

理科数学

考生注意:

1. 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上,并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑.如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号.回答非选择题时,将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $A = \{1, 2, 4, 6\}$, 若 $A \cup B = \{x \in \mathbf{Z} \mid 0 < x < 7\}$, $A \cap B = \{2, 4\}$, 则 $B =$

- A. $\{2, 3, 4\}$ B. $\{2, 3, 4, 5\}$ C. $\{2, 4, 5\}$ D. $\{2, 3, 4, 5, 7\}$

2. 已知复数 z 满足 $|z - 3 + 2i| = |z|$, 若 z 在复平面内对应的点为 (x, y) , 则

- A. $6x - 4y + 13 = 0$ B. $6x - 4y + 5 = 0$
C. $6x - 4y - 13 = 0$ D. $6x + 4y + 13 = 0$

3. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $a_1 + a_3 = 20$, $S_4 = 10$, 则其公比 q 为

- A. $-\frac{1}{2}$ B. -1 C. $\frac{1}{2}$ D. 2

4. 如图所示的网格中小正方形的边长均为 1, 粗线画出的是某三棱锥的正视图和俯视图, 若该三棱锥的侧视图面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, 则该三棱锥的体积为

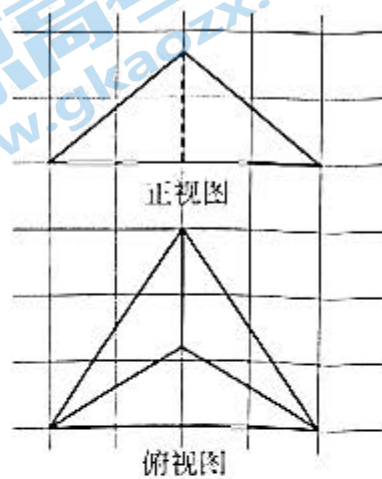
- A. $2\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{3}$
C. $2\sqrt{5}$ D. 4

5. 已知函数 $f(x) = \sin 2x + \cos 2x$, 将函数 $f(x)$ 图象上所有点的横坐标拉伸为原来的 3 倍后, 再向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度, 得到函数 $g(x)$ 的图象, 则 $g(x) =$

- A. $\sqrt{2} \sin\left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{12}\right)$ B. $\sqrt{2} \sin\left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{4}\right)$
C. $\sqrt{2} \sin\left(6x - \frac{3\pi}{4}\right)$ D. $\sqrt{2} \sin\left(6x - \frac{\pi}{4}\right)$

6. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \frac{1}{4}$, 且 $2a_{n+1}a_n + a_n = 3a_{n+1}$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 则 $a_4 =$

- A. $\frac{1}{22}$ B. $\frac{1}{32}$ C. $\frac{1}{82}$ D. $\frac{1}{128}$



7. 区块链作为一种新型的技术,已经被应用于许多领域.在区块链技术中,某个密码的长度设定为 512 B,则密码一共有 2^{512} 种可能,为了破解该密码,最坏的情况需要进行 2^{512} 次运算.现在有一台计算机,每秒能进行 1.25×10^{13} 次运算,那么在最坏的情况下,这台计算机破译该密码所需时间大约为
(参考数据: $\lg 2 \approx 0.3, \sqrt{10} \approx 3.16$)

- A. 6.32×10^{141} s B. 6.32×10^{140} s C. 3.16×10^{141} s D. 3.16×10^{140} s

8. 已知动圆 $C: (x-a)^2 + (y-3a+2)^2 = 16 (a \in \mathbf{R})$ 截直线 $l: x+by+3=0$ 所得弦长为定值,则 $b =$

- A. -3 B. -2 C. $-\frac{2}{3}$ D. $-\frac{1}{3}$

9. 已知矩形 $ABCD$ 中, $AB = 2BC = 6$, 点 M, N 分别为线段 AB, CD 的中点, 现将 $\triangle ADM$ 沿 DM 翻转, 直到与 $\triangle NDM$ 首次重合, 则此过程中, 线段 AC 的中点的运动轨迹长度为

