2023 北京理工大附中高二 3 月月考

数　学

（2023.03）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 复数 $\dfrac{1}{i+1}$ 在复平面内对应的点位于（　）

A．第一象限　B．第二象限　C．第三象限　D．第四象限

2. 函数 $y=3x-x^3$ 的单调增区间为（　）

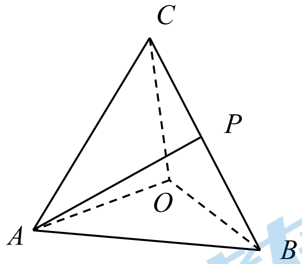
A．$(-1,1)$　B．$(-\infty,-1)$　C．$(0,+\infty)$　D．$(1,+\infty)$

3. 函数 $y=x-\ln x$（　）

A．有极大值 1，无极小值　B．无极大值，也无极小值

C．有极小值 0，极大值 1　D．有极小值 1，无极大值

4. 在四面体 $O-ABC$ 中，点 P 为棱 BC 的中点. 设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，那么向量 $\overrightarrow{AP}$ 用基底 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ 可表示为（　）



A．$-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{c}$　B．$-\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{c}$

C．$\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{c}$　D．$\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{c}$

5. 已知 $\{a_n\}$ 为等比数列，S_n 为其前 n 项和，若 $S_2=3a_1$，$a_2^2=a_3$，则 $S_4=$（　）

A．7　B．8　C．15　D．31

6. 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列，S_n 是其前 n 项和. 则“$a_4>a_3$”是“对于任意 $n\in\mathrm{N}^*$ 且 $n\neq3$，$S_n>S_3$”的（　）

A．充分而不必要条件　B．必要而不充分条件

C．充要条件　D．既不充分也不必要条件

7. 已知抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点为 F，准线为 l，P 为 C 上一点，过 P 作 l 的垂线，垂足为 M .若 $|MF|=|PF|$，则 $|PM|=$（　）

A．2　B．$\sqrt{3}$　C．4　D．$2\sqrt{3}$

8. 设 $a\neq0$，若 $x=a$ 为函数 $f(x)=a(x-a)^2(x-b)$ 的极大值点，则(　　)

A．$a<b$　B．$a>b$　C．$ab<a^2$　D．$ab>a^2$

9. 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=n^2-3n$，$n\in N$，前 n 项和为 S_n，给出

下列三个结论：

①存在正整数 $m,n(m\neq n)$，使得 $S_m=S_n$；

②存在正整数 $m,n(m\neq n)$，使得 $a_m+a_n=2\sqrt{a_m a_n}$；

③记 $T_n=a_1a_2\cdots a_n(1,2,3,\ldots)$ 则数列 $\{T_n\}$ 有最小项，

其中所有正确结论的序号是（　）

A. ①　　B. ③　　C. ①③　　D. ①②③

10. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}e^x-1, x\geq 0\\ kx, x<0\end{cases}$，若存在非零实数 x_0，使得 $f(-x_0)=f(x_0)$ 成立，则实数 k 的取值范围是（　　）

A. $(-\infty,-1)$　　B. $(-\infty,-1]$　　C. $(-1,0)$　　D. $[-1,0)$

二、填空题（本大题共 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分）

11. 双曲线 $C:x^2-\frac{y^2}{b^2}=1\,(b>0)$ 的两条渐近线互相垂直，则 $b=$__；C 的离心率为__.

12. 若曲线 $f(x)=ax^2+\ln x$ 存在垂直于 y 轴的切线，则实数 a 取值范围是__.

13. 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列，$a_1=5$，且 a_2+2，a_3+4，a_4+6 成等比数列，则 $a_6=$___；$\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=$___.

14. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\ln x-kx, & x>0,\\ kx^2-x+1, & x\leq 0.\end{cases}$ 若 $f(x)$ 恰有两个零点，则 k 的取值范围为___.

15. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n=n\cdot k^n(n\in\mathbf{N}^*,0<k<1)$，

①当 $k=\frac{1}{2}$ 时，数列 $\{a_n\}$ 为递减数列;

②当 $\frac{1}{2}<k<1$ 时，数列 $\{a_n\}$ 不一定有最大项;

③当 $0<k<\frac{1}{2}$ 时，数列 $\{a_n\}$ 为递减数列;

④当 $\frac{k}{1-k}$ 为正整数时，数列 $\{a_n\}$ 必有两项相等的最大项.

所有正确命题的序号是__.

三、解答题(共 4 小题，共 40 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程)

16. （本小题共 10 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $S_n=\frac{3}{2}a_n-1\,(n\in\mathbf{N}^*)$.

（Ⅰ）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

（Ⅱ）在数列 $\{b_n\}$ 中，$b_1=5$，$b_{n+1}=b_n+a_n$，求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式.

17.（本小题共 10 分）

设函数 $f(x)=x^3+bx+c$，曲线 $y=f(x)$ 在点($\frac{1}{2}$，$f(\frac{1}{2})$)处的切线与 y 轴垂直.

（Ⅰ）若 $c=0$，求 $f(x)$ 在区间 $\left[-1,\frac{3}{2}\right]$ 上的值域；

（Ⅱ）若 $f(x)$ 有三个零点，求实数 c 的取值范围；

（Ⅲ）当 $f(x)$ 有三个零点 x_1、x_2、x_3，且满足 $x_1<x_2<x_3$，记 $d=|x_1-x_3|$，请直接写出 d 的取值范围.

18.（本小题共 10 分）

已知函数 $f(x)=\ln(ax+1)+\frac{1-x}{1+x}$（$x\geq 0$，$a$ 为正实数）.

（Ⅰ）若 $a=1$，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅲ）若函数 $f(x)$ 的最小值为 1，求 a 的取值范围.

19.（本小题共 10 分）

数字 $1,2,3,\cdots,n$ $(n\geqslant 2)$ 的任意一个排列记作 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，设 S_n 为所有这样的排列构成的集合.

集合 $A_n=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in S_n\mid$ 任意整数 $i,j,1\leqslant i<j\leqslant n$，都有 $a_i-i\leqslant a_j-j\}$；集合 $B_n=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in S_n\mid$ 任意整数 $i,j,1\leqslant i<j\leqslant n$，都有 $a_i+i\leqslant a_j+j\}$.

（Ⅰ）用列举法表示集合 A_3，B_3；

（Ⅱ）求集合 $A_n\cap B_n$ 的元素个数；

（Ⅲ）记集合 B_n 的元素个数为 b_n. 证明：数列 $\{b_n\}$ 是等比数列.

参考答案

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	A	D	B	C	B	C	D	C	A

二、填空题（本大题共 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分）

11. $1,\sqrt{2}$　　12. $(-\infty,0)$　　13. $-5,-n^2+6n$

14. $(-\infty,0)\cup(0,\frac{1}{e})$　　15. ③④

三、解答题(共 4 小题，共 40 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程)

16. 解析：（1）当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=\frac{3}{2}a_1-1$，得：$a_1=2$

当 $n\ge 2$ 时，$\begin{cases}S_n=\frac{3}{2}a_n-1\\ S_{n-1}=\frac{3}{2}a_{n-1}-1\end{cases}$，作差可得：$a_n=\frac{3}{2}a_n-\frac{3}{2}a_{n-1}$，

则 $a_n=3a_{n-1}$

由 $a_1\ne 0$，则 $\{a_n\}$ 为公比为 3 的等比数列

则通项公式为 $a_n=2\times 3^{n-1}$

（2）由题可知，$b_1=5$，$b_{n+1}-b_n=a_n=2\times 3^{n-1}$，

则 $b_2-b_1=2,b_3-b_2=2\times 3,\cdots\cdots$，$b_n-b_{n-1}=a_{n-1}=2\times 3^{n-2}$

