2020 北京石景山高三（上）期末

数　学

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1．（4 分）已知集合 $A=\{x|0\leq x\leq 2\}$，$B=\{□1，0，2，3\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A．{0，1，2}　　B．{0，2}　　C．{□1，3}　　D．{□1，0，1，2，3}

2．（4 分）复数 $z=\dfrac{2}{1+i}$的共轭复数在复平面内对应的点所在象限为（　　）

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

3．（4 分）下列函数中既是奇函数，又在区间（0，1）上单调递减的是（　　）

A．$f(x)=x^3$　　B．$f(x)=lg|x|$　　C．$f(x)=□x$　　D．$f(x)=\cos x$

4．（4 分）已知向量$\vec{a}=(5，m)$，$\vec{b}=(2，□2)$，若$(\vec{a}□\vec{b})\perp\vec{b}$，则实数 $m=$（　　）

A．□1　　B．1　　C．2　　D．□2

5．（4 分）我国古代数学名著《数书九章》有“米谷粒分”题：粮仓开仓收粮，有人送来米 1 534 石，验得米内夹谷，抽样取米一把，数得 254 粒 内夹谷 28 粒，则这批米内夹谷约为（　　）

A．134 石　　B．169 石　　C．338 石　　D．1 365 石

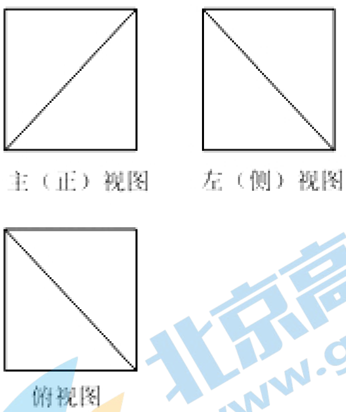
6．（4 分）已知 $a=\log_3 4$，$b=\log_{\pi} 3$，$c=\sqrt{5}$，则 a，b，c 的大小关系是（　　）

A．$a<b<c$　　B．$a<c<b$　　C．$b<c<a$　　D．$b<a<c$

7．（4 分）艺术体操比赛共有 7 位评委分别给出某选手的原始评分，评定该选手的成绩时，从 7 个原始评分中去掉 1 个最高分、1 个最低分，得到 5 个有效评分．5 个有效评分与 7 个原始评分相比，不变的数字特征是（　　）

A．中位数　　B．平均数　　C．方差　　D．极差

8．（4 分）一个正方体被一个平面截去一部分后，剩余部分的三视图如图，则截去部分体积与原正方体体积的比值为（　　）



A．$\dfrac{1}{8}$　　B．$\dfrac{1}{7}$　　C．$\dfrac{1}{6}$　　D．$\dfrac{1}{5}$

9．（4 分）在等差数列$\{a_n\}$中，设 k，l，p，$r\in\mathbf{N}^*$，则 $k+l>p+r$ 是 $a_k+a_l>a_p+a_r$ 的（　　）

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)，　获取更多试题资料及排名分析信息。

C．充要必要条件　　　　　　　　　　　　D．既不充分也不必要条件

10．（4 分）关于曲线 C：$x^2+xy+y^2=4$．给出下列三个结论：

①曲线 C 恰好经过 6 个整点（即横、纵坐标均为整数的点）；

②曲线 C 上任意一点到原点的距离都不大于 $2\sqrt{2}$；

③曲线 C 上任意一点到原点的距离都不小于 2．

其中，正确结论的个数是（　　）

A．0　　　　B．1　　　　C．2　　　　D．3

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．

11．（5 分）在 $(x-\frac{2}{x})^6$ 的二项展开式中，常数项等于_______．（用数字作答）

12．（5 分）已知双曲线标准方程为 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$，则其焦点到渐近线的距离为_______．

13．（5 分）已知数列 $\{a_n+n\}(n\in N^*)$ 为等比数列，$a_1=1$，$a_2=2$，则 $a_3=$_______．

14．（5 分）已知平面 α，β，γ．给出下列三个论断：①α⊥β；②α⊥γ；③β∥γ．以其中的两个论断作为条件，余下的一个论断作为结论，写出一个正确的命题：_______．

