

2023 届新高考高三核心模拟卷(中)

数学(二)

注意事项:

1. 本卷满分 150 分,考试时间 120 分钟。答题前,先将自己的姓名、准考证号填写在试题卷和答题卡上,并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答:每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 非选择题的作答:用签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 考试结束后,请将本试题卷和答题卡一并上交。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 若 $(1+2ai)i=1-bi$, 其中 $a, b \in \mathbf{R}$, 则 $|1+a+bi| =$

- A. $\frac{\sqrt{13}}{2}$ B. $\sqrt{5}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ D. $\sqrt{10}$

2. 设集合 $A = \{x | x < 2 \text{ 或 } x \geq 4\}$, $B = \{x | a \leq x \leq a+1\}$, 若 $(\complement_{\mathbf{R}} A) \cap B = \emptyset$, 则 a 的取值范围是

- A. $a \leq 1$ 或 $a > 4$ B. $a < 1$ 或 $a \geq 4$
C. $a < 1$ D. $a > 4$

3. 已知函数 $y = \log_a(3x-2) + 2$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的图象过定点 A , 若抛物线 $y^2 = 2px$ 也过点 A , 则抛物线的准线方程为

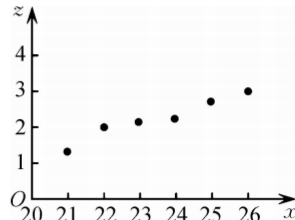
- A. $x = -2$ B. $x = -1$
C. $x = -\frac{9}{2}$ D. $x = -\frac{9}{4}$

4. 若两个向量 a, b 的夹角是 $\frac{2\pi}{3}$, a 是单位向量, $|b| = 2$, $c = 2a - b$, 则向量 c 与 b 的夹角为

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{6}$

5. 一种高产新品种水稻单株穗粒数 y 和土壤锌含量 x 有关, 现整理并收集了 6 组试验数据, y (单位: 粒) 与土壤锌含量 x (单位: mg/m^3) 得到样本数据 (x_i, y_i) ($i=1, 2, 3, 4, 5, 6$), 令 $z_i = \ln y_i$, 并将 (x_i, z_i) 绘制成如图所示的散点图. 若用方程 $y = ae^{bx}$ 对 y 与 x 的关系进行拟合, 则

- A. $a > 1, b > 0$ B. $a > 1, b < 0$
C. $0 < a < 1, b > 0$ D. $0 < a < 1, b < 0$



6. $(x - \frac{2}{\sqrt{x}} - 1)^6$ 展开式中常数项为

- A. -479 B. -239 C. 1 D. 481

7. 已知 $f(x)$ 是定义域为 \mathbf{R} 的奇函数, 当 $x > 0$ 时, $f(x) = \ln(1+x^2) + x$, 则不等式 $f(2x+1) > 1 + \ln 2$ 的解集为

- A. $\{x|x>0\}$ B. $\{x|x<0\}$
C. $\{x|x>1\}$ D. $\{x|x<1\}$

8. 在三棱锥 $A-BCD$ 中, $\triangle ABC$ 和 $\triangle BCD$ 都是边长为 $2\sqrt{2}$ 的正三角形, 当三棱锥 $A-BCD$ 的表面积最大时, 其内切球的半径是

- A. $4-2\sqrt{3}$ B. $2\sqrt{2}-\sqrt{6}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 设 $a > 1, b > 1$, 且 $ab - (a+b) = 1$, 那么

- A. $a+b$ 有最小值 $2\sqrt{2}+2$ B. $2a+b$ 有最小值 7
C. ab 有最小值 $3+2\sqrt{2}$ D. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 有最小值 $3-2\sqrt{2}$

10. 已知函数 $f(x) = 2\sin^2 x - 3\sin|x| + 1$, 则

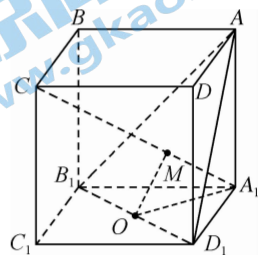
- A. $f(x)$ 是偶函数 B. $f(x)$ 在区间 $(-\frac{\pi}{4}, 0)$ 上单调递增
C. $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上有 4 个零点 D. $f(x)$ 的值域是 $[0, 6]$

11. 已知曲线 C 的方程为 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 1 = 0$, 曲线 C 关于点 $(\frac{1}{2}, m)$ 的对称曲线为 C' , 若以曲线 C' 与两坐标轴的交点为顶点的四边形面积为 $4\sqrt{3}$, 则 m 的值可能为

- A. -1 B. 1 C. -2 D. 0

12. 如图所示, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1 = A_1B_1 = 2, AD = 1$, O 是 B_1D_1 的中点, 直线 A_1C 交平面 AB_1D_1 于点 M , 则

- A. A, M, O 三点共线
B. A_1M 的长度为 1
C. 直线 AO 与平面 BCC_1B_1 所成角的正切值为 $\frac{\sqrt{5}}{4}$
D. $\triangle A_1MO$ 的面积为 $\frac{\sqrt{5}}{6}$



三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知双曲线 $C: \frac{y^2}{1-a^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 (0 < a < 1)$ 的一个焦点到直线 $y = ax$ 的距离为 $\frac{4}{5}$, 则 C 的离心率为 _____.

