2021年高考北京二中模拟卷

数　　学

一、选择题（共10小题，每小题4分，共40分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项）

1. 设集合 $A=\{x||x-1|<2\},B=\{y|y=2^x,x\in[0,2]\}$，则 $A\cap B=$ 【　　】

$A.[0,2]$　　$B.(1,3)$

$C.[1,3)$　　$D.(1,4)$

2. 下列函数中，既不是奇函数，也不是偶函数的是 【　　】

$A.\ y=x+e^x$　　$B.\ y=x+\dfrac{1}{x}$

$C.\ y=2^x+\dfrac{1}{2^x}$　　$D.\ y=\sqrt{1+x^2}$

3. 我国古代数学名著《九章算术》有"米谷粒分"题：粮仓开仓收粮，有人送来米1206石，验得米内夹谷，抽样取米一把，数得252粒内夹谷28粒，则这批米内夹谷约为 【　　】

$A.$134石　　$B.$169石

$C.$138石　　$D.$1665石

4. 设 $z_1,z_2\in C$，则"z_1,z_2 中至少有一个数是虚数"是"z_1-z_2 是虚数"的 【　　】

$A.$充分非必要条件　　$B.$必要非充分条件

$C.$充要条件　　$D.$既非充分又非必要条件

5. 在平面直角坐标系 xOy 中，角 θ 以 Ox 为始边，终边与单位圆交于点 $\left(\dfrac{3}{5},\dfrac{4}{5}\right)$，则 $\tan(\pi-\theta)$ 的值为【　　】

$A.\ \dfrac{4}{3}$　　$B.\ \dfrac{3}{4}$

$C.\ -\dfrac{4}{3}$　　$D.\ -\dfrac{3}{4}$

6. 在 $\left(x-\dfrac{2}{x}\right)^n$ 的展开式中，若二项式系数的和为32，则 x 的系数为 【　　】

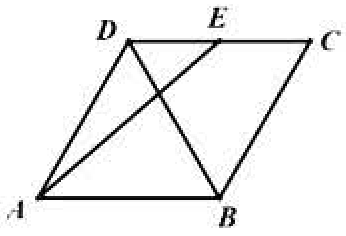
$A.\ -40$　　$B.\ -10$

$C.\ 10$　　$D.\ 40$

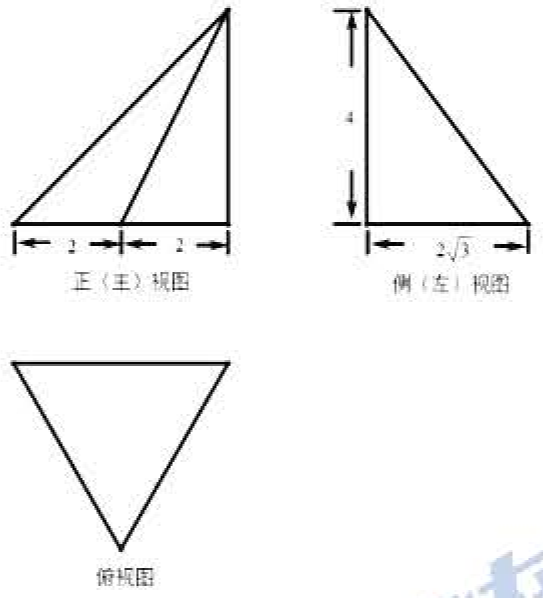
7. 如图，在边长为2的菱形 $ABCD$ 中，$\angle BAD=60^\circ$，E 为 CD 的中点，则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BD}$ 的值为 【　　】

