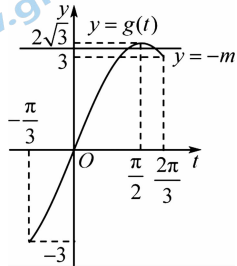


1. C 根据复数的乘法与除法运算,化简即可求得复数 z . 结合共轭复数的定义即可得 \bar{z} . 将式子 $(1+i)^2 z = 2-4i$ 化简可得, $z = \frac{2-4i}{(1+i)^2} = \frac{2-4i}{2i} = -2-i$, 根据共轭复数定义可知 $\bar{z} = -2+i$, z 的共轭复数虚部为 1, 故选 C.
2. C 集合 A 中元素满足 $x = 2n+3, n \in \mathbf{N}$, 即该数为大于 1 的奇数, 而集合 B 中大于 1 的奇数只有 3 和 9. 所以真子集有 3 个, 故选 C.
3. C 根据题意, 有一个项目中分配 2 名志愿者, 其余各项目中分配 1 名志愿者, 可以先从 5 名志愿者中任选 2 人, 组成一个小组, 有 C_5^2 种选法; 然后连同其余三人, 看成四个元素, 四个项目看成四个不同的位置, 四个不同的元素在四个不同的位置的排列方法数有 $4!$ 种, 根据乘法原理, 完成这件事, 共有 $C_5^2 \times 4! = 240$ 种不同的分配方案. 故选 C.
4. A 令 $g(x) = f(x) - 3 = e^{-x} - e^x + \frac{1}{x}$, 则 $g(-x) = e^x - e^{-x} - \frac{1}{x} = -g(x)$, $\therefore g(x)$ 是定义域上的奇函数, 因此 $g(x)_{\min} + g(x)_{\max} = 0$. $\therefore M + m = 6$. 故选 A.
5. B 根据双曲线的对称性, 不妨设一条渐近线 l 的方程为 $y = \frac{b}{a}x$, 因此直线 MF_2 的倾斜角 α 的正切值为 $\frac{b}{a}$, 即 $\tan \alpha = \frac{b}{a} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \sin \alpha = bk, \cos \alpha = ak (k > 0)$, 所以有 $(bk)^2 + (ak)^2 = 1 \Rightarrow ck = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{c} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{a}{c}$, 设 $|MF_2| = m, |MF_1| = 3m$, 由双曲线定义可知: $|MF_1| - |MF_2| = 2a = 2m \Rightarrow a = m \Rightarrow |MF_2| = a, |MF_1| = 3a$, 由余弦定理可知: $(3a)^2 = a^2 + (2c)^2 - 2a \cdot 2c \cdot \frac{a}{c} \Rightarrow c^2 = 3a^2 \Rightarrow e = \sqrt{3}$. 故选 B.
6. A $f(x) = a \cdot b - m = 3\cos x - \sqrt{3}\sin x - m = -(\sqrt{3}\sin x - 3\cos x) - m = -2\sqrt{3}\sin(x - \frac{\pi}{3}) - m$, 由 $f(x) = 0$ 可得 $-m = 2\sqrt{3}\sin(x - \frac{\pi}{3})$, $\therefore x \in [0, \pi], \therefore -\frac{\pi}{3} \leq x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{2\pi}{3}$, 令 $t = x - \frac{\pi}{3}$, 则 $t \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$, 令 $g(t) = 2\sqrt{3}\sin t$, 其中 $t \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$, 则直线 $y = -m$ 与函数 $g(t)$ 在 $[-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$ 上的图象有两个交点, 且 $g(-\frac{\pi}{3}) = 2\sqrt{3}\sin(-\frac{\pi}{3}) = -3, g(\frac{2\pi}{3}) = 2\sqrt{3}\sin\frac{2\pi}{3} = 3$, 如下图所示: 由图可知, 当 $3 \leq -m < 2\sqrt{3}$ 时, 即当 $-2\sqrt{3} < m \leq -3$ 时, 直线 $y = -m$ 与函数 $g(t)$ 在 $[-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$ 上的图象有两个交点, 此时函数 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上有两个零点, 故实数 m 的取值范围是 $(-2\sqrt{3}, -3]$. 故选 A.
- 
7. A 依题意 $a_1 = 1, x_n > 2, f(x) = x^2 - x - 2, f'(x) = 2x - 1$, 依题意 $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, 即 $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - x_n - 2}{2x_n - 1}$, 则 $x_{n+1} + 1 = x_n - \frac{x_n^2 - x_n - 2}{2x_n - 1} + 1 = \frac{(x_n + 1)^2}{2x_n - 1}$, $x_{n+1} - 2 = x_n - \frac{x_n^2 - x_n - 2}{2x_n - 1} - 2 = \frac{(x_n - 2)^2}{2x_n - 1}$ (由于 $x_n > 2$, 所以 $x_{n+1} \neq 2$), 则 $\frac{x_{n+1} + 1}{x_{n+1} - 2} = \frac{(x_n + 1)^2}{(x_n - 2)^2}$, 两边取对数得 $\ln \frac{x_{n+1} + 1}{x_{n+1} - 2} = \ln \left(\frac{x_n + 1}{x_n - 2} \right)^2 = 2\ln \frac{x_n + 1}{x_n - 2}$, 即 $a_{n+1} = 2a_n$, 所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为 $a_1 = 1$, 公比为 2 的等比数列, 所以 $a_n = 2^{n-1}$. 所以 $S_n = \frac{1-2^n}{1-2} = 2^n - 1$, 所以 $S_{2022} = 2^{2022} - 1$. 故选 A.
8. C 因为 $a > 0$, 由 $ax - a > 0$ 可得 $x > 1$, 即函数 $f(x)$ 的定义域为 $(1, +\infty)$, $f(x) = e^x - a \ln a - a \ln(x-1) + a < 0$ 可得 $\frac{e^x}{a} - \ln a < \ln(x-1) - 1$, 即 $e^x - \ln a + x - \ln a < x - 1 + \ln(x-1)$, 构造函数 $g(x) = x + \ln x$, 其中 $x >$

