2018 北京市通州区高三（上）期末

数　　学（理）

2018.1

第 I 卷　（选择题　共 40 分）

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

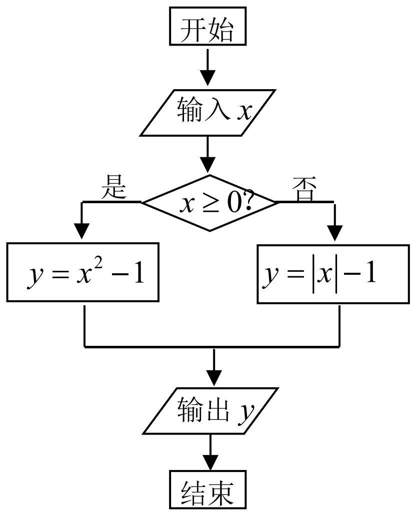
1．已知集合 $A=\{x\in\mathbf{Z}\,|\,x^2-2x\le 0\}$，集合 $B=\{-1,0,1\}$，那么 $A\cup B$ 等于

A．$\{-1\}$　　B．$\{0,1\}$　　C．$\{0,1,2\}$　　D．$\{-1,0,1,2\}$

2．已知点 $P(2,2\sqrt{2})$ 为抛物线 $y^2=2px$ 上一点，那么点 P 到抛物线准线的距离是

A．2　　B．$2\sqrt{2}$　　C．3　　D．4

3．一个算法的程序框图如图所示，如果输出 y 的值是1，那么输入 x 的值是



A．-2 或 $\sqrt{2}$

B．-2 或 2

C．$-\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{2}$

D．$-\sqrt{2}$ 或 2

4．已知 $a\in\mathbf{R}$，那么“直线 $y=ax-1$ 与 $y=-4ax+2$ 垂直”是“$a=\dfrac{1}{2}$”的

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

5．已知数列 $\{a_n\}$ 是公差不为 0 的等差数列，$a_1=1$，且 a_1，a_2，a_5 成等比数列，那么数列 $\{a_n\}$ 的前10项和 S_{10} 等于

A．90　　B．100　　C．10 或 90　　D．10 或 100

6．已知 a，$b\in\mathbf{R}$，$a>b>0$，则下列不等式一定成立的是

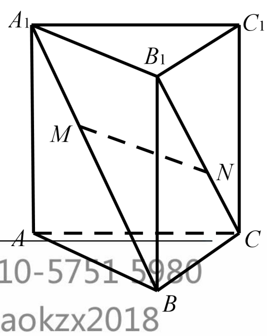
A．$\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$　　B．$\tan a>\tan b$　　C．$|\log_2 a|>|\log_2 b|$

D．$a\cdot 2^{-b}>b\cdot 2^{-a}$

7．已知点 $A(2,-1)$，点 $P(x,y)$ 满足线性约束条件 $\begin{cases}x+2\ge 0,\\ y-1\le 0,\\ x-2y\ge 4,\end{cases}$ O 为坐标原点，那么 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}$ 的最小值是

A．11　　B．0　　C．-1　　D．-5

8．如图，各棱长均为1的正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$，M，N 分别为线段 A_1B，B_1C 上的动点，若点 M，N 所在直线与平面 ACC_1A_1 不相交，点 Q 为 MN 中点，则 Q 点的轨迹的长度是



A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

C. 1　　　D. $\sqrt{2}$

第Ⅱ卷　（非选择题　共 110 分）

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分. 把答案填在答题卡上.

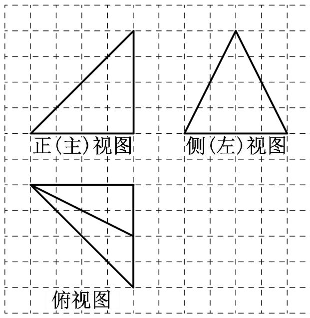
9．已知复数 $\dfrac{2\mathrm{i}-a}{\mathrm{i}}$ 的实部与虚部相等，那么实数 $a=$_______.

10．二项式 $\left(2x-\dfrac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中的常数项是_______.

11．在极坐标系中，已知点 A 是以 $\left(2,\dfrac{\pi}{6}\right)$ 为圆心，1 为半径的圆上的点，那么点 A 到极点的最大距离是_______.

12．已知点 P 的坐标是 $\left(4\sqrt{3},1\right)$，将 OP 绕坐标原点 O 顺时针旋转 $\dfrac{\pi}{3}$ 至 OQ，那么点 Q 的横坐标是_______.

