广深珠三校 2020 届高三第一次联考

理科数学

本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分．满分 150 分．考试时间 120 分钟．

第Ⅰ卷(选择题　共 60 分)

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，满分 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项符合要求．

1．已知集合 A＝{x｜ $y=\lg(2-x)$ }，B＝{ $x|x^2-3x\le 0$ }，则 A∩B＝.

A. {x | 0＜x＜2}　　B. {x | 0≤x＜2}

C. {x | 2＜x＜3}　　D. {x | 2＜x≤3}

2．若复数 z 的共轭复数满足 $(1-i)\overline{Z}=-1+2i$,则 $|Z|=$.

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\frac{3}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{10}}{2}$　　D. $\frac{1}{2}$

3．下列有关命题的说法错误的是.

A. 若“$p\vee q$”为假命题，则 p 、q 均为假命题；

B. 若 α、β 是两个不同平面，$m\perp\alpha$,$m\subset\beta$，则 $\alpha\perp\beta$；

C. “$\sin x=\frac{1}{2}$”的必要不充分条件是“$x=\frac{\pi}{6}$”；

D. 若命题 p：$\exists x_0\in R, x_0^2\ge 0$，则命题：$\neg P:\forall x\in R, x^2<0$；

4．已知某离散型随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	m	$\frac{1}{27}$

则 X 的数学期望 $E(X)=$.

A. $\frac{2}{3}$　　B. 1　　C. $\frac{3}{2}$　　D. 2

5．已知向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 均为非零向量，$(\vec{a}-2\vec{b})\perp\vec{a}$，$|\vec{a}|=|\vec{b}|$，则 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 的夹角为.

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{2\pi}{3}$　　D. $\frac{5\pi}{6}$

6. 若 $\cos\left(\frac{\pi}{8}-\alpha\right)=\frac{1}{6}$，则 $\cos\left(\frac{3\pi}{4}+2\alpha\right)$ 的值为.

A. $\frac{17}{18}$　　B. $-\frac{17}{18}$　　C. $\frac{18}{19}$　　D. $-\frac{18}{19}$

7. 若直线 $mx+ny+2=0\left(m>0、n>0\right)$ 截得圆 $\left(x+3\right)^2+\left(y+1\right)^2=1$ 的弦长为 2，则 $\frac{1}{m}+\frac{3}{n}$ 的最小值为.

A. 4　　B. 12　　C. 16　　D. 6

8. 设抛物线 C：$y^2=4x$ 的焦点为 F，过点（−2，0）且斜率为 $\frac{2}{3}$ 的直线与 C 交于 M，N 两点，则 $\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}=$.

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8

9. 已知定义在 R 上的偶函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin(\omega x+\varphi)-\cos(\omega x+\varphi)\left(\varphi\in(0,\pi),\omega>0\right)$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $f(x)+f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=0$，当 ω 取最小值时，$f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ 的值为.

A. 1　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

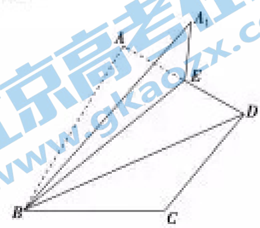
10. 在如图直二面角 A-BD-C 中，△ABD、△CBD 均是以 BD 为斜边的等腰直角三角形，取 AD 的中点 E，将△ABE 沿 BE 翻折到△A_1BE，在△ABE 的翻折过程中，下列不可能成立的是.

A. BC 与平面 A_1BE 内某直线平行

B. CD∥平面 A_1BE

C. BC 与平面 A_1BE 内某直线垂直

D. BC⊥A_1B



11. 定义 $\frac{n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}$ 为 n 个正数 p_1、p_2、⋯、p_n 的"均倒数"，若已知正整数数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的"均倒数"为 $\frac{1}{2n+1}$，又 $b_n=\frac{a_n+1}{4}$，则 $\frac{1}{b_1b_2}+\frac{1}{b_2b_3}+\cdots+\frac{1}{b_{10}b_{11}}=$

A. $\frac{1}{11}$　　B. $\frac{1}{12}$　　C. $\frac{10}{11}$　　D. $\frac{11}{12}$

12. 已知函数 $f(x)=xe^x-mx+\frac{m}{2}$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个零点，则 m 的取值范围是.