0, 则 $g'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$, 故函数 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以, $g(e^{-\ln a}) < g(x-1)$, 可得 $e^{-\ln a} < x-1$, 则 $x - \ln a < \ln(x-1)$, 即 $\ln a > x - \ln(x-1)$, 其中 $x > 1$, 令 $h(x) = x - \ln(x-1)$, 其中 $x > 1$, 则 $h'(x) = 1 - \frac{1}{x-1} = \frac{x-2}{x-1}$, 当 $1 < x < 2$ 时, $h'(x) < 0$, 此时函数 $h(x)$ 单调递减, 当 $x > 2$ 时, $h'(x) > 0$, 此时函数 $h(x)$ 单调递增, 所以, $\ln a > h(x)_{\min} = h(2) = 2$, 解得 $a > e^2$. 故选 C.

9. AC 因为正态分布密度函数为 $\varphi(x) = \frac{1}{10\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-100)^2}{200}}$, 所以 $\mu = 100, \sigma = 10$, 即均值为 100, 标准差为 10, 方差为 100, 故 A 正确, B 错误; 根据正态曲线的特征可知函数 $\varphi(x)$ 关于 $x=100$ 轴对称, 所以该地杂交水稻株高在 120 cm 以上的数量和株高在 80 cm 以下的数量一样多, 故 C 正确, 随机测量该地的一株杂交水稻, 其株高在 (80, 90) 和在 (110, 120) 的概率一样大, 故 D 错误. 故选 AC.