13．在正方形网格中，某四面体的三视图如图所示．已知小正方形网格的边长为 1，那么该四面体的四个面中，面积最大的面的面积是_______.



14．已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x+a, & x<2,\\ a-x, & x\geqslant 2\end{cases}$ 无零点，那么实数 a 的取值范围是_______.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分. 解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

15.（本题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=2\sin x\cos x+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-2x\right)$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的最小正周期及单调递增区间；

（Ⅱ）求 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值和最小值.

16.（本题满分 13 分）

某次有 600 人参加的数学测试，其成绩的频数分布表如图所示，规定 85 分及其以上为优秀.

区间	[75，80)	[80，85)	[85，90)	[90，95)	[95，100]
人数	36	114	244	156	50

（Ⅰ）现用分层抽样的方法从这 600 人中抽取 20 人进行成绩分析，求其中成绩为优秀的学生人数；

（Ⅱ）在（Ⅰ）中抽取的 20 名学生中，要随机选取 2 名学生参加活动，记“其中成绩为优秀的人数”为 X，求 X 的分布列与数学期望.

17.（本题满分 14 分）

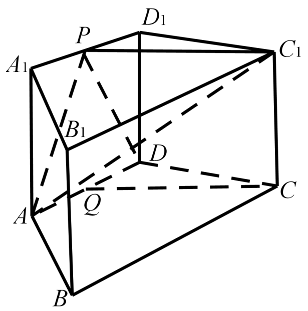
如图，在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1\perp$ 平面 $ABCD$，底面 $ABCD$ 为梯形，$AD//BC$，$AB=DC=\sqrt{2}$，$AD=AA_1=\frac{1}{2}BC=2$，

点 P，Q 分别为 A_1D_1，AD 的中点.

（Ⅰ）求证：$CQ//$ 平面 PAC_1；

（Ⅱ）求二面角 C_1-AP-D 的余弦值；

（Ⅲ）在线段 BC 上是否存在点 E，使 PE 与平面 PAC_1 所成角的正弦值是 $\frac{2\sqrt{14}}{21}$，若存在，求 BE 的长；若不存在，请说明理由.



18．（本题满分 13 分）

已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 过点 $(0,-1)$，离心率 $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

（Ⅰ）求椭圆的方程；

（Ⅱ）已知点 $P(m,0)$，过点 $(1,0)$ 作斜率为 $k(k\neq 0)$ 直线 l，与椭圆交于 M，N 两点，若 x 轴平分 $\angle MPN$，求 m 的值.

19．（本题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=\frac{x-a}{\ln x}$，$a\in\mathbf{R}$.

（Ⅰ）当 $a=0$ 时，求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）对任意的 $x\in(1,+\infty)$，$f(x)>\sqrt{x}$ 恒成立，求 a 的取值范围.

20.（本题满分 14 分）

已知等差数列$\{a_n\}$的首项为a，公差为b，等比数列$\{b_n\}$的首项为b，公比为a.

（Ⅰ）若数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=-n^2+3n$，求a，b的值；

（Ⅱ）若$a\in\mathbf{N}^*$，$b\in\mathbf{N}^*$，且$a<b<a_2<b_2<a_3$.

（i）求a的值；

（ii）对于数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$，满足关系式$a_m+k=b_n$，k为常数，且$k\in\mathbf{N}^*$，求b的最大值.

数学试题答案

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	C	A	B	B	D	C	B

二、填空题

9. 2 10. -160 11. 3

12. $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ 13. 12 14. $(-\infty,-4]\cup[0,2)$

三、解答题

15. **解**：（Ⅰ）因为 $f(x)=2\sin x\cos x+\cos 2x=\sin 2x+\cos 2x$

$$=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right).$$ ……………………4 分

所以 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$. ……………………5 分

由 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x+\frac{\pi}{4}\le\frac{\pi}{2}+2k\pi$，得 $-\frac{3\pi}{8}+k\pi\le x\le\frac{\pi}{8}+k\pi$.

所以 $f(x)$ 的单调递增区间是 $\left[-\frac{3\pi}{8}+k\pi,\frac{\pi}{8}+k\pi\right],k\in Z$. ……………………7 分

（Ⅱ）因为 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，所以 $2x+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$.

所以当 $2x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{\pi}{8}$ 时，函数 $f(x)$ 取得最大值是 $\sqrt{2}$.