14. 已知 α 为锐角, 且 $\cos(\alpha + \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{3}$, 则 $\cos \alpha =$ _____.

15. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q (q > 0)$, 前 n 项和为 S_n , 且满足 $a_1 = q, a_5 = a_1 + S_4$. 若对一切正整数 n , 不等式 $13 - 2n - 2m + ma_n > mS_n$ 恒成立, 则实数 m 的取值范围为 _____.

16. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, $BC = 4, \sin B + \sin C = 2\sin A$, 则中线 AD 的取值范围是 _____.

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 10 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_n + S_n = 1$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

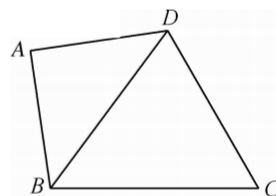
(2) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = 12 + \log_2 a_n$, 设 $T_n = |b_1| + |b_2| + \dots + |b_n|$, 求 T_n .

18. (本小题满分 12 分)

如图, 在四边形 $ABCD$ 中, 已知 $AB = AD = 4, BC = 6$.

(1) 若 $A = \frac{2\pi}{3}, C = \frac{\pi}{3}$, 求 $\cos \angle BDC$ 的值;

(2) 若 $CD = 2$, 四边形 $ABCD$ 的面积为 4, 求 $\cos(A + C)$ 的值.

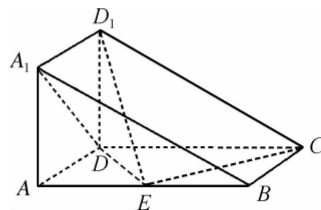


19. (本小题满分 12 分)

如图所示, 正方形 AA_1D_1D 与矩形 $ABCD$ 所在平面互相垂直, $AB = 2AD = 2$, E 为线段 AB 上一点.

(1) 求证: $D_1E \perp A_1D$;

(2) 在线段 AB 上是否存在点 E , 使二面角 $D_1 - EC - D$ 的大小为 $\frac{\pi}{6}$? 若存在, 求出 AE 的长; 若不存在, 说明理由.



20. (本小题满分 12 分)

现有甲、乙两名运动员争夺某项比赛的奖金,规定两名运动员谁先赢 $k(k>1, k \in \mathbf{N}^*)$ 局,谁便赢得全部奖金 a 元. 假设每局甲赢的概率为 $p(0<p<1)$,乙赢的概率为 $1-p$,且每场比赛相互独立. 在甲赢了 $m(m<k)$ 局,乙赢了 $n(n<k)$ 局时,比赛意外终止,奖金如何分配才合理? 评委会给出的方案是:甲、乙按照比赛再继续进行下去各自赢得全部奖金的概率之比 $P_{\text{甲}} : P_{\text{乙}}$ 分配奖金.

(1)若 $k=3, m=2, n=1, p=\frac{3}{4}$,求 $P_{\text{甲}} : P_{\text{乙}}$;

(2)记事件 A 为“比赛继续进行下去乙赢得全部奖金”,试求当 $k=4, m=2, n=2$ 时比赛继续进行下去甲赢得全部奖金的概率 $f(p)$,并判断当 $\frac{6}{7} \leq p < 1$ 时,事件 A 是否为小概率事件,并说明理由. 规定:若随机事件发生的概率小于 0.06,则称该随机事件为小概率事件.

21. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(a>b>0)$ 过点 $(1, \frac{\sqrt{6}}{2})$, 直线 $l: y=x+t$ 与 C 交于 M, N 两点,且线段 MN 的中点为 H, O 为坐标原点,直线 OH 的斜率为 $-\frac{1}{2}$.

(1)求 C 的标准方程;

(2)已知直线 $y=kx+2$ 与 C 有两个不同的交点 A, B, P 为 x 轴上一点,是否存在实数 k ,使得 $\triangle PAB$ 是以点 P 为直角顶点的等腰直角三角形? 若存在,求出 k 的值及点 P 的坐标;若不存在,请说明理由.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = ax^2 + (a-2)x - \ln x (a \in \mathbf{R})$.

(1)讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2)若 $f(x)$ 有两个零点 x_1, x_2 ,证明: $x_1 + x_2 > \frac{2}{a}$.