10. BD 对于 A, 由题知, $|\vec{BC}| = 3, |\vec{AC}| = 4, \angle C = 30^\circ$, 所以 \vec{BC} 与 \vec{CA} 的夹角为 150° , 所以 $\vec{BC} \cdot \vec{CA} = |\vec{BC}| \cdot |\vec{CA}| \cos 150^\circ = 3 \cdot 4 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -6\sqrt{3}$, 故 A 错误; 对于 B, 因为 $\mathbf{a} = (-4, 5), \mathbf{b} = (-2, 4)$, 所以 $2\mathbf{a} - \mathbf{b} = (-6, 6)$, 所以 $|2\mathbf{a} - \mathbf{b}| = \sqrt{36+36} = 6\sqrt{2}$, 故 B 正确; 对于 C, 因为 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 的夹角为钝角, 所以 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 的数量积小于 0 且不平行, 即 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = d - 1 < 0 \rightarrow d < 1$ 且 $d \neq -1$, 所以 $d \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1)$. 故 C 错误; 对于 D, $\because \vec{AB} = \mathbf{a} + \mathbf{b}, \vec{BC} = 2\mathbf{a} + 8\mathbf{b}, \vec{CD} = 3(\mathbf{a} - \mathbf{b}), \therefore \vec{BD} = \vec{BC} + \vec{CD} = 2\mathbf{a} + 8\mathbf{b} + 3(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = 5\mathbf{a} + 5\mathbf{b} = 5(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = 5\vec{AB}$. $\therefore \vec{AB}, \vec{BD}$ 共线, 又 \because 它们有公共点 B, $\therefore A, B, D$ 三点共线. 故 D 正确. 故选 BD.

11. ABD 对于 A, 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 若 $x_1 = x_2$, 则直线 AB: $x = 2$, 由抛物线的对称性可知, 线段 AB 的中点为 $(2, 0)$, 显然不符合题意, 故 $x_1 \neq x_2$, 因为 A, B 是抛物线 $C: y^2 = 4x$ 上的两点, 所以 $\begin{cases} y_1^2 = 4x_1 \\ y_2^2 = 4x_2 \end{cases}$, 两式相减得, $y_1^2 - y_2^2 = 4x_1 - 4x_2$, 整理得 $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{4}{y_1 + y_2}$, 因为线段 AB 的中点为 $(2, 2)$, 所以 $\frac{y_1 + y_2}{2} = 2$, 即 $y_1 + y_2 = 4$, 又 $k_{AB} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$, 所以 $k_{AB} = \frac{4}{4} = 1$, 所以直线 AB 的方程为 $y - 2 = x - 2$, 即 $y = x$. 故 A 正确; 对于 B,

$\begin{cases} y = k(x-1) \\ y^2 - 4x = 0 \end{cases}$ 消去 y 整理得 $k^2 x^2 - (2k^2 + 4)x + k^2 = 0$, \because 直线与抛物线交于 A, B 两点,

$\begin{cases} k \neq 0 \\ \Delta = (2k^2 + 4)^2 - 4k^2 > 0 \end{cases}$ 解得 $k \neq 0$. 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $x_1 + x_2 = \frac{2k^2 + 4}{k^2}$. $\because |AB| = x_1 + x_2 + 2 =$

$\frac{16}{3}$, $\therefore x_1 + x_2 = \frac{2k^2 + 4}{k^2} = \frac{10}{3}$, $\therefore k^2 = 3, k = \pm\sqrt{3}$. 检验知 $k = \pm\sqrt{3}$ 满足条件. 故 B 正确; 对于 C, 设

$A\left(\frac{y_1^2}{4}, y_1\right)$, 则 $\tan \angle AMO = k_{AM} = \frac{y_1 - 0}{\frac{y_1^2}{4} + 1} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, 解得 $y_1 = \sqrt{2}$ 或 $y_1 = 2\sqrt{2}$, 所以 $A\left(\frac{1}{2}, \sqrt{2}\right)$ 或 $A(2, 2\sqrt{2})$, 又

$\because F(1, 0)$, 所以 $k_{AF} = \frac{\sqrt{2} - 0}{\frac{1}{2} - 1} = -2\sqrt{2}$ 或 $k_{AF} = \frac{2\sqrt{2} - 0}{2 - 1} = 2\sqrt{2}$, 故 C 错误; 对于 D, 设 N 到 $l_1: 4x - 3y + 8 = 0$

的距离为 d_1 , N 到直线 $x = -1$ 的距离为 d_2 , 则 $d_1 + d_2 = d_1 + NF$, 根据平面几何知识, 可得当三点共线时, $d_1 + d_2 = d_1 + NF$ 有最小值, 因为抛物线焦点 $F(1, 0)$ 到直线 $l_1: 4x - 3y + 8 = 0$ 的距离为 $\frac{12}{5}$, 所以 $d_1 +$

$d_2 = d_1 + NF$ 的最小值是 $\frac{12}{5}$, 所以抛物线上一点 N 到直线 $l_1: 4x - 3y + 8 = 0$ 和 $l_2: x = -3$ 的距离之和的最小值为 $\frac{12}{5} + 2 = \frac{22}{5}$. 故 D 正确. 故选 ABD.