15．（5 分）在△ABC 中，内角 A，B，C 所对的边分别是 a，b，c，已知 $b-c=\frac{1}{4}a$，$2\sin B=3\sin C$，则 $\cos A$ 的值为_______．

16．（5 分）已知向量 $\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$ 是平面 α 内的一组基向量，O 为 α 内的定点，对于 α 内任意一点 P，当 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{e_1}+y\overrightarrow{e_2}$ 时，则称有序实数对（x，y）为点 P 的广义坐标，若点 A、B 的广义坐标分别为（x_1，y_1）、（x_2，y_2），对于下列命题：

①线段 AB 的中点的广义坐标为 $(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2})$；

②向量 $\overrightarrow{OA}$ 平行于向量 $\overrightarrow{OB}$ 的充要条件是 $x_1y_2=x_2y_1$；

③向量 $\overrightarrow{OA}$ 垂直于向量 $\overrightarrow{OB}$ 的充要条件是 $x_1x_2+y_1y_2=0$．

其中，真命题是_______．（请写出所有真命题的序号）

三、解答题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

17．（13 分）已知函数 $f(x)=\cos x(\sin x+\cos x)-\frac{1}{2}$．

（I）若 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，且 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$，求 $f(\alpha)$ 的值；

（II）求函数 $f(x)$ 的最小正周期，及函数 $f(x)$ 的单调递减区间．

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)，　获取更多试题资料及排名分析信息。

18.（13 分）一款小游戏的规则如下：每盘游戏都需抛掷骰子三次，出现一次或两次“6 点”获得 15 分，出现三次“6 点”获得 120 分，没有出现“6 点”则扣除 12 分（即获得□12 分）.

（I）设每盘游戏中出现“6 点”的次数为 X，求 X 的分布列；

（II）玩两盘游戏，求两盘中至少有一盘获得 15 分的概率；

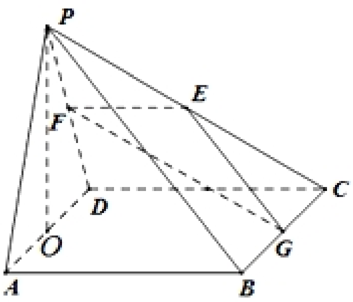
（III）玩过这款游戏的许多人发现，若干盘游戏后，与最初的分数相比，分数没有增加反而减少了．请运用概率统计的相关知识分析解释上述现象．

19.（14 分）已知在四棱锥 P□$ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 4 的正方形，△PAD 是正三角形，$CD\perp$平面 PAD，E，F，G，O 分别是 PC，PD，BC，AD 的中点．

（I）求证：$PO\perp$平面 $ABCD$；

（II）求平面 EFG 与平面 $ABCD$ 所成锐二面角的大小；

（III）线段 PA 上是否存在点 M，使得直线 GM 与平面 EFG 所成角为$\frac{\pi}{6}$，若存在，求线段 PM 的长度；若不存在，说明理由．



20.（14 分）已知函数 $f(x)=e^x$□ax．（$a\in\mathbf{R}$）

（I）求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（II）若 $a=3$，$f(x)$ 的图象与 y 轴交于点 A，求 $y=f(x)$ 在点 A 处的切线方程；

（III）在（II）的条件下，证明：当 $x>0$ 时，$f(x)>x^2$□$3x+1$ 恒成立．

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

21．（13 分）已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{2}=1$过点 P（2，1）．

（I）求椭圆 C 的方程，并求其离心率；

（II）过点 P 作 x 轴的垂线 l，设点 A 为第四象限内一点且在椭圆 C 上（点 A 不在直线 l 上），点 A 关于 l 的对称点为 A'，直线 $A'P$ 与 C 交于另一点 B．设 O 为原点，判断直线 AB 与直线 OP 的位置关系，并说明理由．

22．（13 分）已知由 n（$n\in\mathbf{N}^*$）个正整数构成的集合 $A=\{a_1，a_2，…，a_n\}$（$a_1<a_2<…<a_n$，$n\geq3$），记 $S_A=a_1+a_2+…+a_n$，对于任意不大于 S_A 的正整数 m，均存在集合 A 的一个子集，使得该子集的所有元素之和等于 m．