2023 届新高考高三核心模拟卷(中)

数学(二)参考答案

1. C $\because (1+2ai)i = -2a+i = 1-bi, \therefore a = -\frac{1}{2}, b = -1, \therefore |1+a+bi| = \left| \frac{1}{2}-i \right| = \frac{\sqrt{5}}{2}$. 故选 C.
2. B 由集合 $A = \{x|x < 2 \text{ 或 } x \geq 4\}$, 得 $\complement_{\mathbf{R}}A = \{x|2 \leq x < 4\}$, 又集合 $B = \{x|a \leq x \leq a+1\}$ 且 $(\complement_{\mathbf{R}}A) \cap B = \emptyset$, 则 $a+1 < 2$ 或 $a \geq 4$, 即 $a < 1$ 或 $a \geq 4$. 故选 B.
3. B 因为函数图象过定点 $A(1, 2)$, 将它代入抛物线方程得 $p = 2$, 所以其准线方程为 $x = -1$. 故选 B.
4. D 由题意 $a \cdot b = |a| \cdot |b| \cos \frac{2\pi}{3} = 1 \times 2 \times \cos \frac{2\pi}{3} = -1$, 又由 $c = 2a - b$, 所以 $|c| = \sqrt{(2a-b)^2} = \sqrt{4a^2 - 4a \cdot b + b^2} = \sqrt{4+4+4} = 2\sqrt{3}$, 所以 $c \cdot b = (2a-b) \cdot b = 2a \cdot b - b^2 = -2-4 = -6$, 设向量 c 与 b 的夹角为 θ , 其中 $\theta \in [0, \pi]$, 则 $\cos \theta = \frac{c \cdot b}{|c| \cdot |b|} = \frac{-6}{2\sqrt{3} \times 2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, 可得 $\theta = \frac{5\pi}{6}$. 故选 D.
5. A 因为 $y = ae^{bx}$, 令 $z = \ln y$, 则 z 与 x 的回归方程为 $z = bx + \ln a$. 根据散点图可知 z 与 x 正相关, 所以 $b > 0$, 回归直线的纵截距大于 0, 即 $\ln a > 0$, 所以 $a > 1$. 故选 A.
6. C 展开式中常数项为: $(-1)^6 \cdot C_6^0 \cdot C_6^0 (-2)^2 (-1)^3 + C_6^2 \cdot C_4^2 (-2)^4 = 1 - 240 + 240 = 1$. 故选 C.
7. A 当 $x > 0$ 时, $f(x) = \ln(1+x^2) + x$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 由 $\ln(1+0) + 0 = 0$ 且 $f(x)$ 为奇函数, 得 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增, 易知 $f(1) = \ln 2 + 1$, 则不等式等价于 $f(2x+1) > f(1)$, 所以 $2x+1 > 1$, 解得 $x > 0$. 故选 A.
8. A 设三棱锥 $A-BCD$ 的表面积为 S , 则 $S = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle BCD} + S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ACD} = 2 \times \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} \times \sin 60^\circ + 2 \times \frac{1}{2} \times BA \times BD \times \sin \angle ABD = 4\sqrt{3} + 8\sin \angle ABD$, 当 $\angle ABD = 90^\circ$, 即 $AB \perp BD$ 时, 表面积最大为 $8 + 4\sqrt{3}$. 过 A 作 BC 的垂线, 垂足为 E , 连接 ED , 设三棱锥 $A-BCD$ 的体积为 V , 则 $V = V_{B-AED} + V_{C-AED} = \frac{1}{3} \times 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = \frac{8}{3}$, 设内切球的半径为 r , 因为 $V = \frac{1}{3}Sr$, 所以 $r = 4 - 2\sqrt{3}$. 故选 A.
9. ABC 因为 $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, 所以 $(a+b)^2 - 4(a+b) - 4 \geq 0$, 解得 $a+b \geq 2\sqrt{2} + 2$ 或 $a+b \leq -2\sqrt{2} + 2$ (舍), 即 $a+b \geq 2\sqrt{2} + 2$ (当且仅当 $a=b=\sqrt{2}+1$ 时取等号), A 正确; $2a+b = 2a + \frac{a+1}{a-1} = 2(a-1) + \frac{2}{a-1} + 3 \geq 2\sqrt{2(a-1) \cdot \frac{2}{a-1}} + 3 = 7$, 当且仅当 $a=2$ 时取等号, B 正确; 因为 $a+b \geq 2\sqrt{ab}$, 所以 $1 \leq ab - 2\sqrt{ab}$, 解得 $ab \geq 3 + 2\sqrt{2}$ (当且仅当 $a=b=\sqrt{2}+1$ 时取等号), C 正确; $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab} = \frac{ab-1}{ab} = 1 - \frac{1}{ab} \geq 1 - \frac{1}{3+2\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} - 2$ (当且仅当 $a=b=\sqrt{2}+1$ 时取等号), D 错误. 故选 ABC.
10. AB 函数 $y=f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 且 $f(-x) = 2\sin^2(-x) - 3\sin|-x| + 1 = 2\sin^2 x - 3\sin|x| + 1 = f(x)$, 所以函数 $y=f(x)$ 是偶函数, A 正确; 当 $x \in (0, \frac{\pi}{4})$ 时, $0 < \sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$, $f(x) = 2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 2\left(\sin x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}$, 令 $t = \sin x$, 由于函数 $y = 2\left(t - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}$ 在 $t \in (0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 时单调递减, 函数 $t = \sin x$ 在 $x \in (0, \frac{\pi}{4})$ 时单调递增, 所以函数 $y=f(x)$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{4})$ 上单调递减, 故函数 $y=f(x)$ 在区间 $(-\frac{\pi}{4}, 0)$ 上单调递增, B 正确; 当 $x \in [0, \pi]$ 时, 由 $f(x) = 2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$, 得 $\sin x = \frac{1}{2}$ 或 $\sin x = 1$, 所以 $x = \frac{\pi}{6}$ 或 $x = \frac{\pi}{2}$ 或 $x = \frac{5\pi}{6}$, 所以偶函数 $y=f(x)$ 在