$A.\ 1$　　$B.\ -1$

$C.\ 5$　　$D.\ \sqrt{7}$



8. 某三棱锥的三视图如图所示，该三棱锥的四个面的面积中，最大的是　　　　【　　】



$A.\ 3\sqrt{2}$　　　　$B.\ 2\sqrt{3}$

$C.\ 4\sqrt{7}$　　　　$D.\ 2\sqrt{21}$

9. 记方程①：$x^2+a_1x+1=0$，方程②：$x^2+a_2x+2=0$，方程③：$x^2+a_3x+4=0$，其中 a_1,a_2,a_3 是正实数.当 a_1,a_2,a_3 成等比数列时，下列选项中，能推出方程③无实根的是　　　　【　　】

$A.$方程①有实根，且②有实根　　　　$B.$方程①有实根，且②无实根

$C.$方程①无实根，且②有实根　　　　$D.$方程①无实根，且②无实根

10. 存在函数 $f(x)$ 满足，对任意 $x\in R$ 都有　　　　【　　】

$A.\ f(\sin 2x)=\sin x$　　　　$B.\ f(\sin 2x)=x^2+x$

$C.\ f(x^2+1)=|x+1|$　　　　$D.\ f(x^2+2x)=|x+1|$

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

11. 已知 $4^a=2,\lg x=a$，则 $x=$__________.

12. 已知 α 是任意角，且满足 $\cos\left(\alpha+k\bullet\frac{\pi}{6}\right)=\sin\alpha$，则常数 k 的一个取值为__________.

13. 在“学雷锋，我是志愿者”活动中，有 6 名志愿者要分配到 3 个不同的社区参加服务，每个社区分配 2 名志愿者，其中甲、乙两人分到同一社区，则不同的分配方案共有________种.

14. 已知点 P 和 Q 的横坐标相同，P 的纵坐标是 Q 的纵坐标的 2 倍，P 和 Q 的轨迹分别为双曲线 C_1 和 C_2. 若 C_1 的渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{3}x$，则 C_2 的渐近线方程为__________.

15. 已知函数 $f(x)=2^x$， $g(x)=x^2+ax$ （其中 $a\in R$ ）.对于不相等的实数 x_1,x_2， 设 $m=\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$，

$n=\dfrac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}$.现有如下命题：

（1）对于任意不相等的实数 x_1,x_2， 都有 $m>0$；

（2）对于任意的 a 及任意不相等的实数 x_1,x_2， 都有 $n>0$；

（3）对于任意的 a，存在不相等的实数 x_1,x_2， 使得 $m=n$；

（4）对于任意的 a，存在不相等的实数 x_1,x_2， 使得 $m=-n$.

其中的真命题有__________（写出所有真命题的序号）.

三、**解答题（共 6 小题，共 85 分）**

16. （本小题满分 14 分）如图 1，在直角梯形 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，$AD=AB=\sqrt{2}$，$\angle BAD=90^\circ$，$\angle BCD=45^\circ$，E 为对角线 BD 的中点.现将 $\triangle ABD$ 沿 BD 折起到 $\triangle PBD$ 的位置，使平面 $PBD\perp$ 平面 BCD，如图 2.

（1）求证：直线 $PE\perp$ 平面 BCD；

（2）求异面直线 BD 和 PC 所成角的余弦值；

（3）已知空间存在一点 Q 到点 P，B，C，D 的距离相等，写出这个距离的值（不用说明理由）.