（I）求 a_1，a_2 的值；

（II）求证："a_1，a_2，…，a_n 成等差数列"的充要条件是"$S_A=\frac{n(n+1)}{2}$"；

（III）若 $S_A=2020$，求 n 的最小值，并指出 n 取最小值时 a_n 的最大值．

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

2020 北京石景山高三（上）期末数学

参考答案

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1．【分析】利用交集定义直接求解．

【解答】解：∵集合 $A=\{x|0\le x\le 2\}$，$B=\{□1，0，2，3\}$，

∴$A\cap B=\{0，2\}$．

故选：B．

【点评】本题考查交集的求法，考查交集定义等基础知识，考查运算求解能力，是基础题．

2．【分析】利用复数代数形式的乘除运算化简，求出 $\overline{z}$ 的坐标得答案．

【解答】解：∵$z=\frac{2}{1+i}=\frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)}=1-i$，

∴$\overline{z}=1+i$，

则复数 $z=\frac{2}{1+i}$ 的共轭复数在复平面内对应的点的坐标为（1，1），所在象限为第一象限．

故选：A．

【点评】本题考查复数代数形式的乘除运算，考查复数的代数表示法及其几何意义，是基础题．

3．【分析】根据函数奇偶性和单调性的性质分别进行判断即可．

【解答】解：$y=x^3$ 在（0，1）上单调递增，不满足条件，

$y=lg|x|$ 是偶函数，在（0，1）上单调递增，不满足条件．

$y=□x$ 为奇函数，在（0，1）上单调递减，满足条件．

$y=\cos x$ 是偶函数又在区间（0，+∞）上不单调，不满足条件．

故选：C．

【点评】本题主要考查函数奇偶性和单调性的判断，要求熟练掌握常见函数的奇偶性和单调性的性质．

4．【分析】结合向量数量积的性质的坐标表示即可求解．

【解答】解：∵$\vec{a}=$（5，m），$\vec{b}=$（2，□2），

∴$\vec{a}-\vec{b}=$（3，$m+2$），

∵（$\vec{a}$□$\vec{b}$）⊥$\vec{b}$，

则 3×2□2（$m+2$）=0，

∴$m=1$．

故选：B．

【点评】本题主要考查了向量数量积的性质的坐标表示，属于基础试题．

5．【分析】根据 254 粒内夹谷 28 粒，可得比例，即可得出结论．

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

【解答】解：由题意，这批米内夹谷约为 $1534\times\frac{28}{254}=169$ 石，

故选：B.

【点评】本题考查利用数学知识解决实际问题，考查学生的计算能力，比较基础.

6.【分析】利用对数函数的性质求解.

【解答】解：$\because 1=\log_3 3<\log_3 4<\log_3 9=2$，$\therefore 1<a<2$，

$\because 0<\log_\pi 3<\log_\pi \pi=1$，$\therefore 0<\log_\pi 3<1$，$\therefore 0<b<1$，

又$\because \sqrt{5}>2$，$\therefore c>2$

$\therefore c>a>b$，

故选：D.

【点评】本题考查三个数的大小的求法，是基础题，解题时要认真审题，注意对数函数的性质的合理运用.

7.【分析】根据题意，由数据的中位数、平均数、方差、极差的定义，分析可得答案.

【解答】解：根据题意，从 7 个原始评分中去掉 1 个最高分、1 个最低分，得到 5 个有效评分.

5 个有效评分与 7 个原始评分相比，不变的中位数，

故选：A.

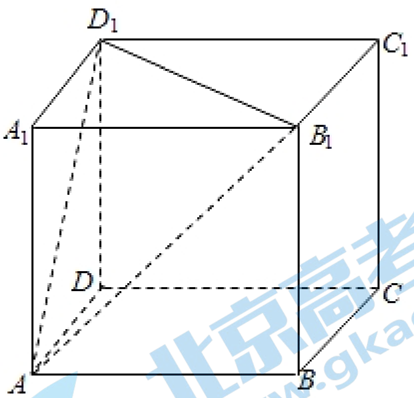
【点评】本题考查数据的中位数、平均数、方差、极差的定义，属于基础题.