A. $(0,e)$　　B. $(0,2e)$　　C. $(e,+\infty)$　　D. $(2e,+\infty)$

第 II 卷（非选择题 共 90 分）

本卷包括必考题和选考题两部分．第 13-21 题为必考题，每个试题考生都必须作答，第 22-23 题为选考题，考生根据要求作答．

二、填空题:本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分

13．设 x,y 满足约束条件 $\begin{cases} y\geq -1 \\ x-y\geq 2 \\ 3x+y\leq 14 \end{cases}$，则 $z=4x+y$ 的最大值为________；

14．若 $(\frac{3}{x}-\sqrt{x})^n$ 的展开式中各项系数之和为 32，则展开式中 x 的系数为________；

15．已知点 P 在双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 上，$PF\perp x$ 轴(其中 F 为双曲线的右焦点)，点 P 到该双曲线的两条渐近线的距离之比为 $\frac{1}{3}$，则该双曲线的离心率为________；

16．已知三棱锥 $P-ABC$ 的所有顶点都在球 O 的球面上，$PA\perp$ 平面 ABC，$AB=AC=2$，$\angle BAC=120^\circ$，若三棱锥 $P-ABC$ 的体积为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$，则球 O 的表面积为________；

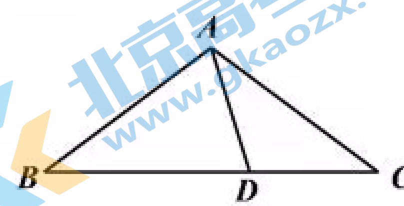
三、解答题：解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤

17．（本小题满分 12 分）

如图，在 $\triangle ABC$ 中，角 A、B、C 所对的边分别为 a、b、c，$2b\sin C\cos A+a\sin A=2c\sin B$；

（1）证明：$\triangle ABC$ 为等腰三角形；

（2）若 D 为 BC 边上的点，$BD=2DC$，且 $\angle ADB=2\angle ACD$，$a=3$，求 b 的值．

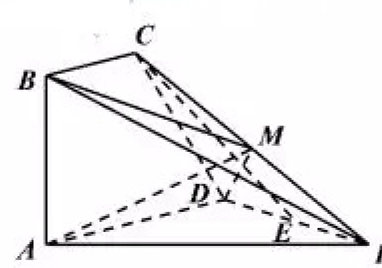


18．（本小题满分 12 分）

如图，四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 为直角梯形，$BC//AD$，且 $AD=2AB=2BC=2$，$\angle BAD=90^\circ$，ΔPAD 为等边三角形，平面 $ABCD\perp$ 平面 PAD；点 E、M 分别为 PD、PC 的中点．

（1）证明：$CE//$ 平面 PAB；

（2）求直线 DM 与平面 ABM 所成角的正弦值．



19. （本小题满分 12 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，且经过点 $\left(-1,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

（1）求椭圆 C 的标准方程；

（2）过点 $\left(\sqrt{3},0\right)$ 作直线 l 与椭圆 C 交于不同的 A、B 两点，试问在 x 轴上是否存在定点 Q，使得直线 QA 与直线 QB 恰好关于 x 轴对称？若存在，求出点 Q 的坐标；若不存在，说明理由.

20.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=x-\ln x-2$.

（1）求曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程；

（2）函数 $f(x)$ 在区间 $(k,k+1)(k\in\mathbf{N})$ 上有零点，求 k 的值；

（3）若不等式 $\dfrac{(x-m)(x-1)}{x}>f(x)$ 对任意正实数 x 恒成立，求正整数 m 的取值集合.

21. （本小题满分 12 分）

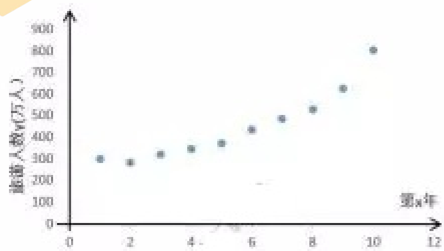
某景区的各景点从 2009 年取消门票实行免费开放后，旅游的人数不断地增加，不仅带动了该市淡季的旅游，而且优化了旅游产业的结构，促进了该市旅游向“观光、休闲、会展”三轮驱动的理想结构快速转变. 下表是从 2009 年至 2018 年，该景点的旅游人数 y（万人）与年份 x 的数据：

第 x 年	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
旅游人数 y（万人）	300	283	321	345	372	435	486	527	622	800

该景点为了预测 2021 年的旅游人数，建立了 y 与 x 的两个回归模型：

模型①：由最小二乘法公式求得 y 与 x 的线性回归方程 $\hat{y}=50.8x+169.7$；

模型②：由散点图的样本点分布，可以认为样本点集中在曲线 $y=ae^{bx}$ 的附近.



（1）根据表中数据，求模型②的回归方程 $\hat{y}=ae^{bx}$.（a 精确到个位，b 精确到 0．01）.

（2）根据下列表中的数据，比较两种模型的相关指数 R^2，并选择拟合精度更高、更可靠的模型，预测 2021 年该景区的旅游人数（单位：万人，精确到个位）.