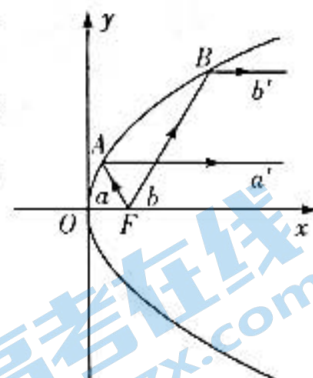
- A. $3\sqrt{2}\pi$ B. $\frac{3\sqrt{2}\pi}{2}$ C. $\frac{3\sqrt{2}\pi}{4}$ D. $\frac{\sqrt{2}\pi}{2}$

10. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0, \\ -x^2, & x \geq 0, \end{cases}$ 若 $\forall x \in \mathbf{R}, f(mx^2) + 9f(4-3x) \leq 0$ 恒成立, 则实数 m 的取值范围为

- A. $[21, +\infty)$ B. $[13, +\infty)$ C. $[\frac{27}{16}, +\infty)$ D. $[15, +\infty)$

11. 抛物线具有以下光学性质: 从焦点发出的光线经抛物线反射后平行于抛物线的对称轴. 该性质在实际生产中应用非常广泛. 如图所示, 从抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点 F 发出的两条光线 a, b 分别经抛物线上的 A, B 两点反射, 已知两条入射光线与 x 轴的夹角均为 60° , 且两条反射光线 a' 和 b' 之间的距离为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$, 则 $p =$

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4



12. 若 $\ln m - m + 2m^2 = \ln n - n + 2e^2n^2 + 1$, 则

- A. $\frac{m}{n} > e$ B. $\frac{m}{n} < e$ C. $m - n > e$ D. $m - n < e$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 设 $(3-2x)^5 = a_0 + a_1(x+1) + a_2(x+1)^2 + a_3(x+1)^3 + a_4(x+1)^4 + a_5(x+1)^5$, 则 $a_5 =$ _____.

14. 已知 $\triangle ABC$ 的外心为 O , 若 $\vec{AB} + \vec{AC} = 2\vec{AO}$, 且 $|\vec{OA}| = |\vec{AB}|$, 则 $B =$ _____.

15. 某景区套票原价 300 元/人, 如果多名游客组团购买套票, 则有如下两种优惠方案供选择:

方案一: 若人数不低于 10, 则票价打 9 折; 若人数不低于 50, 则票价打 8 折; 若人数不低于 100, 则票价打 7 折. 不重复打折.

方案二: 按原价计算, 总金额每满 5 000 元减 1 000 元.

已知一个旅游团有 47 名游客, 若可以两种方案搭配使用, 则这个旅游团购票总费用的最小值为 _____ 元.

16. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 的左、右顶点分别为 A, B , 点 P 在椭圆 C 上 (与 A, B 不重合), 直线 AP 与 y 轴交于点 M , 过点 A 作 $AN \parallel BP$, 直线 AN 与 y 轴交于点 N , 若点 $S(t, 0)$ 满足 $\vec{SM} \cdot \vec{SN} = 5$, 则 $t =$ _____.

三、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤. 第 17 ~ 21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22, 23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 共 60 分.

17. (12 分)

“双减”政策实施后, 为了解某地中小学生周末体育锻炼的时间, 某研究人员随机调查了 600 名学生, 得到的数据统计如下表所示:

周末体育锻炼时间 $t(\text{min})$	$[30, 40)$	$[40, 50)$	$[50, 60)$	$[60, 70)$	$[70, 80)$	$[80, 90)$
频率	0.1	0.2	0.3	0.15	0.15	0.1

