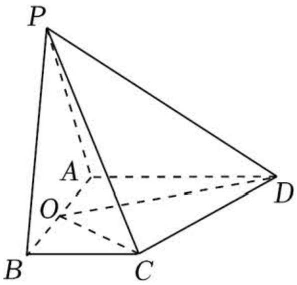
因此，不存在经过 BC 的平面 α 满足 $AB_1 \perp \alpha$.

21.（15 分）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$，$AD // BC$，$\angle ABC = 90^\circ$，$PA = PB = 3$，$BC = 1$， $AB = 2$， $AD = 3$，O 是 AB 中点.

（Ⅰ）证明：$CD \perp$ 平面 POC；

（Ⅱ）求二面角 $C-PD-O$ 的平面角的余弦值.

（Ⅲ）在侧棱 PC 上是否存在点 M，使得 $BM //$ 平面 POD，若存在试求出 $\frac{CM}{PC}$，若不存在，请说明理由.



【解答】 解：(I) 平面 $ABCD$ 内，过 C 点作 $CE\perp AD$ 于 E

$\because$ 直角梯形 $ABCD$ 中，$AD//BC$，$BC=1$，$AB=2$，$AD=3$，$\therefore AE=1$，$CE=2$

$\text{Rt}\Delta\text{CDE}$ 中，$DE=2$，可得 $CD=\sqrt{CE^2+DE^2}=2\sqrt{2}$

$\because \text{Rt}\Delta\text{BOC}$ 中，$BO=\dfrac{1}{2}AB=1$，$BC=1$，$\therefore OC=\sqrt{BO^2+BC^2}=\sqrt{2}$

同理，得 $OD=\sqrt{AO^2+AD^2}=\sqrt{10}$

$\therefore OD^2=10=OC^2+CD^2$，可得 ΔOCD 是以 CD 为斜边的直角三角形，

$\therefore OC\perp CD$

$\because PA=PB$，O 是 AB 中点，$\therefore PO\perp AB$，

$\because$ 平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAB\cap$ 平面 $ABCD=AB$，$PO\subset$ 平面 PAB，

$\therefore PO\perp$ 平面 $ABCD$，结合 $CD\subset$ 平面 $ABCD$，得 $PO\perp CD$

$\because PO$、OC 是平面 POC 内的相交直线，$\therefore CD\perp$ 平面 POC；

(II) 设 CD 的中点为 F，连结 OF，则直线 OB、OF、OP 两两互相垂直，

分别以 OB、OF、OP 为 x 轴、y 轴、z 轴，建立直角坐标系 $O-xyz$，如图所示

则 $C(1，1，0)$，$D(-1，3，0)$，$P(0，0，2\sqrt{2})$，

可得 $\overrightarrow{OP}=(0，0，2\sqrt{2})$，$\overrightarrow{OD}=(-1，3，0)$，

设 $\vec{m}=(x，y，z)$ 为平面 $P0D$ 的一个法向量，则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{OP}=2\sqrt{2}z=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{OD}=-x+3y=0\end{cases}$，

取 $y=1$，得 $x=3$ 且 $z=0$，得 $\vec{m}=(3，1，0)$

同理求出平面 PCD 的一个法向量为 $\vec{n}=(\sqrt{2}，\sqrt{2}，1)$

$\because \cos<\vec{m}，\vec{n}>=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{3\times\sqrt{2}+1\times\sqrt{2}+0\times 1}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{5}}=\dfrac{4}{5}$

$\therefore$ 二面角 $C-PD-O$ 的平面角的余弦值等于 $\dfrac{4}{5}$；

（III）设侧棱 PC 上存在点 M，使得 $BM//$ 平面 POD，此时 $\frac{CM}{PC}=\lambda$，

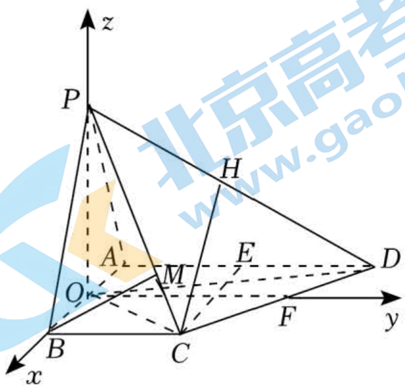
$\because \overrightarrow{PC}=(1,1,-2\sqrt{2})$，$\overrightarrow{BC}=(0,1,0)$

$\therefore \overrightarrow{CM}=\lambda\overrightarrow{CP}=(-\lambda,-\lambda,2\sqrt{2}\lambda)$，可得 $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CM}=(-\lambda,-\lambda+1,2\sqrt{2}\lambda)$，

$\because BM//$ 平面 POD，$\vec{m}=(3,1,0)$ 为平面 POD 的一个法向量

$\therefore \overrightarrow{BM}\cdot\vec{m}=-3\lambda-\lambda+1=0$，解之得 $\lambda=\frac{1}{4}$

因此，侧棱 PC 上存在点 M，当 $\frac{CM}{PC}=\frac{1}{4}$ 时满足 $BM//$ 平面 POD．



22.（15 分）已知椭圆 C 两焦点坐标分别为 $F_1(-\sqrt{2},0)$，$F_2(\sqrt{2},0)$，一个顶点为 $A(0,-1)$．

（1）求椭圆 C 的标准方程；

（2）是否存在斜率为 $k(k\neq 0)$ 的直线 l，使直线 l 与椭圆 C 交于不同的两点 M，N，满足 $|AM|=|AN|$．若存在，求出 k 的取值范围；若不存在，说明理由．

【解答】解：（Ⅰ）$\because$ 椭圆 C 两焦点坐标分别为 $F_1(-\sqrt{2},0)$，$F_2(\sqrt{2},0)$，一个顶点为 $A(0,-1)$．

$\therefore$ 可设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$．

$\therefore c=\sqrt{2}$，$b=1$，

$\therefore a^2=b^2+c^2=3$．

$\therefore$ 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$．

（Ⅱ）存在这样的直线 l．

设直线 l 的方程为 $y=kx+m$，代入椭圆方程化为 $(1+3k^2)x^2+6kmx+3m^2-3=0$

$\because \triangle=36k^2m^2-4(1+3k^2)(3m^2-3)$ 得 $3k^2-m^2+1>0\ldots$①

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，线段 MN 中点为 $P(x_0,y_0)$，

则 $x_1+x_2=-\dfrac{6km}{1+3k^2}$， $x_1x_2=\dfrac{3m^2-3}{1+3k^2}$．

于是 $x_0=-\dfrac{3km}{1+3k^2}$， $y_0=kx_0+m=\dfrac{m}{1+3k^2}$．

$\because |AM|=|AN|$， $\therefore AP\perp MN$．

若 $m=0$，则直线 l 过原点， $P(0,0)$，不合题意．

若 $m\neq 0$，由 $k\neq 0$ 得， $k_{AP}\cdot k=-1$ 得到 $\dfrac{y_0+1}{x_0}\cdot k=-1$，整理得 $2m=3k^2+1$…②

由①②知， $k^2<1$， $\therefore -1<k<1$．

又 $k\neq 0$， $\therefore k\in(-1,\ 0)\cup(0,\ 1)$．

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！