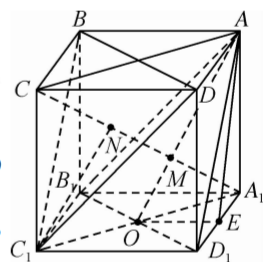
$[-\pi, \pi]$ 上有6个零点, C不正确; 当 $x \in [0, +\infty)$ 时, $f(x) = 2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 2 \left(\sin x - \frac{3}{4} \right)^2 - \frac{1}{8}$, 因为 $-1 \leq \sin x \leq 1$, 所以当 $\sin x = \frac{3}{4}$ 时, $f(x)_{\min} = -\frac{1}{8}$, 当 $\sin x = -1$ 时, $f(x)_{\max} = 6$, 由于函数 $y = f(x)$ 是偶函数, 因此, 函数 $y = f(x)$ 的值域为 $[-\frac{1}{8}, 6]$, D不正确. 故选 AB.

11. CD 根据已知得曲线 C 的方程为 $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 6$, 设曲线 C' 上任意一点坐标为 $P(x, y)$, 它关于点 $(\frac{1}{2}, m)$ 的对称点坐标为 $P'(x_0, y_0)$, 则 $(x_0-1)^2 + (y_0+2)^2 = 6$, 依据中点坐标公式得到

$$\begin{cases} \frac{x_0+x}{2} = \frac{1}{2}, \\ \frac{y_0+y}{2} = m, \end{cases} \quad \text{则} \begin{cases} x_0 = 1-x, \\ y_0 = 2m-y, \end{cases} \quad \text{代入得到 C'}$$

的方程为 $x^2 + (y-2m-2)^2 = 6$, 因为曲线 C' 与坐标轴围成的四边形面积为 $4\sqrt{3}$, 所以 $\frac{1}{2} \times 2\sqrt{6} \times 2\sqrt{6-(2m+2)^2} = 4\sqrt{3}$, 解得 $m=0$ 或 $m=-2$. 故选 CD.

12. ABD 连结 A_1C_1, AC , 则 $A_1C_1 \parallel AC$, $\therefore A_1, C_1, A, C$ 四点共面, $\therefore A_1C \subset$ 平面 ACC_1A_1 , $\therefore M \in A_1C$, $\therefore M \in$ 平面 ACC_1A_1 , 又 $M \in$ 平面 AB_1D_1 , $\therefore M$ 在平面 ACC_1A_1 与平面 AB_1D_1 的交线上, 同理 A, O 也在平面 ACC_1A_1 与平面 AB_1D_1 的交线上. $\therefore A, M, O$ 三点共线, 故 A 正确; 设直线 A_1C 与平面 BC_1D 的交点为 N , 易证平面 $AB_1D_1 \parallel$ 平面 C_1BD , 从而 $OM \parallel C_1N$, 因为 O 为 A_1C_1 中点, 所以 M 为 A_1N 中点, 同理可得 N 为 CM 的中点, 所以 $A_1M = \frac{1}{3}A_1C = 1$, 故 B



正确; 取 A_1D_1 中点 E , 连接 AE, OE , 因为平面 $ADD_1A_1 \parallel$ 平面 BCC_1B_1 , 则 $\angle OAE$ 即为直线 AO 与平面 BCC_1B_1 所成角, $\tan \angle OAE = \frac{OE}{AE} = \frac{2\sqrt{17}}{17}$, 故 C 错误; 因为 $A_1O = \frac{1}{2}A_1C_1, A_1M = \frac{1}{3}A_1C$, 所以 $S_{\triangle A_1OM} = \frac{1}{6}S_{\triangle A_1C_1} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2}A_1C_1 \cdot CC_1 = \frac{\sqrt{5}}{6}$, 故 D 正确. 故选 ABD.

13. $\frac{4\sqrt{7}}{7}$ 由已知得, 双曲线的焦点在 y 轴上, 且焦点坐标为 $(0, \pm 1)$, 不妨取 $(0, 1)$, 它到直线 $y = ax$ 的距离为 $\frac{1}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{4}{5}$, 解得 $a = \frac{3}{4}$, 所以双曲线 C 的离心率为 $\frac{1}{\sqrt{1-a^2}} = \frac{4\sqrt{7}}{7}$.