12. CD 对于 A, 若 $[1, a]$ 为 $f(x) = x^2 - 2x + 2$ 的跟随区间, 因为 $f(x) = x^2 - 2x + 2$ 在区间 $[1, a]$ 为增函数, 故其值域为 $[1, a^2 - 2a + 2]$, 根据题意有 $a^2 - 2a + 2 = a$, 解得 $a = 1$ 或 $a = 2$, 因为 $a > 1$ 故 $a = 2$. 故 A 错误. 对于

B, 由题, 因为函数 $f(x) = \frac{9}{x} - 2$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 与 $(0, +\infty)$ 上均为增函数, 若 $f(x) = \frac{9}{x} - 2$ 存在跟随

进入北京高考在线网站: <http://www.gaokzx.com/> 获取更多高考资讯及各类测试题答案!

区间 $[a, b]$ 则有 $\begin{cases} a = \frac{9}{2} - \frac{2}{a} \\ b = \frac{9}{2} - \frac{2}{b} \end{cases}$, 即 a, b 为 $x = \frac{9}{2} - \frac{2}{x}$ 的两根, 即 $2x^2 - 9x + 4 = 0$ 的根, 故 $a = \frac{1}{2}, b = 4$. 故 B 错

误. 对于 C, 若函数 $f(x) = m - \sqrt{x+1}$ 存在跟随区间 $[a, b]$, 因为 $f(x) = m - \sqrt{x+1}$ 为减函数, 故由跟随区间的定义可知

$$\begin{cases} b = m - \sqrt{a+1} \\ a = m - \sqrt{b+1} \end{cases} \Rightarrow a - b = \sqrt{a+1} - \sqrt{b+1}, \text{ 即 } (a-b)(\sqrt{a+1} + \sqrt{b+1}) = (a+1) - (b+1) = a - b,$$

因为 $a < b$, 所以 $\sqrt{a+1} + \sqrt{b+1} = 1$. 易得 $0 \leq \sqrt{a+1} < \sqrt{b+1} \leq 1$, 所以 $a = m - \sqrt{b+1} = m - (1 - \sqrt{a+1})$, 令 $t = \sqrt{a+1}$ ($t \in [0, 1]$) 代入化简可得 $t^2 - t - m = 0$, 同理 $t = \sqrt{b+1}$ 也满足 $t^2 - t - m = 0$, 即 $t^2 - t - m = 0$ 在区间 $[0, 1]$ 上有两不相等的实数根, 故

$$\begin{cases} 1 + 4m > 0 \\ -m \geq 0 \end{cases}, \text{ 解得 } m \in \left(-\frac{1}{4}, 0\right], \text{ 故 C 正确.}$$

对于 D, 若 $f(x) = -x^2 + 2x$ 存在“3 倍跟随区间”, 则可设定义域为 $[a, b]$, 值域为 $[3a, 3b]$. 当 $a < b \leq 1$ 时, 易得 $f(x) = -x^2 + 2x$ 在区间上单调递增, 此时易得 a, b 为方程 $3x = -x^2 + 2x$ 的两根, 求解得 $x = -1$ 或 $x = 0$. 故定义域 $[-1, 0]$, 则值域为 $[-3, 0]$. D 正确. 故选 CD.

13. $\frac{625\pi}{4}$ 由题意, 可设圆锥的底面半径为 r , 则 $10\pi r = 60\pi$, 故 $r = 6$, 则圆锥的高 $h = 8$, 设该圆锥外接球的半径为 R , 则 $R^2 = 6^2 + (8 - R)^2$, 解得 $R = \frac{25}{4}$, 故该圆锥外接球的表面积为 $\frac{625\pi}{4}$.

14. 160 将这组数据按照从小到大的顺序排列得 84, 88, 90, 100, 140, 160, 170, 188, 202 因为 $9 \times 60\% = 5.4$, 所以这组数据的第 60 百分位数为 160.

