

2021 北京 101 中高一（下）期末

数 学

一、选择题共 10 小题，在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知 $z = 2 - i$ ，则 $z + \bar{z} + i =$ ()

- (A) $2 - 2i$ (B) $4 - i$ (C) $2 + 2i$ (D) $4 + i$

2. 下列区间中，函数 $f(x) = 7 \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ 单调递增的区间是 ()

- (A) $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ (B) $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ (C) $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ (D) $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$

3. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $a = \sqrt{2}$, $b = 2$, $B = 45^\circ$ ，则 $A =$ ()

- (A) 30° 或 60° (B) 30° (C) 60° 或 120° (D) 150°

4. 设平面 α 与平面 β 相交于直线 m ，直线 a 在平面 α 内，直线 b 在平面 β 内，且 $b \perp m$ ，“ $\alpha \perp \beta$ ”是“ $a \perp b$ ”的 ()

- (A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

5. 在 $\triangle ABC$ 中， $C = 90^\circ$ ， $AC = 4$ ， $BC = 3$ ，点 P 是 AB 的中点，则 $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CP} =$ ()

- (A) $\frac{9}{4}$ (B) 4 (C) $\frac{9}{2}$ (D) 6

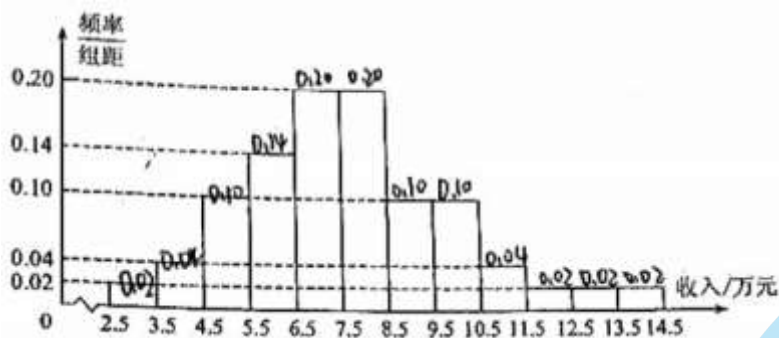
6. 已知 α, β 是两个不同的平面， m, n 是两条不同的直线，下列命题中错误的是 ()

- (A) 若 $m \perp \alpha, n \parallel m, n \subset \beta$ ，则 $\alpha \perp \beta$ (B) 若 $m \subset \alpha, \alpha \parallel \beta, n \subset \beta$ ，则 $n \parallel m$
(C) 若 $m \perp \alpha, \alpha \parallel \beta, n \perp \beta$ ，则 $n \parallel m$ (D) 若 $\beta \perp \alpha, \alpha \cap \beta = n, m \subset \alpha, n \perp m$ ，则 $m \perp \beta$

7. 若 $\tan \theta = -2$ ，则 $\frac{\sin \theta (1 + \sin 2\theta)}{\sin \theta + \cos \theta} =$ ()

- (A) $-\frac{6}{5}$ (B) $-\frac{2}{5}$ (C) $\frac{2}{5}$ (D) $\frac{5}{6}$

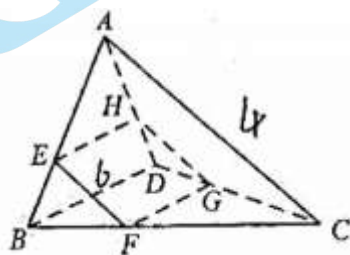
8. 为了解某地农村经济情况，对该地农户家庭年收入进行抽样调查，将农户家庭年收入的调查数据整理得到如下频率分布直方图：



根据此频率分布直方图，下面结论中不正确的是（ ）

- (A) 该地农户家庭年收入低于 4.5 万元的农户比率估计为 6%
- (B) 该地农户家庭年收入不低于 10.5 万元的农户比率估计为 10%
- (C) 估计该地农户家庭年收入的平均值不超过 6.5 万元
- (D) 估计该地有一半以上的农户，其家庭年收入介于 4.5 万元至 8.5 万元之间

9.如图，在空间四边形 $ABCD$ 中，两条对角线 AC ， BD 互相垂直，且长度分别为 4 和 6，平行于这两条对角线的平面与边 AB ， BC ， CD ， DA 分别相交于点 E ， F ， G ， H ，记四边形 $EFGH$ 的面积为 y ，设 $\frac{BE}{AB} = x$ ，则（ ）



- (A) 函数 $y=f(x)$ 的值域为 $(0,4]$
- (B) 函数 $y=f(x)$ 的最大值为 8
- (C) 函数 $y=f(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{3}\right)$ 上单调递增
- (D) 函数 $y=f(x)$ 满足 $f(x) = f\left(\frac{2}{3}-x\right)$

10.有 6 个相同的球，分别标有数字 1，2，3，4，5，6，从中有放回的随机取两次，每次取 1 个球，甲表示事件“第一次取出的球的数字是 1”，乙表示事件“第二次取出的球的数字是 2”，丙表示事件“两次取出的球的数字之和是 8”，丁表示事件“两次取出的球的数字之和是 7”，则（ ）