14. $\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{6}$ 因为 α 为锐角, 且 $\cos(\alpha + \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{3}$, 所以 $\sin(\alpha + \frac{\pi}{6}) = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha + \frac{\pi}{6})} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, 所以 $\cos \alpha = \cos[(\alpha + \frac{\pi}{6}) - \frac{\pi}{6}] = \cos(\alpha + \frac{\pi}{6})\cos \frac{\pi}{6} + \sin(\alpha + \frac{\pi}{6})\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{6}$.

15. $m < -\frac{3}{256}$ 若 $q=1$, 则 $a_1=q=1$, 即 $a_n=1$, 此时 $a_5 \neq a_1 + S_4$, 与题意不符, 舍去; 若 $q \neq 1$, 由 $a_5 = a_1 + S_4$, 可得 $a_1q^4 = a_1 + \frac{a_1(1-q^4)}{1-q}$, 即 $a_1(1-q^4) + \frac{a_1(1-q^4)}{1-q} = 0, a_1(1-q^4)(1 + \frac{1}{1-q}) = 0$, 解得 $q = a_1 = 2$, 则 $a_n = 2^n, S_n = 2(2^n - 1)$. 对一切正整数 n , 不等式 $13 - 2n - 2m + m \cdot 2^n > 2m(2^n - 1)$ 恒成立, 化简得 $13 - 2n > m \cdot 2^n$, 分离可得 $m < \frac{13-2n}{2^n}$, 设 $f(n) = \frac{13-2n}{2^n}$, 则 $f(n+1) = \frac{11-2n}{2^{n+1}}, f(n+1) - f(n) = \frac{2n-15}{2^{n+1}}$, 当 $1 \leq n \leq 7$ 时, $f(n+1) < f(n)$, 即 $f(8) < f(7) < \dots < f(1)$; 当 $n \geq 8$ 时, $f(n+1) > f(n)$, 即 $f(8) < f(9) < \dots$, 所以 $f(n)$ 的最小值为 $f(8) = -\frac{3}{256}$. 故答案为 $m < -\frac{3}{256}$.

16. $[2\sqrt{3}, \sqrt{13})$ 设 $AB=c, AC=b, BC=a=4$, 对 $\sin B + \sin C = 2\sin A$ 运用正弦定理, 得到 $b+c=2a=8$, 所以 $c=8-b$, 因为该三角形为锐角三角形, 所以 $\begin{cases} b^2 + c^2 = b^2 + (8-b)^2 > 16, \\ c^2 + 16 = (8-b)^2 + 16 > b^2, \text{解得 } 3 < b < 5. \text{ 又 } bc = b(8-b) = -b^2 + 8b = -(b-4)^2 \\ b^2 + 16 > c^2 = (8-b)^2, \end{cases}$

+16, 得到 $15 < bc \leq 16$, 运用向量得到 $\vec{AD} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC})$, 所以 $|\vec{AD}| = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + AC^2 + 2|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}| \cdot \cos \theta}$
 $= \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + c^2 + 2bc \cdot \frac{b^2 + c^2 - 16}{2bc}} = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - 16} = \frac{1}{2}\sqrt{112 - 4bc}$, 结合 bc 的范围, 代入, 得到 $|\vec{AD}|$ 的范围
 为 $[2\sqrt{3}, \sqrt{13}]$.

17. 解: (1) 由 $a_n + S_n = 1$, 得 $a_{n+1} + S_{n+1} = 1$,

两式相减, 得 $a_{n+1} - a_n + S_{n+1} - S_n = 0$,

所以 $2a_{n+1} = a_n$, 即 $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$ 2分

又因为 $n=1$ 时, $a_1 + S_1 = 1$, 所以 $a_1 = \frac{1}{2}$ 3分

因为 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}$,

所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为 $\frac{1}{2}$, 公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列.

所以 $a_n = a_1 q^{n-1} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ 5分

(2) 由(1)得 $b_n = 12 + \log_2 \left(\frac{1}{2}\right)^n = 12 - n$ 6分

当 $n \leq 12$ 时, $T_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n = \frac{n(b_1 + b_n)}{2} = \frac{-n^2 + 23n}{2}$ 7分

当 $n \geq 13$ 时, $T_n = b_1 + b_2 + \dots + b_{12} - (b_{13} + b_{14} + \dots + b_n) = 2(b_1 + b_2 + \dots + b_{12}) - (b_1 + b_2 + \dots + b_n) = 2 \times \frac{12(b_1 + b_{12})}{2} -$

$\frac{n(b_1 + b_n)}{2} = \frac{n^2 - 23n + 264}{2}$ 9分

综上所述, $T_n = \begin{cases} \frac{-n^2 + 23n}{2}, & n \leq 12, \\ \frac{n^2 - 23n + 264}{2}, & n \geq 13. \end{cases}$ 10分

18. 解: (1) 在 $\triangle ABD$ 中, $\because AB = AD = 4, A = \frac{2\pi}{3}$

$\therefore BD = 2AD \cos \angle ADB = 2 \times 4 \times \cos \frac{\pi}{6} = 4\sqrt{3}$ 2分