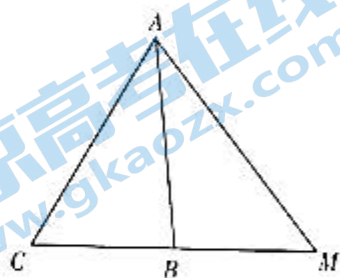
- (I) 估计这 600 名学生周末体育锻炼时间的平均数 \bar{t} ; (同一组中的数据用该组区间的中点值作代表)
 (II) 在这 600 人中, 用分层抽样的方法, 从周末体育锻炼时间在 $[40, 60)$ 内的学生中抽取 15 人, 再从这 15 人中随机抽取 3 人, 记这 3 人中周末体育锻炼时间在 $[50, 60)$ 内的人数为 X , 求 X 的分布列以及数学期望 $E(X)$.

18. (12 分)

如图, 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c , $b(1 + \cos C) = \sqrt{3}c \sin \angle ABC$ 且 $\triangle ABC$ 的外接圆面积为 $\frac{49\pi}{3}$.

(I) 求边 c ;

(II) 若 $a = 5$, 延长 CB 至 M , 使得 $\cos \angle AMC = \frac{\sqrt{21}}{7}$, 求 BM .

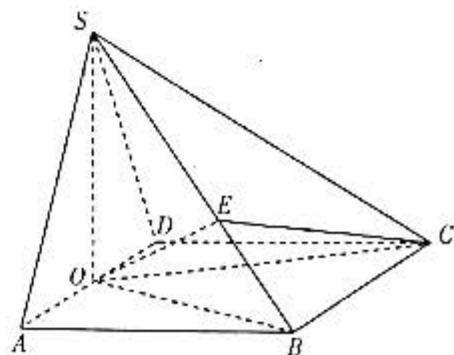


19. (12 分)

如图所示, 在四棱锥 $S-ABCD$ 中, 四边形 $ABCD$ 为菱形, $\triangle SAD$ 为等边三角形, $\angle ABC = 120^\circ$, 点 S 在平面 $ABCD$ 内的射影 O 为线段 AD 的中点.

(I) 求证: 平面 $SOB \perp$ 平面 SBC ;

(II) 已知点 E 在线段 SB 上, $SE = \frac{3}{2}BE$, 求二面角 $B-OE-C$ 的余弦值.



关注北京高考在线官方微信: 北京高考资讯(微信号:bjgkzx), 获取更多试题资料及排名分析信息。

20. (12分)

已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点为 $F(\sqrt{3}, 0)$, 过点 F 与 x 轴垂直的直线 l_1 与双曲线 C 交于 M, N 两点, 且 $|MN| = 4$.

(I) 求 C 的方程;

(II) 过点 $A(0, -1)$ 的直线 l_2 与双曲线 C 的左、右两支分别交于 D, E 两点, 与双曲线 C 的两条渐近线分别交于 G, H 两点, 若 $|GH| = \lambda |DE|$, 求实数 λ 的取值范围.

21. (12分)

已知函数 $f(x) = mx \ln x + x^2, m \neq 0$.

(I) 若 $m = -2$, 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(II) 若 $f(x_1) = f(x_2) = 0$, 且 $x_1 \neq x_2$, 证明: $\ln x_1 + \ln x_2 > 2$.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22, 23 题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10分)

已知平面直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 1 + 2\sqrt{2} \sin \alpha \cos \alpha, \\ y = 2 - \sqrt{2} + 2\sqrt{2} \cos^2 \alpha \end{cases}$ (α 为参数), 以坐标原点 O

为极点, x 轴的正半轴为极轴, 建立极坐标系, 直线 l 的极坐标方程为 $\rho \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2} = 0$, 点 A 的极坐

标为 $\left(2, \frac{\pi}{2}\right)$.

(I) 求 C 的普通方程以及 l 的直角坐标方程;

(II) 若 l 与 C 交于 M, N 两点, 求 $||AM| - |AN||$ 的值.

23. [选修 4-5: 不等式选讲] (10分)

已知函数 $f(x) = |2x - 2| + |x + 1|$ 的最小值为 m .