15. 2 或 3 或 4 (注意: 只需从 2, 3, 4 中写一个作答即可) 因为圆 O 的圆心为 $(-1, 2)$, 所以圆心到直线 l 的距离 $d = \frac{|-3 - 8 + 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2$, 因为圆 O 的方程可化简为 $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 5 - m$, 即半径为 $\sqrt{5 - m}$, 所以

$$\begin{cases} \sqrt{5 - m} < 2 \\ 5 - m > 0 \end{cases}, \text{ 所以 } 1 < m < 5, \text{ 故整数 } m \text{ 的取值可能是 } 2, 3, 4.$$

16. ②④⑤ 对①: $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left|-\frac{\pi}{2}\right| + \left|\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right| = \sin\frac{\pi}{2} + \left|\cos\frac{\pi}{2}\right| = 1, f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sin\left|\frac{3\pi}{2}\right| + \left|\cos\frac{3\pi}{2}\right| = \sin\frac{3\pi}{2} = -1$, 即 $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) \neq f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = f\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi\right)$, 故 $f(x)$ 不是以 2π 为最小正周期的周期函数, 故①错误; 对②: $f(-x) = \sin|-x| + |\cos(-x)| = \sin|x| + |\cos x| = f(x)$, 故 $f(x)$ 是偶函数, ②正确; 对③: 当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ 时, 可得 $f(x) = \sin x + |\cos x| = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, $\therefore \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$, 故 $f(x) \in [-1, \sqrt{2}]$; 当 $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, 则 $x - \frac{\pi}{4} \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$, $\therefore \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$, 故 $f(x) \in (-1, \sqrt{2}]$; 综上所述: 当 $x \in [0, 2\pi]$, $f(x)$ 的值域为 $[-1, \sqrt{2}]$. 当 $x \geq 0$ 时, 则 $f(x) = \sin x + |\cos x|$, 可得 $f(x + 2\pi) = \sin(x + 2\pi) + |\cos(x + 2\pi)| = \sin x + |\cos x| = f(x)$, 故 $x \geq 0$ 时, $f(x)$ 的值域为 $[-1, \sqrt{2}]$, 又 $\because f(x)$ 是偶函数, $\therefore f(x)$ 的值域为 $[-1, \sqrt{2}]$, 即 $f(x)$ 的最小值为 -1 , ③错误; 对④: 由③可得: 当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ 时, 令 $f(x) = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$, 即 $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$, $\therefore x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, 则 $x + \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}\right]$, \therefore 当 $x + \frac{\pi}{4} = 2\pi$, 即 $x = \frac{7\pi}{4}$ 时, $f(x) = 0$; 当 $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, 则 $x - \frac{\pi}{4} \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$, \therefore 当 $x - \frac{\pi}{4} = \pi$, 即 $x = \frac{5\pi}{4}$ 时, $f(x) = 0$; 综上所述: $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上有 2 个零点 $\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$. $\because f(x)$ 是偶函数, $\therefore f(x)$ 在 $[-2\pi, 2\pi]$ 上有 4 个零点 $-\frac{7\pi}{4}, -\frac{5\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$, ④正确; 对⑤: 当 $x \in \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right)$ 时, 则 $x - \frac{\pi}{4} \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{9\pi}{4}\right)$, 可是 $f(x) = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ 在区间 $\left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$ 上单调递减, ⑤正确.

进入北京高考在线网站 <http://www.gaokzx.com/> 获取更多高考资讯及各类测试试题答案!

17. 解: (1) 因 $\mathbf{m} = (2a, \sqrt{6})\mathbf{n} = (b, \sqrt{2}\sin B)$, 且 $\mathbf{m} \parallel \mathbf{n}$,

于是有 $2a \times \sqrt{2} \sin B = \sqrt{6}b$, 即 $2a \sin B = \sqrt{3}b$, 2分

在 $\triangle ABC$ 中, 由正弦定理得: $2 \sin A \sin B = \sqrt{3} \sin B$, 而 $\sin B > 0$,

于是得 $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 又 A 为锐角, (未标锐角扣 1 分)