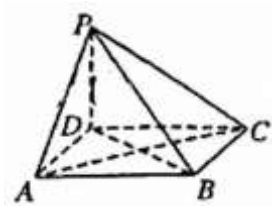
- (A) 甲与丙相互独立
- (B) 甲与丁相互独立
- (C) 乙与丙相互独立
- (D) 丙与丁相互独立

二、填空题共 6 小题

11.设 $a \in \mathbb{R}$ ，若复数 $(1+i)(a+i)$ 在复平面内对应的点位于实轴上，则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

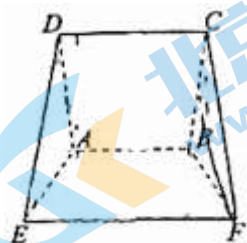
12.若 A 为 $\triangle ABC$ 的内角，且 $\sin 2A = -\frac{3}{5}$ ，则 $\cos\left(A + \frac{\pi}{4}\right)$ 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

- 13.如图,已知 PD 垂直于正方形 $ABCD$ 所在的平面,连接 PB, PC, PA, AC, BD , 则一定互相垂直的平面有对.



- 14.已知不等式 $\sqrt{2} \sin \frac{x}{4} \cos \frac{x}{4} + \sqrt{6} \cos^2 \frac{x}{4} - \frac{\sqrt{6}}{2} - m \geq 0$ 对于 $x \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$ 恒成立, 则实数 m 的取值范围是_____.

- 15.中国古代数学名著《九章算术》中记载:“今有羡除”. 刘徽注:“羡除, 隧道也. 其所穿地, 上平下邪.” 现有一个羡除如图所示, 四边形 $ABCD, ABFE, CDEF$ 均为等腰梯形, $AB \parallel CD \parallel EF$, $AB=6, CD=8, EF=10$, EF 到平面 $ABCD$ 的距离为 3, CD 与 AB 间的距离为 10, 则这个羡除的体积是_____.



- 16.已知函数 $f(x) = |\sin x| \cos x$, 给出下列五个结论:

- ① $f\left(\frac{2021\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}$; ② 若 $|f(x_1)| = |f(x_2)|$, 则 $x_1 = x_2 + k\pi (k \in \mathbb{Z})$;
- ③ $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递增; ④ 函数 $f(x)$ 的周期为 π ;
- ⑤ $f(x)$ 的图像关于点 $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 成中心对称.

其中正确的结论的序号是_____.

三、解答题共 4 小题. 解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

- 17.在 $\triangle ABC$ 中, $c=2, C=30^\circ$ 再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知, 使其能够确定唯一的三角形, 求:

- (1) a 的值;
- (2) $\triangle ABC$ 的面积.

条件①: $2b = \sqrt{3}a$; 条件②: $b = 2\sqrt{3}$; 条件③: $A = 45^\circ$.

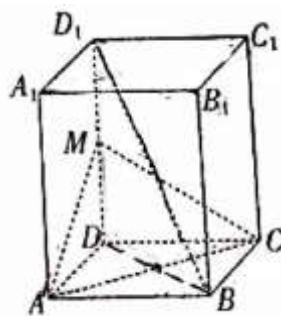
18.为迎接 2022 年北京冬季奥运会，普及冬奥知识，某地区小学联合开展了“冰雪答题王”冬奥知识竞赛活动．现从参加该活动的学生中随机抽取了 30 名学生，将他们的竞赛成绩（单位：分）用茎叶图记录如下：

男						女				
					5	8				
		8	0		6	6	9			
		9	8	5	7	0	5	6	6	8
8	7	6	4	1	8	6	6			
8	6	2	2	1	9	5	8	8		

- (1) 从该地区参加该活动的男生中随机抽取 1 人，估计该男生的竞赛成绩在 90 分以上的概率；
- (2) 从该地区参加该活动的全体男生中随机抽取 2 人，全体女生中随机抽取 2 人，估计这 4 人中男生竞赛成绩在 90 分以上的人数比女生竞赛成绩在 90 分以上的人数多的概率；
- (3) 为便于普及冬奥知识，现从该地区某所小学参加冬奥知识竞赛活动的学生中随机选取 10 名男生、10 名女生作为冬奥宣传志愿者，记这 10 名男生竞赛成绩的平均数为 μ_1 ，这 10 名女生竞赛成绩的平均数为 μ_2 ，能否认为 $\mu_1 > \mu_2$ ，说明理由．

19.已知正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， M 是 DD_1 的中点．

- (1) 求证： $BD_1 \parallel$ 平面 AMC ；
- (2) 求证： $AC \perp BD_1$ ；
- (3) 在线段 BB_1 上是否存在点 P ，当 $\frac{BP}{BB_1} = \lambda$ 时，平面 $A_1PC_1 \parallel$ 平面 AMC ？若存在，求出 λ 的值并证明；若不存在，请说明理由．



20.对 $n \in \mathbb{N}^*$ ，定义 $a_n(x) = \frac{1}{n}(\sin^2 x - \cos nx)$ ．

- (1) 求 $a_2(x) - a_1(x)$ 的最小值；
- (2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ，有 $a_n(x) \geq A$ 恒成立，求 A 的最大值；
- (3) 求证：不存在 $m, n \in \mathbb{N}^*$ ，且 $m > n$ ，使得 $a_m(x) - a_n(x)$ 为恒定常数．