在 $\triangle BCD$ 中, 由正弦定理得 $\frac{BC}{\sin \angle BDC} = \frac{BD}{\sin C}$,

$\therefore \sin \angle BDC = \frac{BC \sin C}{BD} = \frac{6 \times \sin \frac{\pi}{3}}{4\sqrt{3}} = \frac{3}{4}$ 4分

$\because BC < BD, \therefore 0 < \angle BDC < \frac{\pi}{3}, \therefore \cos \angle BDC = \sqrt{1 - \sin^2 \angle BDC} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{4}$ 6分

(2) 在 $\triangle ABD$ 中, 由余弦定理得 $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos A = 4^2 + 4^2 - 2 \times 4 \times 4 \times \cos A = 32 - 32 \cos A$,

在 $\triangle CBD$ 中, 由余弦定理得 $BD^2 = CB^2 + CD^2 - 2CB \cdot CD \cos C = 6^2 + 2^2 - 2 \times 6 \times 2 \times \cos C = 40 - 24 \cos C$,

从而 $4 \cos A - 3 \cos C = -1$. ① 8分

由 $S_{\triangle ABD} + S_{\triangle CBD} = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 \times \sin A + \frac{1}{2} \times 6 \times 2 \times \sin C = 4$ 得,

$4 \sin A + 3 \sin C = 2$. ② 10分

①² + ②² 得, $16(\sin^2 A + \cos^2 A) + 9(\sin^2 C + \cos^2 C) - 24(\cos A \cos C - \sin A \sin C) = 5$,

$\therefore \cos(A+C) = \frac{5}{6}$ 12分

19. (1)证明:连结 AD_1 交 A_1D 于 F , 连接 D_1B ,

因为四边形 AA_1D_1D 为正方形, 所以 $AD_1 \perp A_1D$, 1分

因为正方形 AA_1D_1D 与矩形 $ABCD$ 所在平面互相垂直, 交线为 AD , $AB \perp AD$, $AB \subset$ 平面 $ABCD$,

所以 $AB \perp$ 平面 AA_1D_1D , 3分

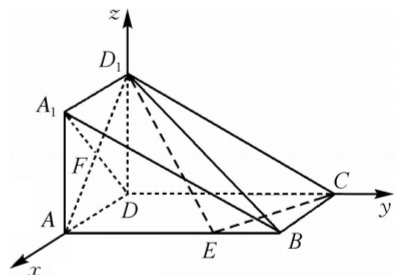
又 $A_1D \subset$ 平面 AA_1D_1D , 所以 $AB \perp A_1D$, 4分

又 $AD_1 \cap AB = A$, $AD_1, AB \subset$ 平面 AD_1B , 所以 $A_1D \perp$ 平面 AD_1B , 5分

又 $D_1E \subset$ 平面 AD_1B , 所以 $A_1D \perp D_1E$ 6分

(2)解: 存在满足条件的点 E , $AE = 2 - \frac{\sqrt{3}}{3}$ 7分

解法一: 依题意, 以 D 为坐标原点, DA, DC, DD_1 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴建立空间直角坐标系, 因为 $AB = 2AD = 2$, 则 $D(0, 0, 0), C(0, 2, 0), D_1(0, 0, 1), A_1(1, 0, 1)$,



所以 $\overrightarrow{DD_1} = (0, 0, 1), \overrightarrow{D_1C} = (0, 2, -1)$ 8分

易知 $\overrightarrow{DD_1}$ 为平面 ECD 的法向量,

设 $E(1, a, 0) (0 \leq a \leq 2)$, 所以 $\overrightarrow{EC} = (-1, 2-a, 0)$.

设平面 D_1EC 的法向量 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 所以 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{D_1C} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{EC} = 0, \end{cases}$

即 $\begin{cases} (x, y, z) \cdot (0, 2, -1) = 0, \\ (x, y, z) \cdot (-1, 2-a, 0) = 0, \end{cases}$ 所以 $\begin{cases} z = 2y, \\ x = (2-a)y, \end{cases}$ 取 $y = 1$,

则 $\mathbf{n} = (2-a, 1, 2)$, 9分

又二面角 $D_1 - EC - D$ 的大小为 $\frac{\pi}{6}$, 所以 $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{|\overrightarrow{DD_1} \cdot \mathbf{n}|}{|\overrightarrow{DD_1}| |\mathbf{n}|} = \frac{|(0, 0, 1) \cdot (2-a, 1, 2)|}{\sqrt{1^2} \cdot \sqrt{(2-a)^2 + 1 + 2^2}}$,

即 $3a^2 - 12a + 11 = 0$, 解得 $a = 2 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ 11分

又因为 $0 \leq a \leq 2$, 所以 $a = 2 - \frac{\sqrt{3}}{3}$, 即 $AE = 2 - \frac{\sqrt{3}}{3}$ 12分