(I) 求 m 的值;

(II) 若正数 a, b, c 满足 $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{m}{2}$, 求 $ab + bc$ 的最大值.

理科数学·答案

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.

1. B 2. C 3. A 4. B 5. A 6. C
7. D 8. D 9. C 10. C 11. B 12. A

二、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. -32 14. 60°
15. 11 710 16. $\pm\sqrt{6}$

三、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

17. 解析 (I) 估计这 600 名学生周末体育锻炼时间的平均数

$$\bar{x} = 35 \times 0.1 + 45 \times 0.2 + 55 \times 0.3 + 65 \times 0.15 + 75 \times 0.15 + 85 \times 0.1 = 58.5. \quad \dots\dots\dots (5 \text{ 分})$$

(II) 依题意,周末体育锻炼时间在 $[40, 50)$ 内的学生抽 6 人,在 $[50, 60)$ 内的学生抽 9 人,

$$\text{则 } P(X=0) = \frac{C_6^3}{C_{15}^3} = \frac{4}{91}, P(X=1) = \frac{C_6^2 C_9^1}{C_{15}^3} = \frac{27}{91}, P(X=2) = \frac{C_6^1 C_9^2}{C_{15}^3} = \frac{216}{455}, P(X=3) = \frac{C_9^3}{C_{15}^3} = \frac{12}{65}. \quad \dots\dots\dots (9 \text{ 分})$$

故 X 的分布列为:

X	0	1	2	3
P	$\frac{4}{91}$	$\frac{27}{91}$	$\frac{216}{455}$	$\frac{12}{65}$

$\dots\dots\dots (10 \text{ 分})$

$$\text{则 } E(X) = 0 \times \frac{4}{91} + 1 \times \frac{27}{91} + 2 \times \frac{216}{455} + 3 \times \frac{12}{65} = \frac{9}{5}. \quad \dots\dots\dots (12 \text{ 分})$$

18. 解析 (I) 设 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R ,由题意 $\pi R^2 = \frac{49\pi}{3}$,解得 $R = \frac{7\sqrt{3}}{3}$. $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$

$$\text{由条件及正弦定理可得 } \sin \angle ABC(1 + \cos C) = \sqrt{3} \sin C \sin \angle ABC, \quad \dots\dots\dots (3 \text{ 分})$$

$$\text{因为 } \sin \angle ABC \neq 0, \text{ 所以 } 1 + \cos C = \sqrt{3} \sin C, \text{ 即 } 2 \sin \left(C - \frac{\pi}{6} \right) = 1. \quad \dots\dots\dots (4 \text{ 分})$$

$$\text{因为 } 0 < C < \pi, \text{ 故 } C = \frac{\pi}{3}. \quad \dots\dots\dots (5 \text{ 分})$$

$$\text{故 } c = 2R \sin C = 2 \times \frac{7\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 7. \quad \dots\dots\dots (6 \text{ 分})$$

$$\text{(II) 因为 } a = 5, c = 7, C = \frac{\pi}{3}, \text{ 故 } \cos C = \frac{1}{2} = \frac{25 + b^2 - 49}{2 \times 5 \times b}, \text{ 得 } b^2 - 5b - 24 = 0,$$

$$\text{解得 } b = 8 (b = -3 \text{ 舍去}). \quad \dots\dots\dots (8 \text{ 分})$$

$$\text{由余弦定理可得 } \cos \angle ABC = \frac{5^2 + 7^2 - 8^2}{2 \times 5 \times 7} = \frac{1}{7}, \text{ 所以 } \sin \angle ABC = \frac{4\sqrt{3}}{7}. \quad \dots\dots\dots (9 \text{ 分})$$

$$\text{由 } \cos \angle AMC = \frac{\sqrt{21}}{7} \text{ 得 } \sin \angle AMC = \frac{2\sqrt{7}}{7}. \quad \dots\dots\dots (10 \text{ 分})$$

$$\text{故 } \sin \angle BAM = \sin(\angle ABC - \angle AMC) = \sin \angle ABC \cos \angle AMC - \cos \angle ABC \sin \angle AMC = \frac{10\sqrt{7}}{49}. \quad \dots\dots\dots (11 \text{ 分})$$