所以 $A = \frac{\pi}{3}$ 4分

(2) 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 由正弦定理得 $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A} = \frac{2}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$,

$$\therefore b = \frac{4\sqrt{3}}{3} \sin B, c = \frac{4\sqrt{3}}{3} \sin C,$$

$\therefore C = \frac{2\pi}{3} - B$, 且 $\begin{cases} 0 < B < \frac{\pi}{2} \\ 0 < \frac{2\pi}{3} - B < \frac{\pi}{2} \end{cases}$, 故 $\frac{\pi}{6} < B < \frac{\pi}{2}$, 6分

$$\therefore b + c = \frac{4\sqrt{3}}{3} [\sin B + \sin(\frac{2\pi}{3} - B)] = \frac{4\sqrt{3}}{3} (\frac{3}{2} \sin B + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos B) = 4 \sin(B + \frac{\pi}{6}),$$
 8分

又 $\because \frac{\pi}{3} < B + \frac{\pi}{6} < \frac{2\pi}{3}$, $\therefore \frac{\sqrt{3}}{2} < \sin(B + \frac{\pi}{6}) \leq 1$, 故 $2\sqrt{3} < b + c \leq 4$,

$\therefore 2\sqrt{3} + 2 < a + b + c \leq 6$, 即 $\triangle ABC$ 周长的取值范围是 $(2\sqrt{3} + 2, 6]$ 10分

18. 解: (1) 因为 $S_n = a_n + n^2 - 1$,

所以当 $n \geq 2$ 时, $S_{n-1} = a_{n-1} + (n-1)^2 - 1$,

两式相减得: $a_n = a_n - a_{n-1} + 2n - 1$, 即 $a_{n-1} = 2n - 1$, 3分

所以 $a_n = 2n + 1$,

且 $a_1 = 3$ 符合,

所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2n + 1$. ($n \in \mathbf{N}^*$) 6分

(2) 由(1)得: $\frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{2} (\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3})$, 8分

$$\therefore \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{2} (\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}) = \frac{1}{2} (\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+3}) = \frac{1}{6} - \frac{1}{4n+6},$$
 11分

$$\therefore \frac{1}{4n+6} > 0, \therefore \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_n a_{n+1}} < \frac{1}{6}. \dots\dots\dots 12分$$

19. 解: (1) 设 $A_1 B$ 中点为 M , $\because \triangle ABB_1 A_1$ 为正方形, A, M, B_1 三点共线且 $AA_1 = AB$, 则 $AM \perp A_1 B$,

\because 平面 $A_1 BC \perp$ 平面 $ABB_1 A_1$, 平面 $A_1 BC \cap$ 平面 $ABB_1 A_1 = A_1 B$, $AM \subset$ 平面 $ABB_1 A_1$,

$\therefore AM \perp$ 平面 $A_1 BC$, 3分

又 $BC \subset$ 平面 $A_1 BC$, $\therefore AM \perp BC$,

又直三棱柱 $ABC - A_1 B_1 C_1$, $BB_1 \perp$ 平面 ABC , $BC \subset$ 平面 ABC , $\therefore BB_1 \perp BC$,

$AM \cap BB_1 = B_1$, $AM \subset$ 平面 $ABB_1 A_1$, $BB_1 \subset$ 平面 $ABB_1 A_1$, $\therefore BC \perp$ 平面 $ABB_1 A_1$,

又 $AB \subset$ 平面 $ABB_1 A_1$, $\therefore AB \perp BC$ 6分

(2) 由(1)直线 AC 与平面 $A_1 BC$ 所成的角为 $\angle ACM = \frac{\pi}{6}$,

不妨设 $AB = 2$, $AM = \sqrt{2}$, $AC = 2\sqrt{2}$, $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = 2$,

以 B 为原点, $\vec{BA}, \vec{BC}, \vec{BB}_1$ 分别为 x, y, z 轴正向建立坐标系,

来源:北京高考在线网 <http://www.gaokzx.com/> 获取更多高考资讯及各类测试试题答案! 8分

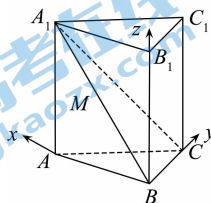
设平面 ABE 的法向量为 $\mathbf{n}=(x, y, z)$,

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BA} = 0 \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BE} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}, \text{令 } y = 1, \mathbf{n} = (0, 1, -1),$$