解法二: 假设存在满足条件的点 E , 过点 D 作 $DN \perp CE$ 于点 N , 连结 D_1N , 则 $D_1N \perp CE$, 所以 $\angle D_1ND$ 为二面角 $D_1 - CE - D$ 的平面角,

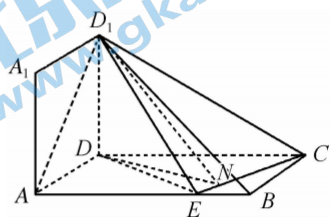
所以 $\angle D_1ND = \frac{\pi}{6}$ 9分

在 $\text{Rt}\triangle D_1ND$ 中, $D_1D = 1$ 所以 $DN = \sqrt{3}$, 10分

又在 $\text{Rt}\triangle DNC$ 中, $CD = AB = 2$,

所以 $\angle NDC = \frac{\pi}{6}$, 所以 $\angle ECB = \frac{\pi}{6}$, 11分

在 $\text{Rt}\triangle ECB$ 中, $BE = BC \cdot \tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 所以 $AE = 2 - \frac{\sqrt{3}}{3}$ 12分



20. 解: (1) 设比赛再继续进行 X 局甲赢得全部奖金, 则 $X = 1, 2$ 1分

$P(X=1) = \frac{3}{4}, P(X=2) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{16}$, 故 $P_{\text{甲}} = \frac{3}{4} + \frac{3}{16} = \frac{15}{16}$, 3分

从而 $P_{\text{甲}} : P_{\text{乙}} = 15 : 1$ 4分

(2) 设比赛继续进行 Y 局甲赢得全部奖金, 则 $Y = 2, 3$ 5分

$P(Y=2) = p^2, P(Y=3) = C_2^1 p^2 (1-p) = 2p^2 (1-p)$,

故 $P_{\text{甲}} = p^2 + 2p^2 (1-p) = 3p^2 - 2p^3$, 即 $f(p) = 3p^2 - 2p^3$, 8分

则 $f'(p) = 6p(1-p)$, 当 $\frac{6}{7} \leq p < 1$ 时, $f'(p) > 0$,

因此 $f(p)$ 在 $[\frac{6}{7}, 1)$ 上单调递增, 从而 $f(p) \geq f(\frac{6}{7}) = \frac{324}{343}$, 10分

所以 $P(A) = 1 - f(p) \leq \frac{19}{343} \approx 0.055 < 0.06$, 故事件 A 是小概率事件. 12分

21. 解: (1) 设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 则 $H(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$, 直线 OH 的斜率 $k_{OH} = \frac{y_1+y_2}{x_1+x_2} = -\frac{1}{2}$ 1分

因为 M, N 在椭圆 C 上, 所以 $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1, \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1$,

两式相减得 $\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{a^2} + \frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{b^2} = 0$, 即 $\frac{1}{a^2} + \frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{b^2(x_1+x_2)(x_1-x_2)} = 0$, 3分

又 $k_{MN} = \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} = 1$, 所以 $\frac{1}{a^2} - \frac{1}{2b^2} = 0$, 即 $a^2 = 2b^2$ 4分

又因为椭圆 C 过点 $(1, \frac{\sqrt{6}}{2})$, 所以 $\frac{1}{a^2} + \frac{3}{2b^2} = 1$, 解得 $a^2 = 4, b^2 = 2$,

所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ 5分

(2) 联立 $\begin{cases} y = kx + 2, \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 \end{cases}$ 消 y 整理得: $(2k^2+1)x^2 + 8kx + 4 = 0$.

因为直线与椭圆交于 A, B 两点, 故 $\Delta > 0$, 解得 $k^2 > \frac{1}{2}$ 6分

设 $A(x_3, y_3), B(x_4, y_4)$, 则 $x_3+x_4 = \frac{-8k}{2k^2+1}, x_3x_4 = \frac{4}{2k^2+1}$.

设 AB 中点 $G(x_0, y_0)$, 则 $x_0 = \frac{x_3+x_4}{2} = \frac{-4k}{2k^2+1}, y_0 = kx_0 + 2 = \frac{2}{2k^2+1}$, 故 $G(\frac{-4k}{2k^2+1}, \frac{2}{2k^2+1})$ 7分

假设存在 k 和点 $P(m, 0)$, 使得 $\triangle PAB$ 是以 P 为直角顶点的等腰直角三角形, 则 $PG \perp AB$, 故 $k_{PG} \cdot k_{AB} = -1$,

所以 $\frac{\frac{2}{2k^2+1}}{\frac{-4k}{2k^2+1} - m} \times k = -1$, 解得 $m = \frac{-2k}{2k^2+1}$, 故 $P(\frac{-2k}{2k^2+1}, 0)$ 8分

又因为 $\angle APB = \frac{\pi}{2}$, 所以 $\vec{PA} \cdot \vec{PB} = 0$,

所以 $(x_3 - m, y_3) \cdot (x_4 - m, y_4) = 0$, 即 $(x_3 - m)(x_4 - m) + y_3y_4 = 0$,

整理得 $(k^2+1)x_3x_4 + (2k-m)(x_3+x_4) + m^2 + 4 = 0$.