关注北京高考在线官方微信: [北京高考资讯\(微信号:bjgkzx\)](#), 获取更多试题资料及排名分析信息。

由正弦定理可得 $\frac{BM}{\sin \angle BAM} = \frac{AB}{\sin \angle AMB}$, 则 $BM = \frac{7}{\frac{2\sqrt{7}}{7}} \times \frac{10\sqrt{7}}{49} = 5$. (12分)

19. 解析 (I) 如图, 连接 BD . 在菱形 $ABCD$ 中, $\angle ABC = 120^\circ$, 故 $\triangle ABD$ 为等边三角形.

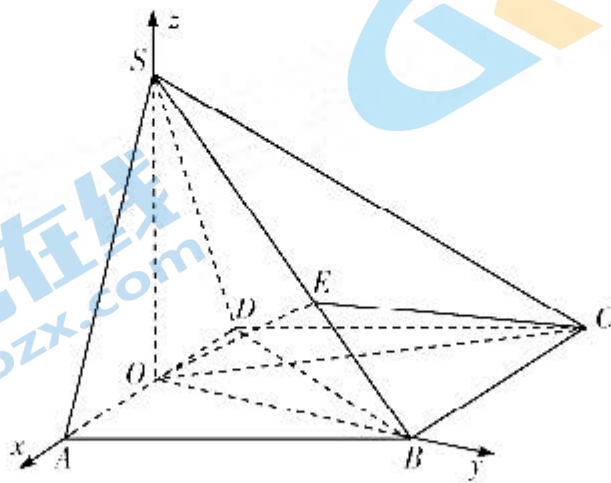
因为 O 为 AD 的中点, 所以 $OB \perp AD$. (1分)

因为 $AD \parallel BC$, 所以 $OB \perp BC$. (2分)

由条件可知 $SO \perp$ 底面 $ABCD$, 又 $BC \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $OS \perp BC$. (3分)

因为 $OS \cap OB = O$, $OS, OB \subset$ 平面 SOB , 所以 $BC \perp$ 平面 SOB . (4分)

因为 $BC \subset$ 平面 SBC , 故平面 $SOB \perp$ 平面 SBC . (5分)



(II) 因为 $SO \perp$ 底面 $ABCD$, $OB \perp AD$, 所以可建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$,

不妨设 $OA = 1$, 则 $OS = OB = \sqrt{3}$.

因为 $O(0,0,0), B(0,\sqrt{3},0), C(-2,\sqrt{3},0), S(0,0,\sqrt{3})$, 所以 $\overrightarrow{OC} = (-2,\sqrt{3},0)$.

由 $SE = \frac{3}{2}BE$, 得 $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OS} + \frac{3}{5}\overrightarrow{SB} = (0, \frac{3\sqrt{3}}{5}, \frac{2\sqrt{3}}{5})$. (7分)

设 $m = (x, y, z)$ 是平面 OEC 的法向量,

$$\text{由 } \begin{cases} \overrightarrow{OE} \cdot m = 0, \\ \overrightarrow{OC} \cdot m = 0, \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} 3y + 2z = 0, \\ 2x - \sqrt{3}y = 0, \end{cases}$$

令 $y = 2$, 则 $x = \sqrt{3}, z = -3$, 则 $m = (\sqrt{3}, 2, -3)$. (9分)

又因为平面 BOE 的一个法向量为 $n = (1, 0, 0)$, (10分)

所以 $\cos \langle m, n \rangle = \frac{m \cdot n}{|m||n|} = \frac{\sqrt{3}}{4}$. (11分)

故由图可知二面角 $B-OE-C$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$. (12分)

20. 解析 (I) 由题意得 $\begin{cases} \frac{3}{a^2} - \frac{4}{b^2} = 1, \\ a^2 + b^2 = 3, \end{cases}$ (2分)