同理可得平面 CBE 的法向量为 $\mathbf{m}=(1, 0, -1)$, 10 分

设平面 ABE 与平面 BCE 所成锐二面角的大小为 θ ,

$$\therefore \cos \theta = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}}{|\mathbf{n}| \cdot |\mathbf{m}|} = \frac{1}{2}, \theta = \frac{\pi}{3}. \text{ 12 分}$$



20. 解: (1) $\because (0.002 + 0.004 + 0.015 + 0.02 + a + 0.034) \times 10 = 1$, 解得 $a = 0.025$,

设至少 2 人非常满意的概率为事件 A ,

由题意知 5 人中非常满意的人数 $\xi \sim B(5, \frac{1}{4})$,

$$P(A) = 1 - C_5^0 \times (\frac{3}{4})^5 - C_5^1 \times (\frac{3}{4})^4 \times \frac{1}{4} = \frac{47}{128}. \text{ 4 分}$$

(2) 由频率分布直方图得:

满意度平均分为 $45 \times 0.02 + 55 \times 0.04 + 65 \times 0.15 + 75 \times 0.2 + 85 \times 0.34 + 95 \times 0.25 = 80.5$,

满意指数 = $\frac{\text{满意度平均分}}{100} = 0.805 > 0.8$, 因此, 能通过验收. 7 分

(3) 分层抽取 9 人中老人有 3 人,

由题意知 X 服从超几何分布, X 的可能取值为 0, 1, 2, 3,

$$P(X=0) = \frac{C_6^3}{C_9^3} = \frac{20}{84} = \frac{5}{21}, P(X=1) = \frac{C_6^2 \cdot C_3^1}{C_9^3} = \frac{45}{84} = \frac{15}{28}, P(X=2) = \frac{C_6^1 \cdot C_3^2}{C_9^3} = \frac{18}{84} = \frac{3}{14}, P(X=3) = \frac{C_3^3}{C_9^3} = \frac{1}{84},$$

则分布列为:

X	0	1	2	3
P	$\frac{5}{21}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{1}{84}$

..... 11 分

所以, $E(X) = 0 \times \frac{5}{21} + 1 \times \frac{15}{28} + 2 \times \frac{3}{14} + 3 \times \frac{1}{84} = 1$ 12 分

21. (1) 解: 因为椭圆 C 的长轴长为 $2a=4$, 则 $a=2$,

将点 A 的坐标代入椭圆 C 的方程可得 $\frac{1}{4} + \frac{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}{b^2} = 1$, 可得 $b=1$,

所以, 椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 4 分

(2) 解: 若 l 与 x 轴重合, 则 $\triangle DEG$ 不存在,

设直线 l 的方程为 $x=my-1$, 设点 $D(x_1, y_1), E(x_2, y_2)$,

若 $m=0$, 则点 F 与点 D 重合, 不合乎题意, 所以, $m \neq 0$,

$$\text{联立} \begin{cases} x = my - 1 \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases} \text{ 可得 } (m^2 + 4)y^2 - 2my - 3 = 0,$$

$$\Delta = 4m^2 + 12(m^2 + 4) = 16(m^2 + 3) > 0,$$

由韦达定理可得 $y_1 + y_2 = \frac{2m}{m^2 + 4}, y_1 y_2 = -\frac{3}{m^2 + 4}$, 6 分

易知点 $F(x_2, -y_2), k_{DF} = \frac{y_1 + y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y_1 + y_2}{m(y_1 - y_2)}$,

直线 DF 的方程为 $y - y_1 = \frac{y_1 + y_2}{m(y_1 - y_2)}(x - x_1)$,

将 $y=0$ 代入直线 DF 的方程可得 $x = \frac{2my_1 y_2}{m(y_1 - y_2)} - 1 = -4$, 即点 $G(-4, 0)$,

进入北京高考在线网站: <http://www.gkzxx.com/> 获取更多高考资讯及各类测试试题答案!