回归方程	① $y=50.8x+169.7$	② $y=ae^{bx}$
$\sum\limits_{i=1}^{10}(y_i-\hat{y}_i)^2$	30407	14607

参考公式、参考数据及说明：

①对于一组数据 $\left(v_1,w_1\right),\left(v_2,w_2\right),\cdots,\left(v_n,w_n\right)$，其回归直线 $\hat{w}=\hat{\alpha}+\hat{\beta}v$ 的斜率和截距的最小二乘法估计

分别为$\widehat{\beta}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(w_i-\overline{w})(v_i-\overline{v})}{\sum_{i=1}^{n}(v_i-\overline{v})^2}$, $\hat{a}=\overline{w}-\widehat{\beta}\overline{v}$.

②刻画回归效果的相关指数$R^2=1-\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}$

③参考数据：$e^{5.46}\approx 235$，$e^{1.43}\approx 4.2$.

$\overline{x}$	$\overline{y}$	$\overline{u}$	$\sum_{i=1}^{10}(x_i-\overline{x})^2$	$\sum_{i=1}^{10}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})$	$\sum_{i=1}^{10}(x_i-\overline{x})(u_i-\overline{u})$
5．5	449	6．05	83	4195	9．00

表中$u_i=\ln y_i, \overline{u}=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}u_i$.

请考生从第（22）、（23）两题中任选一题作答．如果多做，则按所做的第一个题目计分．

22．[选修 4-4：坐标系与参数方程](10 分）

在平面直角坐标系xOy中，曲线C_1的参数方程为$\begin{cases}x=2\cos\theta,\\ y=2\sin\theta,\end{cases}$（$\theta$为参数），已知点$Q(4,0)$，点$P$是曲线$C_1$上任意一点，点$M$为$PQ$的中点，以坐标原点为极点，$x$轴正半轴为极轴建立极坐标系.

（1）求点M的轨迹C_2的极坐标方程；

（2）已知直线l：$y=kx$与曲线C_2交于A,B两点，若$\overrightarrow{OA}=3\overrightarrow{AB}$，求$k$的值.

23．[选修 4-5：不等式选讲](10 分）

已知函数$f(x)=|ax+1|+|2x-1|$

（1）当$a=1$时，求不等式$f(x)>3$的解集；

（2）若$0<a<2$，且对任意$x\in\mathbf{R}$，$f(x)\geq\frac{3}{2a}$恒成立，求a的最小值.

广深珠三校 2020 届高三第一次联考

理科数学参考答案

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，满分 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项符合要求．

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	C	C	B	B	A	D	D	A	D	C	D

12、已知函数 $f(x)=xe^x-mx+\frac{m}{2}$ （e 为自然对数的底数）在 $(0,+\infty)$ 上有两个零点，则 m 的范围是（　　）

A. $(0,e)$　　　　B. $(0,2e)$　　　　C. $(e,+\infty)$　　　　D. $(2e,+\infty)$

【详解】

由 $f(x)=xe^x-mx+\frac{m}{2}=0$ 得 $xe^x=mx-\frac{m}{2}=m(x-\frac{1}{2})$，

当 $x=\frac{1}{2}$ 时，方程不成立，即 $x\neq\frac{1}{2}$，

则 $m=\dfrac{xe^x}{x-\frac{1}{2}}$，　设 $h(x)=\dfrac{xe^x}{x-\frac{1}{2}}$ （$x>0$ 且 $x\neq\frac{1}{2}$），

则 $h'(x)=\dfrac{(xe^x)'\left(x-\frac{1}{2}\right)-xe^x}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{e^x\left(x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{\frac{1}{2}e^x(x-1)(2x+1)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}$，

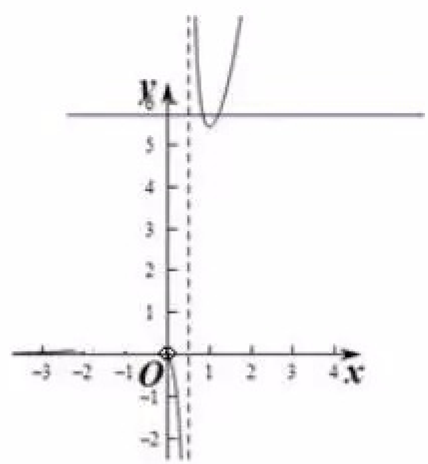
$\because x>0$ 且 $x\neq\frac{1}{2}$，$\therefore$ 由 $h'(x)=0$ 得 $x=1$，

当 $x>1$ 时，$h'(x)>0$，函数为增函数，

当 $0<x<1$ 且 $x\neq\frac{1}{2}$ 时，$h'(x)<0$，函数为减函数，

则当 $x=1$ 时函数取得极小值，极小值为 $h(1)=2e$，

当 $0<x<\frac{1}{2}$ 时，$h(x)<0$，且单调递减，作出函数 $h(x)$ 的图象如图：



故：要使 $m=\dfrac{xe^x}{x-\frac{1}{2}}$ 有两个不同的根，则 $m>2e$ 即可，

即实数 m 的取值范围是 $(2e,+\infty)$.