8.【分析】利用三视图，判断几何体是在正方体 $ABCD$□$A_1B_1C_1D_1$ 中，截去四面体 A□$A_1B_1D_1$，利用体积公式求值.

【解答】解：由三视图得，在正方体 $ABCD$□$A_1B_1C_1D_1$ 中，截去四面体 A□$A_1B_1D_1$，如图所示，设正方体棱长为 a，则 $V_{三棱锥}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}a^3=\frac{1}{6}a^3$，

故正方体的体积为：a^3，所以截去部分体积与剩余部分体积的比值为：$\frac{1}{6}$.

故选：C.



【点评】本题考查了几何体的三视图求几何体的体积；关键是正确还有几何体，利用体积公式解答.

9.【分析】先化简命题，再讨论充要性.

【解答】解：在等差数列$\{a_n\}$中，$a_k+a_l>a_p+a_r$，则 a_1+（k□1）$d+a_1>a_1+$（p□1）$d+a_1+$（r□1）d，（$k+1$）$d>$（$p+r$）d，

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

若 $d<0$，则 $k+l<p+r$，

则 $k+l>p+r$ 是 $k+l<p+r$ 的既不充分也不必要条件，

即 $k+l>p+r$ 是 $a_k+a_l>a_p+a_r$ 的既不充分也不必要条件．

故选：D．

【点评】本题考查充要性，以及解不等式，属于基础题．

10．【分析】在①中，$x=0$ 时，$y=\pm2$；$y=0$ 时，$x=\pm2$，$x=2$ 时，$y=$□2，$y=2$ 时，$x=$□2，从而曲线 C 恰好经过 6 个整点；在②中，曲线 C 上任意一点到原点的距离 $d=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{4-xy}\leq2\sqrt{2}$；③曲线 C 上任意一点到原点的距离 $d=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{4-xy}$不一定小于 2．

【解答】解：关于曲线 C：$x^2+xy+y^2=4$，

在①中，$x=0$ 时，$y=\pm2$；$y=0$ 时，$x=\pm2$；$x=2$，$y=$□2；$y=2$，$x=2$．

∴曲线 C 恰好经过 6 个整点（0，2），（0，□2），（2，0），（□2，0），（2，□2），（□2，2），故①正确；

在②中，曲线 C 上任意一点到原点的距离：

$d=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{4-xy}\leq2\sqrt{2}$，故②正确；

③曲线 C 上任意一点到原点的距离：

当 $yx<0$ 时，$d=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{4-xy}>2$，故③错误．

故选：C．

【点评】本题考查命题真假的判断，考查函数的性质、两点间距离公式等基础知识，考查运算求解能力，是中档题．

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．

11．【分析】先求出二项式展开式的通项公式，再令 x 的幂指数等于 0，求得 r 的值，即可求得展开式中的常数项的值．

【解答】解：（x□$\frac{2}{x}$）^{6} 的二项式展开式的通项公式为 $T_{r+1}=C_6^r\bullet$（□2）$^r\bullet x^{6□2r}$，

令 6□$2r=0$，求得 $r=3$，可得常数项为 $C_6^3\bullet$（□2）$^3=$□160，

故答案为：□160．

【点评】本题主要考查二项式定理的应用，二项式系数的性质，二项式展开式的通项公式，求展开式中某项的系数，属于基础题．

12．【分析】先由题中条件求出焦点坐标和渐近线方程，再代入点到直线的距离公式即可求出结论．

【解答】解：由题得：其焦点坐标为（□2，0），（2，0）．渐近线方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$，即 $\pm\sqrt{3}y$□$x=0$，

所以焦点到其渐近线的距离 $d=\frac{|\pm\sqrt{3}\times0\pm2|}{\sqrt{3+1}}=1$．

故答案为：1．

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

【点评】本题以双曲线方程为载体，考查双曲线的标准方程，考查双曲线的几何性质，属于基础题．

13．【分析】根据题意，设 $b_n=a_n+n$，求出 b_1、b_2 的值，计算可得数列 $\{a_n+n\}(n\in N^*)$ 的公比，进而可得 b_3 的值，变形可得答案．