当 $2x+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}$，即 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，函数 $f(x)$ 取得最小值 $\sqrt{2}\sin\frac{5\pi}{4}=-1$. .

所以 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值和最小值分别为 $\sqrt{2}$ 和 -1. ……………………13 分

16. **解**：（Ⅰ）设其中成绩为优秀的学生人数为 x，则 $\frac{x}{20}=\frac{244+156+50}{600}$，解得 $x=15$.

所以其中成绩为优秀的学生人数为 15. ……………………5 分

（Ⅱ）依题意，随机变量 X 的所有取值为 0，1，2.

$$P(X=0)=\frac{C_5^2}{C_{20}^2}=\frac{1}{19},\quad P(X=1)=\frac{C_5^1C_{15}^1}{C_{20}^2}=\frac{15}{38},\quad P(X=2)=\frac{C_{15}^2}{C_{20}^2}=\frac{21}{38}.$$

……………………11 分

X	0	1	2

所以 X 的分布列为

P	$\frac{1}{19}$	$\frac{15}{38}$	$\frac{21}{38}$

……………………12 分

所以随机变量 X 的数学期望 $E(X)=0\times\frac{1}{19}+1\times\frac{15}{38}+2\times\frac{21}{38}=\frac{3}{2}$.……………………13 分

17. **解**：（Ⅰ）连接 PQ，因为点 P，Q 分别为 A_1D_1，AD 的中点，

所以 $PQ//C_1C$，$PQ=C_1C$.

所以四边形 $PQCC_1$ 是平行四边形.

所以 $CQ//C_1P$.

因为 $CQ\not\subset$ 平面 PAC_1，$C_1P\subset$ 平面 PAC_1，

所以 $CQ//$ 平面 PAC_1.……………………4 分

（Ⅱ）因为 $AA_1\perp$ 平面 $ABCD$，$AA_1//PQ$，

所以 $PQ\perp$ 平面 $ABCD$.……………………5 分

所以以 Q 为坐标原点，分别以直线 QA，QP 为 x 轴，z 轴建立空间直角坐标系 $Qxyz$，则 y 轴在平面 $ABCD$ 内.

所以 $A(1,0,0)$，$P(0,0,2)$，$C_1(-2,1,2)$，$B(2,1,0)$，

所以 $\overrightarrow{PA}=(1,0,-2)$，$\overrightarrow{PC_1}=(-2,1,0)$.……………………7 分

设平面 PAC_1 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，所以 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{PA}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{PC_1}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x-2z=0,\\ -2x+y=0.\end{cases}$

所以 $\vec{n}=(2,4,1)$.……………………8 分

设平面 PAD 的法向量为 $\vec{m}=(0,1,0)$，

所以 $\cos\langle\vec{n},\vec{m}\rangle=\frac{4}{\sqrt{21}\times1}=\frac{4\sqrt{21}}{21}$.

又二面角 C_1-AP-D 为锐角，

所以二面角 C_1-AP-D 的余弦值是 $\frac{4\sqrt{21}}{21}$.……………………10 分

（Ⅲ）存在．设点 $E(a,1,0)$，所以 $\overrightarrow{PE}=(a,1,-2)$.

设 PE 与平面 PAC_1 所成角为 θ，所以 $\sin\theta=\left|\cos\left\langle\vec{n},\overrightarrow{PE}\right\rangle\right|=\dfrac{2\sqrt{14}}{21}$.

所以 $\dfrac{|2a+2|}{\sqrt{21}\cdot\sqrt{a^2+5}}=\dfrac{2\sqrt{14}}{21}$，解得 $a=1$.

所以 $BE=1$. ……………………14 分

18. **解**：（Ⅰ）因为椭圆的焦点在 x 轴上，过点 $(0,-1)$，离心率 $e=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

所以 $b=1$，$\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. ……………………2 分

所以由 $a^2=b^2+c^2$，得 $a^2=2$. ……………………3 分

所以椭圆 C 的标准方程是 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$. ……………………4 分

（Ⅱ）因为过椭圆的右焦点 F 作斜率为 k 直线 l，所以直线 l 的方程是 $y=k(x-1)$.

联立方程组 $\begin{cases} y=k(x-1), \\ \dfrac{x^2}{2}+y^2=1, \end{cases}$ 消去 y，得 $(1+2k^2)x^2-4k^2x+2k^2-2=0$.

显然 $\Delta>0$.