二、填空题:本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分

13. $\underline{19}$;　　14. $\underline{15}$;　　15. $\underline{\dfrac{2\sqrt{3}}{3}}$;　　16. $\underline{20\pi}$;

三、解答题：解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤

17.（本小题满分 12 分）

如图，在 $\triangle ABC$ 中，角 A、B、C 所对的边分别为 a、b、c，$2b\sin C\cos A+a\sin A=2c\sin B$；

（1）证明：$\triangle ABC$ 为等腰三角形；

（2）若 D 为 BC 边上的点，$BD=2DC$，且 $\angle ADB=2\angle ACD$，$a=3$，求 b 的值.

【详解】(1) $\because 2b\sin C\cos A+a\sin A=2c\sin B$，由正弦定理得：$2bc\cos A+a^2=2cb$　　…………2 分

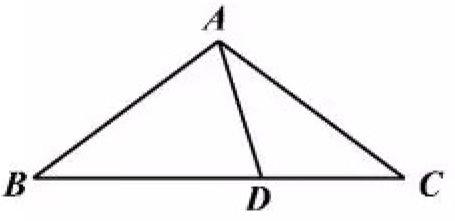
由余弦定理得：$2bc\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+a^2=2bc$；　　…………4 分

化简得：$b^2+c^2=2bc$，

所以 $(b-c)^2=0$ 即 $b=c$，　　…………5 分

故 $\triangle ABC$ 为等腰三角形.　　…………6 分

（2）如图，



由已知得 $BD=2$，$DC=1$，

$\because \angle ADB=2\angle ACD=\angle ACD+\angle DAC$，

$\therefore \angle ACD=\angle DAC$，

$\therefore AD=CD=1$，　　…………8 分

又 $\because \cos\angle ADB=-\cos\angle ADC$

$\therefore \dfrac{AD^2+BD^2-AB^2}{2AD\cdot BD}=-\dfrac{AD^2+CD^2-AC^2}{2AD\cdot CD}$，　　…………10 分

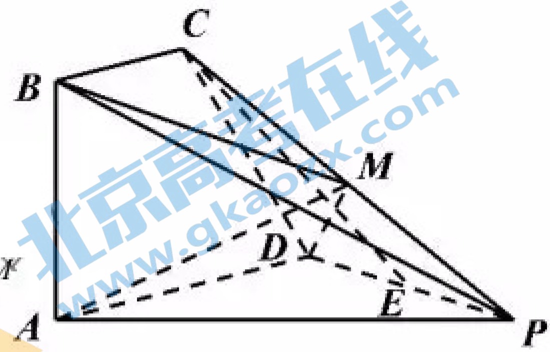
即 $\dfrac{1^2+2^2-c^2}{2\times2\times1}=-\dfrac{1^2+1^2-b^2}{2\times1\times1}$，

得 $2b^2+c^2=9$，由（1）可知 $b=c$，得 $b=\sqrt{3}$．　　…………12 分

18．（本小题满分 12 分）

如图，四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 为直角梯形，$BC//AD$，且 $AD=2AB=2BC=2,$

$\angle BAD=90°,\Delta PAD$ 为等边三角形，平面 $ABCD\perp$ 平面 PAD；点 E、M 分别为 PD、PC 的中点．



（1）证明：$CE//$ 平面 PAB；

（2）求直线 DM 与平面 ABM 所成角的正弦值．

【详解】（1）设 PA 的中点为 N，连接 EN、BN，

$\because E$ 为 PD 的中点，所以 EN 为 $\triangle PAD$ 的中位线，

则可得 $EN//AD$，且 $EN=\dfrac{1}{2}AD$，　　…………2 分

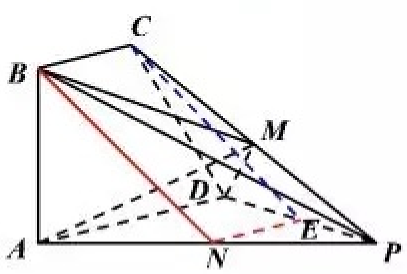
在梯形 $ABCD$ 中，$BC//AD$，且 $BC=\dfrac{1}{2}AD$，