解得 $\begin{cases} a^2 = 1, \\ b^2 = 2. \end{cases}$ (3分)

故 C 的方程为 $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$. (4分)

(II) 显然直线 l_2 的斜率存在, 设直线 l_2 的方程为 $y = kx - 1, D(x_1, y_1), E(x_2, y_2)$,

联立 $\begin{cases} y = kx - 1, \\ x^2 - \frac{y^2}{2} = 1, \end{cases}$ 得 $(2 - k^2)x^2 + 2kx - 3 = 0$. (5分)

关注北京高考在线官方微信: 北京高考资讯(微信号:bjgkzx), 获取更多试题资料及排名分析信息。

因为 l_2 与双曲线 C 的左、右两支分别交于 D, E 两点,

$$\text{故} \begin{cases} 2 - k^2 \neq 0, \\ x_1 x_2 = \frac{3}{k^2 - 2} < 0, \text{ 解得 } -\sqrt{2} < k < \sqrt{2}, \\ \Delta = 8(3 - k^2) > 0, \end{cases} \dots\dots\dots (6 \text{ 分})$$

此时有 $x_1 + x_2 = \frac{2k}{k^2 - 2}$,

$$|DE| = \sqrt{1+k^2} \cdot |x_1 - x_2| = \sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{1+k^2} \cdot \frac{2\sqrt{2(3-k^2)}}{2-k^2}, \dots\dots\dots (8 \text{ 分})$$

$$\text{由} \begin{cases} y = kx - 1, \\ y = \sqrt{2}x, \end{cases} \text{ 解得 } x_G = \frac{1}{k - \sqrt{2}}, \text{ 同理可得 } x_H = \frac{1}{k + \sqrt{2}}, \dots\dots\dots (9 \text{ 分})$$

$$\text{所以 } |GH| = \sqrt{1+k^2} \cdot \left| \frac{1}{k - \sqrt{2}} - \frac{1}{k + \sqrt{2}} \right| = \frac{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{1+k^2}}{2-k^2}, \dots\dots\dots (10 \text{ 分})$$

$$\text{因为 } |GH| = \lambda |DE|, \text{ 故 } \lambda = \frac{|GH|}{|DE|} = \frac{1}{\sqrt{3-k^2}}, \dots\dots\dots (11 \text{ 分})$$

$$\text{因为 } -\sqrt{2} < k < \sqrt{2}, \text{ 故 } \frac{\sqrt{3}}{3} \leq \lambda < 1, \text{ 故实数 } \lambda \text{ 的取值范围是 } \left[\frac{\sqrt{3}}{3}, 1 \right). \dots\dots\dots (12 \text{ 分})$$

21. 解析 (I) 依题意 $f(x) = -2x \ln x + x^2$,

$$f'(x) = -2 \ln x - 2 + 2x = 2(x - \ln x - 1), \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$\text{令 } g(x) = x - \ln x - 1, \text{ 则 } g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} (x > 0), \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

当 $x \in (0, 1)$ 时, $g'(x) < 0$, 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$,

故函数 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, $\dots\dots\dots (3 \text{ 分})$

则 $g(x) \geq g(1) = 0$, 即 $f'(x) \geq 0$, $\dots\dots\dots (4 \text{ 分})$

故函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, +\infty)$, 无单调递减区间. $\dots\dots\dots (5 \text{ 分})$

(II) 要证 $\ln x_1 + \ln x_2 > 2$, 即证 $\ln(x_1 x_2) > 2$.