各式相加可得：$b_n-b_1=2+2\times 3+\cdots+2\times 3^{n-2}=2\times\frac{1-3^{n-1}}{1-3}=3^{n-1}-1$

可得，$b_n=3^{n-1}+4$

由 $3^{1-1}+4=5=b_1$，所以 $b_n=3^{n-1}+4$

17．答案：

（1）因为 $f'(x)=3x^2+b$，由题意，$f'(\frac{1}{2})=0$，即 $3\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+b=0$，则 $b=-\frac{3}{4}$；

$f(x)=x^3-\frac{3}{4}x$，且 $f'(x)=3x^2-\frac{3}{4}=3(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})$

可知：$f(x)$ 在 $[-1,-\frac{1}{2}]$ 上递增，在 $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ 上递减，在 $\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$ 上递增。

由 $f(-1)=-\frac{1}{4},f(-\frac{1}{2})=\frac{1}{4},f(\frac{1}{2})=-\frac{1}{4},f(\frac{3}{2})=\frac{9}{4}$

所以，值域为 $[-\frac{1}{4},\frac{9}{4}]$　　　　------------4 分

（2）由（1）可得 $f(x)=x^3-\frac{3}{4}x+c$，$f'(x)=3x^2-\frac{3}{4}=3(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})$，

令 $f'(x)>0$，得 $x>\frac{1}{2}$ 或 $x<-\frac{1}{2}$；令 $f'(x)<0$，得 $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 上单调递减，在 $(-\infty,-\frac{1}{2})$，$(\frac{1}{2},+\infty)$ 上单调递增，

且 $f(-\frac{1}{2})=c+\frac{1}{4}, f(\frac{1}{2})=c-\frac{1}{4}$，

则 $f(-\frac{1}{2})=c+\frac{1}{4}>0, f(\frac{1}{2})=c-\frac{1}{4}<0$

解得：$-\frac{1}{4}<c<\frac{1}{4}$

再由当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$ 且当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)\to-\infty$

所以，$-\frac{1}{4}<c<\frac{1}{4}$ ------------------------8 分

（3）$\frac{3}{2}<d<\sqrt{3}$ -------------------10 分

18. **解**：（Ⅰ）当 $a=1$ 时，$f(x)=\ln(x+1)+\frac{1-x}{1+x}$，

则 $f'(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{-2}{(1+x)^2}$. ……… 1 分

所以 $f'(1)=0$. 又 $f(1)=\ln 2$，因此所求的切线方程为 $y=\ln 2$. …… 3 分

（Ⅱ）$f'(x)=\frac{a}{ax+1}+\frac{-2}{(1+x)^2}=\frac{ax^2+a-2}{(ax+1)(1+x)^2}$. …… 4 分

（1）当 $a-2\geq 0$，即 $a\geq 2$ 时，因为 $x\geq 0$，所以 $f'(x)>0$，所以函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增. ……… 5 分

（2）当 $a-2<0$，即 $0<a<2$ 时，令 $f'(x)=0$，则 $ax^2+a-2=0$（$x\geq 0$），

所以 $x=\sqrt{\frac{2-a}{a}}$.

因此，当 $x\in[0,\sqrt{\frac{2-a}{a}})$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\in(\sqrt{\frac{2-a}{a}},+\infty)$ 时，$f'(x)>0$.

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(\sqrt{\frac{2-a}{a}},+\infty)$，函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $[0,\sqrt{\frac{2-a}{a}})$. … 7 分

（Ⅲ）当 $a\geq 2$ 时，函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，则 $f(x)$ 的最小值为 $f(0)=1$，满足题意. … 8 分

当 $0<a<2$ 时，由（Ⅱ）知函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(\sqrt{\frac{2-a}{a}},+\infty)$，函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $[0,\sqrt{\frac{2-a}{a}})$，则 $f(x)$ 的最小值为 $f(\sqrt{\frac{2-a}{a}})$，而 $f(0)=1$，不合题意.