$\therefore BC//EN,BC=EN$，

所以四边形 $ENBC$ 是平行四边形，　　…………4 分

$\therefore CE//BN$，又 $BN\subset$ 平面 PAB，$CE\not\subset$ 平面 PAB，

$\therefore CE//$ 平面 PAB．　　…………6 分



法二：设 O 为 AD 的中点，连接 CO,OE，

$\because E$ 为 PD 的中点，

所以 OE 是 $\triangle ADP$ 的中位线，所以 $OE//AP$，

又 $OE\not\subset$ 平面 PAB，$AP\subset$ 平面 PAB，

$\therefore OE//$ 平面 PAB，　　…………2 分

又在梯形 $ABCD$ 中，$BC//AD$，且 $BC=\dfrac{1}{2}AD$，

所以四边形 $BAOC$ 是平行四边形，

$\therefore BC//BA$，

又 $OC \not\subset$ 平面 PAB， AB Ì 平面 PAB，

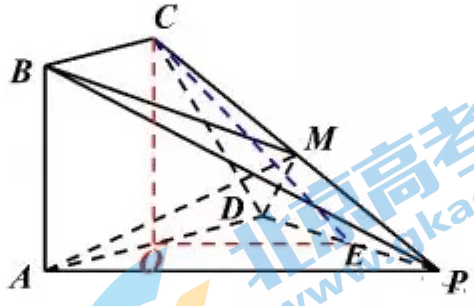
$\therefore OC//$ 平面 PAB， …………4 分

又 $\because OE \cap OC = O$，

所以平面 $OEC//$ 平面 PAB，

又 $CE \subset$ 平面 PAB，

$\therefore CE//$ 平面 PAB． …………6 分



（2）设 AD 的中点为 O， 又 $\because PA = PD, \therefore PO \perp AD$．

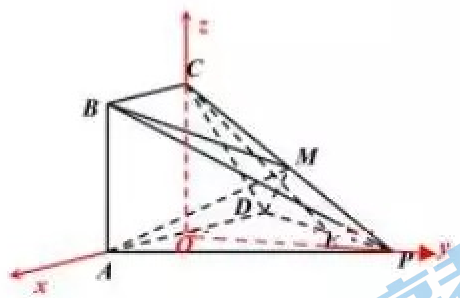
因为平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$，交线为 AD， $PO \subset$ 平面 PAD，

$\therefore PO \perp$ 平面 $ABCD$，

又由 $CO//BA$， $\angle BAD = 90°$，

$\therefore CO \perp AD$．

即有 OA, OC, OP 两两垂直，如图，以点 O 为原点， OA 为 x 轴， OP 为 y 轴， OC 为 z 轴建立坐标系．



…………7 分

已知点 $A(1,0,0), B(1,0,1), M\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right), D(-1,0,0), \overline{AB} = (0,0,1), \overline{AM} = \left(-1,\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$， ………8 分

设平面 ABM 的法向量为： $\vec{m} = (x, y, z)$．

则有 $\begin{cases} \vec{m} \cdot \overline{AB} = z = 0 \\ \vec{m} \cdot \overline{AM} = -x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{1}{2}z = 0 \end{cases}$ ，可得平面 ABM 的一个法向量为 $\vec{m} = (\sqrt{3}, 2, 0)$，

$\overrightarrow{DM}=\left(1,\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$， …………10 分

可得：$\cos\langle\vec{m},\overrightarrow{DM}\rangle=\frac{\vec{m}\cdot\overrightarrow{DM}}{|\vec{m}|\cdot|\overrightarrow{DM}|}=\frac{\sqrt{3}\times1+2\times\frac{\sqrt{3}}{2}+0\times\frac{1}{2}}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+2^2+0^2}\cdot\sqrt{1^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}}=\frac{\sqrt{42}}{7}$， …………11 分

所以直线 DM 与平面 ABM 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{42}}{7}$． …………12 分

19．（本小题满分 12 分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，且经过点 $\left(-1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

（1）求椭圆 C 的标准方程；

（2）过点 $(\sqrt{3},0)$ 作直线 l 与椭圆 C 交于不同的 A、B 两点，试问在 x 轴上是否存在定点 Q，使得直线 QA 与直线 QB 恰好关于 x 轴对称？若存在，求出点 Q 的坐标；若不存在，说明理由．

【详解】（Ⅰ）由题意可得 $\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{c}{a}$，$\frac{1}{a^2}+\frac{3}{4b^2}=1$，又 $a^2-b^2=c^2$， …………2 分

解得 $a^2=4$，$b^2=1$，.