$$|y_1 - y_2| = \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1y_2} = \frac{4\sqrt{m^2+3}}{m^2+4}, \dots\dots\dots 8 \text{分}$$

$$\text{所以, } S_{\triangle DEG} = \frac{1}{2} |BG| \cdot |y_1 - y_2| = \frac{3}{2} \times \frac{4\sqrt{m^2+3}}{m^2+4} = \frac{6}{\sqrt{m^2+3} + \frac{1}{\sqrt{m^2+3}}}, \dots\dots\dots 10 \text{分}$$

令 $t = \sqrt{m^2+3} > \sqrt{3}$, 则函数 $y = \sqrt{m^2+3} + \frac{1}{\sqrt{m^2+3}}$ 在 $(\sqrt{3}, +\infty)$ 上为增函数,

$$\text{所以, } y = \sqrt{m^2+3} + \frac{1}{\sqrt{m^2+3}} > \frac{4\sqrt{3}}{3}, \text{ 所以, } S = \frac{6}{\sqrt{m^2+3} + \frac{1}{\sqrt{m^2+3}}} \in \left(0, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right).$$

故 $\triangle DEG$ 的面积 S 的取值范围是 $\left(0, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$. $\dots\dots\dots 12 \text{分}$

22. 解: (1) $f'(x) = (e^x - ax)'(x-2) + (e^x - ax)(x-2)' = xe^x - e^x - 2ax + 2a,$

所以 $f'(2) = 2e^2 - e^2 - 4a + 2a = e^2$, 解得 $a=0$; $\dots\dots\dots 3 \text{分}$

(2) $f'(x) = xe^x - e^x - 2ax + 2a$, 令 $f'(x) = 0$ 得 $(x-1)e^x = 2a(x-1),$

解得 $x=1$, 或 $x = \ln(2a) (a > 0), \dots\dots\dots 5 \text{分}$

当 $0 < 2a < e$ 即 $0 < a < \frac{e}{2}$ 时, $x_2 = 1$, 对任意 $x \in [0, 1], f(x) < 0$ 恒成立,

得 $f(x) = (e^x - ax)(x-2) < 0$ 可得 $e^x - ax > 0, x \in [0, 1],$

$x=0$ 时 $e^0 - 0 = 1 > 0$ 成立, $x \neq 0$ 时, 有 $a < \frac{e^x}{x}$ 在 $(0, 1]$ 上恒成立, $\dots\dots\dots 7 \text{分}$

令 $g(x) = \frac{e^x}{x}, x \in (0, 1], g'(x) = \frac{(x-1)e^x}{x^2} \leq 0$, 所以 $g(x)$ 在 $x \in (0, 1]$ 上单调递减,

有 $g(x) \geq g(1) = e$, 所以 $0 < a < \frac{e}{2}$;

当 $2a > e$ 即 $a > \frac{e}{2}$ 时, $x_2 = \ln(2a)$, 对任意 $x \in [0, \ln(2a)], f(x) < 0$ 恒成立,

因为 $f(0) = (e^0 - 0) \times (0-2) < 0, f'(x) = (x-1)(e^x - 2a),$

x	$[0, 1)$	1	$(1, \ln(2a))$	$\ln(2a)$	$(\ln(2a), +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↑	极大值	↓	极小值	↑

可得 $\begin{cases} f(1) = (e^1 - a)(1-2) < 0 \Rightarrow a < e \\ f(\ln(2a)) = [e^{\ln(2a)} - a \ln(2a)] [\ln(2a) - 2] < 0 \end{cases}, \dots\dots\dots 10 \text{分}$

令 $t = \ln(2a), f(\ln(2a)) = f(t) = \left(e^t - \frac{1}{2}te^t\right)(t-2) < 0 \Rightarrow e^t(2-t)(t-2) < 0,$

$e^t(t-2)^2 > 0$, 解得 $t \neq 2 \Rightarrow a \neq \frac{e^2}{2}$.

所以 $\frac{e}{2} < a < e$;

当 $2a = e$ 即 $a = \frac{e}{2}$ 时, x_1, x_2 重合, 不符合题意,

综上所述: $0 < a < \frac{e}{2}$ 或 $\frac{e}{2} < a < e$. $\dots\dots\dots 12 \text{分}$