所以 a 的取值范围是 $[2,+\infty)$. … 10 分

19. **解**：（Ⅰ）$A_3=\{(1,2,3)\}$，$B_3=\{(1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(3,2,1)\}$. ［3 分］

注：可以把 1, 2, 3 所有的六个排列给出来，逐一检验得到结果；

（Ⅱ）由已知，对任意整数 $i,j,1\leqslant i<j\leqslant n$，都有 $a_i-i\leqslant a_j-j$，

所以 $(a_i-i)+i<(a_j-j)+j$，

所以 $a_i<a_j$.

由 i,j 的任意性可知，$(a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n)$ 是 $1,2,3,\cdots,n$ 的单调递增排列，

所以 $A_n=\{(1,2,3,\cdots,n)\}$.　　　　　　　　［4 分］

又因为当 $a_k=k\ (k\in\mathbf{N}^*,\ 1\leqslant k\leqslant n)$ 时，对任意整数 $i,j,1\leqslant i<j\leqslant n$，

都有 $a_i+i\leqslant a_j+j$.

所以 $(1,2,3,\cdots,n)\in B_n$，　所以 $A_n\subseteq B_n$.　　　　　　［5 分］

所以集合 $A_n\cap B_n$ 的元素个数为 1.　　　　　　［6 分］

（III）由（II）知，$b_n\neq 0$.

因为 $B_2=\{(1,2),(2,1)\}$，所以 $b_2=2$.

当 $n\geqslant 3$ 时，考虑 B_n 中的元素 $(a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n)$.

（1）假设 $a_k=n\ (1\leqslant k<n)$. 由已知，$a_k+k\leqslant a_{k+1}+(k+1)$，

所以 $a_{k+1}\geqslant a_k+k-(k+1)=n-1$，

又因为 $a_{k+1}\leqslant n-1$，所以 $a_{k+1}=n-1$.

依此类推，若 $a_k=n$，则 $a_{k+1}=n-1$，$a_{k+2}=n-2$，…，$a_n=k$.

① 若 $k=1$，则满足条件的 $1,2,3,\cdots,n$ 的排列 $(a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n)$ 有 1 个.

② 若 $k=2$，则 $a_2=n$，$a_3=n-1$，$a_4=n-2$，…，$a_n=2$.

所以 $a_1=1$.

此时 满足条件的 $1,2,3,\cdots,n$ 的排列 $(a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n)$ 有 1 个.

③ 若 $2<k<n$，

只要 $(a_1,a_2,a_3,\cdots a_{k-1})$ 是 $1,2,3,\cdots,k-1$ 的满足条件的一个排列，就可以相应得到 $1,2,3,\cdots,n$ 的一个满足条件的排列.

此时，满足条件的 $1,2,3,\cdots,n$ 的排列 $(a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n)$ 有 b_{k-1} 个.

（2）假设 $a_n=n$，只需 $(a_1,a_2,a_3,\cdots a_{n-1})$ 是 $1,2,3,\cdots,n-1$ 的满足条件的排列，此时满足条件的 $1,2,3,\cdots,n$ 的排列 $(a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n)$ 有 b_{n-1} 个.

综上 $b_n=1+1+b_2+b_3+\cdots+b_{n-1}$，$n\geqslant 3$.

因为 $b_3=1+1+b_2=4=2b_2$，

且当 $n\geqslant 4$ 时，$b_n=(1+1+b_2+b_3+\cdots+b_{n-2})+b_{n-1}=2b_{n-1}$，

所以 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，$n\geqslant 3$，都有 $\dfrac{b_n}{b_{n-1}}=2$.

所以 $\{b_n\}$ 成等比数列.　　　　　　［10 分］

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ‘’ 精益求精、专业严谨 ‘’ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。