所以，椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$． …………4 分

（Ⅱ）存在 x 轴上在定点 Q，使得直线 QA 与直线 QB 恰关于 x 轴对称，

设直线 l 的方程为 $x+my-\sqrt{3}=0$，与椭圆联立可得 $(4+m^2)y^2-2\sqrt{3}my-1=0$．

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，假设在 x 轴上存在定点 $Q(t,0)$．

$y_1+y_2=\frac{2\sqrt{3}m}{4+m^2}$，$y_1y_2=\frac{-1}{4+m^2}$． …………6 分

∵PN 与 QN 关于 x 轴对称，∴$k_{AQ}+k_{QB}=0$， …………7 分

即 $\frac{y_1}{x_1-t}+\frac{y_2}{x_2-t}=0\Rightarrow y_1(x_2-t)+y_2(x_1-t)=0$，

$\Rightarrow y_1(\sqrt{3}-my_2-t)+y_2(\sqrt{3}-my_1-t)=0$，

$\Rightarrow(\sqrt{3}-t)(y_1+y_2)-2my_1y_2=0$，

$\Rightarrow 2m(4-\sqrt{3}t)=0 \Rightarrow t=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$. …………9 分

$\therefore$ 在 x 轴上存在定点 $Q\left(\dfrac{4\sqrt{3}}{3},\ 0\right)$，使得直线 QA 与直线 QB 恰关于 x 轴对称. …………10 分

特别地，当直线 l 是 x 轴时，点 $Q\left(\dfrac{4\sqrt{3}}{3},\ 0\right)$，也使得直线 QA 与直线 QB 恰关于 x 轴对称. ……11 分

综上，在 x 轴上存在定点 $Q\left(\dfrac{4\sqrt{3}}{3},\ 0\right)$，使得直线 QA 与直线 QB 恰关于 x 轴对称. …………12 分

20.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=x-\ln x-2$.

（1）求曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程；

（2）函数 $f(x)$ 在区间 $(k,k+1)(k\in\mathbf{N})$ 上有零点，求 k 的值；

（3）若不等式 $\dfrac{(x-m)(x-1)}{x}>f(x)$ 对任意正实数 x 恒成立，求正整数 m 的取值集合.

【详解】（1）$f'(x)=1-\dfrac{1}{x}$，所以切线斜率为 $f'(1)=0$，

又 $f(1)=-1$，切点为 $(1,-1)$，所以切线方程为 $y=-1$. -------------2 分

（2）令 $f'(x)=1-\dfrac{1}{x}=0$，得 $x=1$，

当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 单调递减；

当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增，

所以 $f(x)$ 的极小值为 $f(1)=-1<0$，又 $f\left(\dfrac{1}{e^2}\right)=\dfrac{1}{e^2}-\ln\dfrac{1}{e^2}-2=\dfrac{1}{e^2}>0$，

所以 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上存在一个零点 x_1，此时 $k=0$；

因为 $f(3)=3-\ln 3-2=1-\ln 3<0$，$f(4)=4-\ln 4-2=2-2\ln 2=2(1-\ln 2)>0$，

所以 $f(x)$ 在区间 $(3,4)$ 上存在一个零点 x_2，此时 $k=3$. 综上，k 的值为 0 或 3. -------------6 分

（3）当 $x=1$ 时，不等式为 $g(1)=1>0$. 显然恒成立，此时 $m\in\mathbf{R}$；

当 $0<x<1$ 时，不等式 $\dfrac{(x-m)(x-1)}{x}>f(x)$ 可化为 $m>\dfrac{x\ln x+x}{x-1}$， ------------7 分

令 $g(x)=\dfrac{x\ln x+x}{x-1}$，则 $g'(x)=\dfrac{x-\ln x-2}{(x-1)^2}=\dfrac{f(x)}{(x-1)^2}$，

由（2）可知，函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，且存在一个零点 x_1，

此时 $f(x_1)=x_1-\ln x_1-2=0$，即 $\ln x_1=x_1-2$

所以当 $0<x<x_1$ 时，$f(x)>0$，即 $g'(x)>0$，函数 $g(x)$ 单调递增；

当 $x_1<x<1$ 时，$f(x)<0$，即 $g'(x)<0$，函数 $g(x)$ 单调递减.

所以 $g(x)$ 有极大值即最大值 $g(x_1)=\dfrac{x_1\ln x_1+x_1}{x_1-1}=\dfrac{x_1(x_1-2)+x_1}{x_1-1}=x_1$，于是 $m>x_1$. ------------9 分