依题意, x_1, x_2 是方程 $m x \ln x + x^2 = 0$ 的两个不等实数根, 不妨令 $x_1 > x_2$,

$$\text{因为 } x > 0, \text{ 故} \begin{cases} m \ln x_1 + x_1 = 0, \\ m \ln x_2 + x_2 = 0, \end{cases}$$

两式相加可得 $m(\ln x_1 + \ln x_2) + (x_1 + x_2) = 0$

两式相减可得 $m(\ln x_1 - \ln x_2) + (x_1 - x_2) = 0$,

$$\text{消去 } m, \text{ 整理得 } \frac{\ln(x_1 x_2)}{\ln \frac{x_1}{x_2}} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 - x_2},$$

$$\text{故 } \ln(x_1 x_2) = \ln \frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{x_1 + x_2}{x_1 - x_2} = \ln \frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{\frac{x_1}{x_2} + 1}{\frac{x_1}{x_2} - 1}, \dots\dots\dots (8 \text{ 分})$$

$$\text{令 } \frac{x_1}{x_2} = t > 1, \text{ 故只需证明 } \ln t \cdot \frac{t+1}{t-1} > 2, \text{ 即证明 } \ln t > \frac{2(t-1)}{t+1}, \dots\dots\dots (10 \text{ 分})$$

设 $h(t) = \ln t - \frac{2(t-1)}{t+1}$, 则 $h'(t) = \frac{1}{t} - \frac{2(t-1)}{(t+1)^2} = \frac{t+2t-2}{t(t+1)^2} = \frac{3t-2}{t(t+1)^2}$, 当 $t > \frac{2}{3}$ 时, $h'(t) > 0$, 故 $h(t)$ 在 $(\frac{2}{3}, +\infty)$ 上单调递增, 故 $h(t) > h(\frac{2}{3}) = \ln \frac{2}{3} - \frac{2(\frac{2}{3}-1)}{\frac{2}{3}+1} = \ln \frac{2}{3} + \frac{2}{5} > 0$, 故 $h(t) > 0$, 即 $\ln t > \frac{2(t-1)}{t+1}$.

从而 $h(t) > h(1) = 0$, 因此 $\ln t > \frac{2(t-1)}{t+1}$.

故原不等式得证. (12分)

22. 解析 (I) $C: \begin{cases} x = 1 + \sqrt{2} \sin 2\alpha, \\ y = 2 + \sqrt{2} \cos 2\alpha \end{cases}$ (α 为参数), (1分)

故 C 的普通方程为 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 2$ (2分)

由 l 的极坐标方程可得 $\frac{\sqrt{2}}{2}\rho \cos \theta - \frac{\sqrt{2}}{2}\rho \sin \theta + \sqrt{2} = 0$, (3分)

即 $\rho \cos \theta - \rho \sin \theta + 2 = 0$, 故 l 的直角坐标方程为 $x - y + 2 = 0$ (4分)

(II) 依题意 $A(0, 2)$, l 的参数方程可写为 $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}t, \\ y = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$ (t 为参数), (5分)

将 l 的参数方程代入 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 2$ 中, 整理得 $t^2 - \sqrt{2}t - 1 = 0$ (7分)

则 $\Delta > 0$, 设 t_1, t_2 是方程的两个实数根, 则 $t_1 + t_2 = \sqrt{2}, t_1 t_2 = -1$ (8分)

故 $|AM| - |AN| = |t_1| - |t_2| = |t_1 + t_2| = \sqrt{2}$ (10分)

23. 解析 (I) 依题意 $f(x) = \begin{cases} 1 - 3x, & x < -1, \\ 3 - x, & -1 \leq x < 1, \\ 3x - 1, & x \geq 1, \end{cases}$ (3分)

则当 $x = 1$ 时, 函数 $f(x)$ 取得最小值 $m = 2$ (5分)

(II) 依题意 $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, (6分)

因为 $a^2 + \frac{b^2}{2} \geq \sqrt{2}ab, \frac{b^2}{2} + c^2 \geq \sqrt{2}bc$, (7分)

所以 $ab + bc \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \left(a^2 + \frac{b^2}{2} \right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{b^2}{2} + c^2 \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} (a^2 + b^2 + c^2) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, (9分)

当且仅当 $a = \frac{b}{\sqrt{2}} = c = \frac{1}{2}$ 时取等号, 故 $ab + bc$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (10分)

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