设点 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

所以 $x_1+x_2=\dfrac{4k^2}{1+2k^2}$，$x_1\cdot x_2=\dfrac{2k^2-2}{1+2k^2}$. ……………………7 分

因为 x 轴平分 $\angle MPN$，所以 $\angle MPO=\angle NPO$.

所以 $k_{MP}+k_{NP}=0$. ……………………9 分

所以 $\dfrac{y_1}{x_1-m}+\dfrac{y_2}{x_2-m}=0$. 所以 $y_1(x_2-m)+y_2(x_1-m)=0$.

所以 $k(x_1-1)(x_2-m)+k(x_2-1)(x_1-m)=0$.

所以 $2k\cdot x_1x_2-(k+km)(x_1+x_2)+2km=0$.

所以 $2k\cdot\dfrac{2k^2-2}{1+2k^2}-(k+km)\dfrac{4k^2}{1+2k^2}+2km=0$.

所以 $\dfrac{-4k+2km}{1+2k^2}=0$. ……………………12 分

所以 $-4k+2km=0$.

因为 $k\neq0$，

所以 $m=2$. ……………………13 分

19. 解：（Ⅰ）因为 $a=0$， 所以 $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$， $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$.

……………………1 分

所以 $f'(x)=\dfrac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$. ……………………2 分

令 $f'(x)>0$，即 $\ln x-1>0$，所以 $x>e$. ……………………3 分

令 $f'(x)<0$，即 $\ln x-1<0$，所以 $x<e$. ……………………4 分

所以 $f(x)$ 在 $(e,+\infty)$ 上单调递增，在 $(0,1)$ 和 $(1,e)$ 上单调递减.

所以 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(e,+\infty)$，单调递减区间是 $(0,1)$ 和 $(1,e)$.

……………………5 分

（Ⅱ）因为 $x>1$，所以 $\ln x>0$.

因为 ，

所以对任意的 $x\in(1,+\infty)$， $f(x)>\sqrt{x}$ 恒成立，即 $\dfrac{x-a}{\ln x}>\sqrt{x}$ 恒成立.

等价于 $a<x-\sqrt{x}\ln x$ 恒成立. ……………………7 分

令 $g(x)=x-\sqrt{x}\ln x$，所以 $g'(x)=\dfrac{2\sqrt{x}-\ln x-2}{2\sqrt{x}}$. ……………………9 分

令 $h(x)=2\sqrt{x}-\ln x-2$，所以 $h'(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{x}$.

所以当 $x>1$ 时， $h'(x)>0$.

所以 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增. 所以 $h(x)>h(1)=0$. ……………………11 分

所以当 $x>1$ 时， $g'(x)>0$.

所以 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增. 所以 $g(x)>g(1)=1$.

所以 $a\le 1$. ……………………13 分

20. 解：（Ⅰ）因为 $S_n=-n^2+3n$，

所以 $a=S_1=2$. ……………………1 分

因为 $a_2=S_2-S_1=0$.

所以公差 $b=a_2-a=-2$. ……………………3 分

（Ⅱ）证明：因为$a_n=a+b(n-1)$，$b_n=b\cdot a^{n-1}$，

又$a<b<a_2<b_2<a_3$，

所以$a<b<a+b<ab<a+2b$.

因为a，b均为正整数，且$a<b$，$b<ab$，

所以$a>1$.

所以$a\ge 2$，$b\ge 3$.……………………6 分

又$ab<a+2b$，所以$1<\frac{2}{a}+\frac{1}{b}$.

当$a\ge 3$，$b\ge 4$时，有$1<\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\le\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=\frac{11}{12}$，产生矛盾.

所以$a=2$.……………………10 分

（Ⅲ）因为　　　　，所以$2+b(m-1)+k=b\cdot 2^{n-1}$.

所以$k+2=b\cdot\left[2^{n-1}-(m-1)\right]$.……………………12 分

因为b，k均为正整数，k为常数，

所以当且仅当$2^{n-1}-(m-1)=1$时，b有最大值是$k+2$.

所以b的最大值是$k+2$.……………………14 分

北京高考在线是长期为中学老师、家长和考生提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划以及实用的升学讲座活动等全方位服务的升学服务平台。自 2014 年成立以来一直致力于服务北京考生，助力千万学子，圆梦高考。

目前，北京高考在线拥有旗下拥有北京高考在线网站和北京高考资讯微信公众号两大媒体矩阵，关注用户超 10 万+。

北京高考在线_2018 年北京高考门户网站

http://www.gaokzx.com/

北京高考资讯微信：bj-gaokao