当 $x>1$ 时，不等式 $\dfrac{(x-m)(x-1)}{x}>f(x)$ 可化为 $m<\dfrac{x\ln x+x}{x-1}$，

由（2）可知，函数 $f(x)$ 在 $(3,4)$ 上单调递增，且存在一个零点 x_2，同理可得 $m<x_2$．

综上可知 $x_1<m<x_2$．

又因为 $x_1\in(0,1),\ x_2\in(3,4)$，所以正整数 m 的取值集合为 $\{1,2,3\}$．　　------------12 分

21．（本小题满分 12 分）

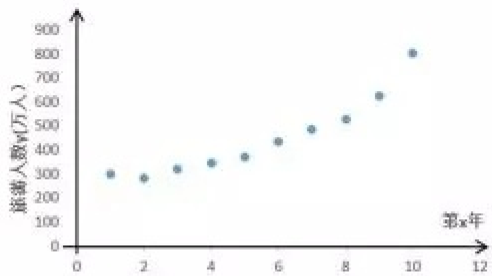
某景区的各景点从 2009 年取消门票实行免费开放后，旅游的人数不断地增加，不仅带动了该市淡季的旅游，而且优化了旅游产业的结构，促进了该市旅游向“观光、休闲、会展”三轮驱动的理想结构快速转变．下表是从 2009 年至 2018 年，该景点的旅游人数 y（万人）与年份 x 的数据：

第 x 年	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
旅游人数 y（万人）	300	283	321	345	372	435	486	527	622	800

该景点为了预测 2021 年的旅游人数，建立了 y 与 x 的两个回归模型：

模型①：由最小二乘法公式求得 y 与 x 的线性回归方程 $\hat{y}=50.8x+169.7$；

模型②：由散点图的样本点分布，可以认为样本点集中在曲线 $y=ae^{bx}$ 的附近．



（1）根据表中数据，求模型②的回归方程 $\hat{y}=ae^{bx}$．

（a 精确到个位，b 精确到 0．01）．

（2）根据下列表中的数据，比较两种模型的相关指数 R^2，并选择拟合精度更高、更可靠的模型，预测 2021 年该景区的旅游人数（单位：万人，精确到个位）．

回归方程	① $y=50.8x+169.7$	② $y=ae^{bx}$
$\sum\limits_{i=1}^{10}(y_i-\hat{y}_i)^2$	30407	14607

参考公式、参考数据及说明：

①对于一组数据 $(v_1,w_1),(v_2,w_2),\cdots,(v_n,w_n)$，其回归直线 $\hat{w}=\hat{\alpha}+\hat{\beta}v$ 的斜率和截距的最小二乘法估计分别为 $\hat{\beta}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(w_i-\overline{w})(v_i-\overline{v})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(v_i-\overline{v})^2},\hat{\alpha}=\overline{w}-\hat{\beta}\overline{v}$．

②刻画回归效果的相关指数 $R^2=1-\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}$．

③参考数据：$e^{5.46}\approx 235$，$e^{1.43}\approx 4.2$．

$\overline{x}$	$\overline{y}$	$\overline{u}$	$\sum\limits_{i=1}^{10}(x_i-\overline{x})^2$	$\sum\limits_{i=1}^{10}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})$	$\sum\limits_{i=1}^{10}(x_i-\overline{x})(u_i-\overline{u})$
5．5	449	6．05	83	4195	9．00

表中 $u_i=\ln y_i, \overline{u}=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}u_i$.

解：（1）对 $y=ae^{bx}$ 取对数，得 $\ln y=bx+\ln a$， ......1 分

设 $u=\ln y$， $c=\ln a$，先建立 u 关于 x 的线性回归方程。

$$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{10}\left(x_i-\overline{x}\right)\left(u_i-\overline{u}\right)}{\sum_{i=1}^{10}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}=\frac{9.00}{83}\approx 0.108,$$ ......3 分

$$\hat{c}=\overline{u}-\hat{b}\overline{x}\approx 6.05-0.108\times 5.5=5.456\approx 5.46$$ ......5 分

$\hat{a}=e^{\hat{c}}\approx e^{5.46}\approx 235$ ......6 分

$\therefore$ 模型②的回归方程为 $\hat{y}=235e^{0.11x}$。 ......7 分

（2）由表格中的数据，有 30407>14607，即 $\frac{30407}{\sum_{i=1}^{10}(y_i-\overline{y})^2}>\frac{14607}{\sum_{i=1}^{10}(y_i-\overline{y})^2}$， ......9 分

即 $1-\frac{30407}{\sum_{i=1}^{10}(y_i-\overline{y})^2}<1-\frac{14607}{\sum_{i=1}^{10}(y_i-\overline{y})^2}$， $R_1^2<R_2^2$ ......10 分

模型①的相关指数 R_1^2 小于模型②的 R_2^2，说明回归模型②的拟合效果更好。 ......11 分

2021 年时， $x=13$，预测旅游人数为 $\hat{y}=235e^{0.11\times 13}=235e^{1.43}\approx 235\times 4.2=987$（万人） ......12 分

请考生从第（22）、（23）两题中任选一题作答．如果多做，则按所做的第一个题目计分．

22．[选修 4-4：坐标系与参数方程](10 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=2\cos\theta,\\ y=2\sin\theta,\end{cases}$（$\theta$为参数），已知点 $Q(4,0)$，点 P 是曲线 C_1 上任意一点，点 M 为 PQ 的中点，以坐标原点为极点，x轴正半轴为极轴建立极坐标系．