所以 $(k^2+1) \cdot \frac{4}{2k^2+1} - (2k-m) \cdot \frac{8k}{2k^2+1} + m^2 + 4 = 0$, 10分

代入 $m = \frac{-2k}{2k^2+1}$, 整理得 $k^4 = 1$, 即 $k^2 = 1$, 所以 $k = 1$ 或 $k = -1$.

即存在 k 使得 $\triangle PAB$ 是以 P 为顶点的等腰直角三角形. 11分

当 $k = -1$ 时, P 点坐标为 $(\frac{2}{3}, 0)$; 当 $k = 1$ 时, P 点坐标为 $(-\frac{2}{3}, 0)$.

此时, $\triangle PAB$ 是以 P 为直角顶点的等腰直角三角形. 12分

22. (1) 解: 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = 2ax + a - 2 - \frac{1}{x} = \frac{(ax-1)(2x+1)}{x}$, 1分

$a \leq 0$ 时, $f'(x) < 0$ 恒成立, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减; 2分

$a > 0$ 时, 令 $f'(x) = 0$ 得 $x = \frac{1}{a}$,

当 $x \in (0, \frac{1}{a})$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x \in (\frac{1}{a}, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{a})$ 上单调递减, 在 $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 上单调递增. 3分

(2) 证明: $a \leq 0$ 时, 由(1)知 $f(x)$ 至多有一个零点. 4分

$a > 0$ 时, 由(1)知当 $x = \frac{1}{a}$ 时, $f(x)$ 取得最小值, 最小值为 $f(\frac{1}{a}) = 1 - \frac{1}{a} + \ln a$.

① 当 $a = 1$ 时, 由于 $f(\frac{1}{a}) = 0$, 故 $f(x)$ 只有一个零点;

② 当 $a > 1$ 时, $1 - \frac{1}{a} + \ln a > 0$ 即 $f(\frac{1}{a}) > 0$, 故 $f(x)$ 没有零点; 5分

③ 当 $0 < a < 1$ 时, $1 - \frac{1}{a} + \ln a < 0$ 即 $f(\frac{1}{a}) < 0$,

$$\text{又 } f(\frac{1}{e}) = a(\frac{1}{e})^2 + (a-2)(\frac{1}{e}) - \ln \frac{1}{e} = \frac{a}{e^2} + \frac{a}{e} + 1 - \frac{2}{e} > 0,$$

由(1)知 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{a})$ 上有一个零点.

$$\text{又 } f(\frac{3}{a}) = a(\frac{3}{a})^2 + (a-2)(\frac{3}{a}) - \ln \frac{3}{a} = 3 + \frac{3}{a} - \ln \frac{3}{a} > 4 > 0,$$

由(1)知 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 有一个零点,

所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个零点, a 的取值范围为 $(0, 1)$ 7分

不妨设 $x_1 < x_2$, 则 $\frac{1}{e} < x_1 < \frac{1}{a} < x_2 < \frac{3}{a}$, 且 $\frac{2}{a} - x_1 > \frac{1}{a}$,

$$\text{令 } F(x) = f(x) - f(\frac{2}{a} - x)$$

$$= ax^2 + (a-2)x - \ln x - [a(\frac{2}{a} - x)^2 + (a-2)(\frac{2}{a} - x) - \ln(\frac{2}{a} - x)]$$

$$= 2ax - \ln x + \ln(\frac{2}{a} - x) - 2, x \in (0, \frac{2}{a}),$$

$$\text{则 } F'(x) = 2a - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\frac{2}{a} - x} \right),$$

$$\text{由于 } \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\frac{2}{a} - x} \right) = \frac{a}{2} \left(x + \frac{2}{a} - x \right) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\frac{2}{a} - x} \right) = \frac{a}{2} \left(2 + \frac{\frac{2}{a} - x}{x} + \frac{x}{\frac{2}{a} - x} \right) \geq \frac{a}{2} \left(2 + 2\sqrt{\frac{\frac{2}{a} - x}{x} \cdot \frac{x}{\frac{2}{a} - x}} \right) = 2a$$

(且仅当 $x = \frac{1}{a}$ 等号成立), 9分

所以当 $x \in (0, \frac{2}{a})$ 时, $F'(x) \leq 0$, $F(x)$ 在 $(0, \frac{2}{a})$ 单调递减, 又 $F(\frac{1}{a}) = 0$,

所以 $F(x_1) > F(\frac{1}{a}) = 0$, 即 $F(x_1) = f(x_1) - f(\frac{2}{a} - x_1) > 0$, 10分

又 $f(x_1) = f(x_2)$, 所以 $f(x_2) > f(\frac{2}{a} - x_1)$,

又由于 $x_2 > \frac{1}{a}$, $\frac{2}{a} - x_1 > \frac{1}{a}$, 且 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $x_2 > \frac{2}{a} - x_1$ 即 $x_1 + x_2 > \frac{2}{a}$ 12分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