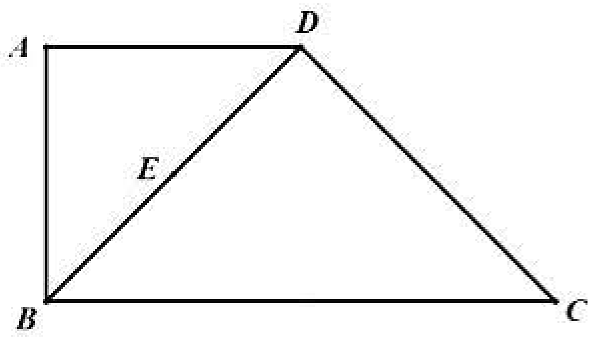


图1

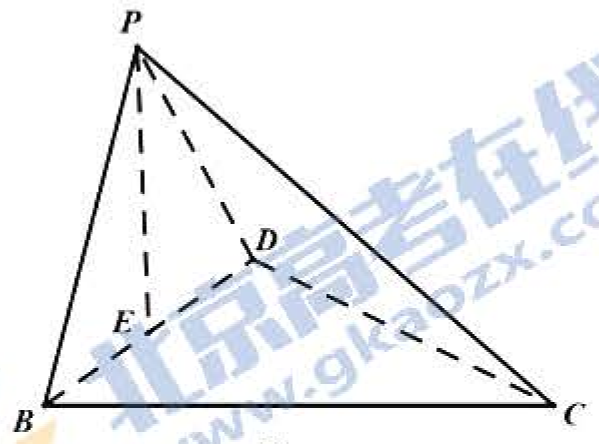


图2

17. （本小题满分 14 分）已知 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 同时满足下列四个条件中的三个：

①$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=1$；②$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的图像可以由 $y=\sin x-\cos x$ 的图像平移得到；③相邻两条对称轴之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$；④最大值为 2.

（1）请指出这三个条件，并说明理由；

（2）若曲线 $y=f(x)$ 的对称轴只有一条落在区间 $[0,m]$ 上，求 m 的取值范围.

18. （本小题满分 14 分）为回馈顾客，某商场拟通过摸球兑奖的方式对 1000 位顾客进行奖励，规定：每位顾客从一个装有 4 个标有面值的球的袋中一次性随机摸出 2 个球，球上所标的面值之和为该顾客所获的奖励额.

（1）若袋中所装的 4 个球中有 1 个所标的面值为 50 元，其余 3 个均为 10 元，求：

①顾客所获的奖励额为 60 元的概率；②顾客所获的奖励额的分布列及数学期望；

（2）商场对奖励总额的预算是 60000 元，并规定袋中的 4 个球只能由标有面值 10 元和 50 元的两种球组成，或标有面值 20 元和 40 元的两种球组成.为了使顾客得到的奖励总额尽可能符合商场的预算且每位顾客所获的奖励额相对均衡，请对袋中的 4 个球的面值给出一个合适的设计，并说明理由.

19. （本小题满分 15 分）已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，椭圆 C 的下顶点和上顶点分别为B_1、B_2，且$|B_1B_2|=2$，过点$P(0,2)$且斜率为 k 的直线 l 与椭圆 C 交于 M，N 两点.

（1）求椭圆 C 的标准方程；

（2）当$k=2$时，求ΔOMN的面积；

（3）求证：直线B_1M与直线B_2N的交点 T 恒在一条定直线上.

20. （本小题满分 14 分）已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-x+a\ln x(a>0)$.

（1）若 $a=1$，求 $f(x)$ 的图象在 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（2）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（3）若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1,x_2，求证：$f(x_1)+f(x_2)>\frac{-3-2\ln 2}{4}$.

21. （本小题满分 14 分）已知集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}(k\geq 2)$，其中 $a_i\in Z(i=1,2,\cdots,k)$，由 A 中的元素构成两个相应的集合：$S=\{(a,b)|a\in A,b\in A,a+b\in A\}$，$T=\{(a,b)|a\in A,b\in A,a-b\in A\}$.其中 (a,b) 是有序数对，集合 S 和 T 中的元素个数分别为 m 和 n.

若对于任意的 $a\in A$，总有 $-a\notin A$，则称集合 A 具有性质 P.

（1）检验集合 $\{0,1,2,3\}$ 与 $\{-1,2,3\}$ 是否具有性质 P 并对其中具有性质 P 的集合,写出相应的集合 S 和 T;

（2）对任何具有性质 P 的集合 A，证明：$n\leq\frac{k(k-1)}{2}$；

（3）判断 m 和 n 的大小关系，并证明你的结论.