（1）求点 M 的轨迹 C_2 的极坐标方程；

（2）已知直线 l： $y=kx$ 与曲线 C_2 交于 A,B 两点，若 $\overrightarrow{OA}=3\overrightarrow{AB}$，求 k 的值．

【详解】（1）设 $P\left(2\cos\theta,2\sin\theta\right)$， $M\left(x,y\right)$．且点 $Q\left(4,0\right)$，由点 M 为 PQ 的中点，

所以$\begin{cases} x=\dfrac{2\cos\theta+4}{2}=2+cos\theta, \\ y=\dfrac{2\sin\theta}{2}=sin\theta, \end{cases}$ ……3 分

整理得$(x-2)^2+y^2=1$. 即$x^2+y^2-4x+3=0$,

化为极坐标方程为$\rho^2-4\rho\cos\theta+3=0$. ……5 分

（2）设直线l：$y=kx$的极坐标方程为$\theta=\alpha$. 设$A(\rho_1,\alpha)$，$B(\rho_2,\alpha)$，

因为$\overline{OA}=3\overline{AB}$，所以$4\overline{OA}=3\overline{OB}$，即$4\rho_1=3\rho_2$. ……6 分

联立$\begin{cases} \rho^2-4\rho cos\theta+3=0, \\ \theta=\alpha, \end{cases}$整理得$\rho^2-4\cos\alpha\cdot\rho+3=0$. ……7 分

则$\begin{cases} \rho_1+\rho_2=4cos\alpha, \\ \rho_1\rho_2=3, \\ 4\rho_1=3\rho_2, \end{cases}$ 解得$\cos\alpha=\dfrac{7}{8}$. ……9 分

所以$k^2=\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-1=\dfrac{15}{49}$，则$k=\pm\dfrac{\sqrt{15}}{7}$. ……10 分

23．[选修 4-5：不等式选讲](10 分）

已知函数$f(x)=|ax+1|+|2x-1|$

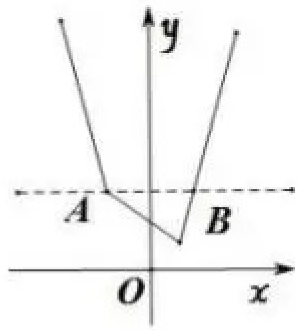
（1）当$a=1$时，求不等式$f(x)>3$的解集；

（2）若$0<a<2$，且对任意$x\in\mathbf{R}$，$f(x)\ge\dfrac{3}{2a}$恒成立，求a的最小值.

【详解】（1）当$a=1$时，$f(x)=|x+1|+|2x-1|$ 即$f(x)=\begin{cases} -3x, x<-1 \\ -x+2, -1\le x\le\dfrac{1}{2}, \\ 3x, x>\dfrac{1}{2} \end{cases}$ ……3

分

解法一：作函数$f(x)=|x+1|+|2x-1|$的图象，它与直线$y=3$的交点为$A(-1,3),B(1,3)$，



……4 分

所以，$f(x)>3$ 的解集的解集为 $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$. ……5 分

解法 2：原不等式 $f(x)>3$ 等价于 $\begin{cases}x<-1\\-3x>3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}-1\le x\le\frac{1}{2}\\-x+2>3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x>\frac{1}{2}\\3x>3\end{cases}$， ……3 分

解得：$x<-1$ 或无解或 $x>1$，

所以，$f(x)>3$ 的解集为 $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$. ……5 分

（2）$\because 0<a<2,\therefore -\frac{1}{a}\left\langle\frac{1}{2},a+2\right\rangle 0,a-2<0$. ……6

分

则 $f(x)=|ax+1|+|2x-1|=\begin{cases}-(a+2)x,x<-\frac{1}{a},\\(a-2)x+2,-\frac{1}{a}\le x\le\frac{1}{2},\\(a+2)x,x>\frac{1}{2}\end{cases}$ ……7 分

所以函数 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,-\frac{1}{a}\right)$ 上单调递减，在 $\left[-\frac{1}{a},\frac{1}{2}\right]$ 上单调递减，在 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递增.

所以当 $x=\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 取得最小值，$f(x)_{\min}=f\left(\frac{1}{2}\right)=1+\frac{a}{2}$. ……8 分

因为对 $\forall x\in R$，$f(x)\ge\frac{3}{2a}$ 恒成立，

所以 $f(x)_{\min}=1+\frac{a}{2}\ge\frac{3}{2a}$. ……9 分

又因为 $a>0$，

所以 $a^2+2a-3\ge0$，解得 $a\ge1$ （$a\le-3$ 不合题意）.

所以 a 的最小值为 1. ……10 分