【解答】解：根据题意，数列 $\{a_n+n\}(n\in N^*)$ 为等比数列，设 $b_n=a_n+n$，

其首项 $b_1=a_1+1=2$，$b_2=a_2+2=4$，

则其公比 $q=\frac{b_2}{b_1}=\frac{4}{2}=2$，

则有 $b_3=a_3+3=8$，解可得 $a_3=5$，

故答案为：5．

【点评】本题考查等比数列的通项公式，涉及等比数列的性质，属于基础题．

14．【分析】由 α⊥β，β∥γ．利用面面垂直的判定定理得 α⊥γ．

【解答】解：平面 α，β，γ．给出下列三个论断：①α⊥β；②α⊥γ；③β∥γ．

∵α⊥β，β∥γ．∴由面面垂直的判定定理得 α⊥γ，

∴以其中的两个论断作为条件，余下的一个论断作为结论，

写出一个正确的命题为：①③⇒②．

故答案为：①③⇒②．

【点评】本题考查命题真假的判断，考查空间中线线、线面、面面间的位置关系等基础知识，考查运算求解能力，是中档题．

15．【分析】由条件利用正弦定理求得 $a=2c$，$b=\frac{3c}{2}$，再由余弦定理求得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ 的值．

【解答】解：在△ABC 中，

∵b□$c=\frac{1}{4}a$①，$2\sin B=3\sin C$，

∴$2b=3c$②，

∴由①②可得 $a=2c$，$b=\frac{3c}{2}$．

再由余弦定理可得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{\frac{9c^2}{4}+c^2-4c^2}{3c\cdot c}=$□$\frac{1}{4}$，

故答案为：□$\frac{1}{4}$．

【点评】本题主要考查正弦定理、余弦定理的应用，属于中档题．

16．【分析】运用向量的中点坐标公式、共线向量、向量垂直的充要条件直接求解．

【解答】解：在①中，∵点 A、B 的广义坐标分别为（x_1，y_1）、（x_2，y_2），

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)，获取更多试题资料及排名分析信息。

∴由中点坐标公式得线段 AB 的中点的广义坐标为（$\frac{x_1+x_2}{2}$，$\frac{y_1+y_2}{2}$），故①正确；

在②中，∵点 A、B 的广义坐标分别为（x_1，y_1）、（x_2，y_2），

∴向量$\overrightarrow{OA}$平行于向量$\overrightarrow{OB}$的充要条件是 $x_1y_2=x_2y_1$，故②正确；

在③中，∵点 A、B 的广义坐标分别为（x_1，y_1）、（x_2，y_2），

基底不一定垂直，也不一定为单位向量，

∴向量$\overrightarrow{OA}$垂直于向量$\overrightarrow{OB}$的充要条件不是 $x_1x_2+y_1y_2=0$，故③错误.

故答案为：①②.

【点评】本题考查命题真假的判断，考查向量的坐标运算，共线向量的知识，向量垂直和平行的充要条件等基础知识，考查运算求解能力，是中档题.

三、解答题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

17.【分析】（*I*）由已知结合同角平方关系可求 cosα，然后直接代入即可求解，

（*II*）先结合二倍角公式及辅助角公式对已知函数进行化简，然后结合正弦函数的性质即可求解.

【解答】解：（I）因为 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，且$\sin\alpha=\frac{3}{5}$，

所以 $\cos\alpha=\frac{4}{5}$，

所以 $f(\alpha)=\frac{4}{5}(\frac{3}{5}+\frac{4}{5})-\frac{1}{2}=\frac{28}{25}-\frac{1}{2}=\frac{31}{50}$，$\frac{4}{5}$

（II）$f(x)=\cos x(\sin x+\cos x)-\frac{1}{2}=\cos x\cdot\sin x+\cos^2x-\frac{1}{2}$，

$=\frac{1}{2}\sin2x+\frac{1+\cos2x}{2}-\frac{1}{2}$，

$=\frac{1}{2}(\sin2x+\cos2x)$，

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})$，

所以函数 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，

由$2k\pi+\frac{1}{2}\pi\leqslant2x+\frac{\pi}{4}\leqslant2k\pi+\frac{3\pi}{2}$，

解得$k\pi+\frac{\pi}{8}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{5\pi}{8}$，$k\in\mathbf{Z}$，

所以函数 $f(x)$ 的单调递减区间$[k\pi+\frac{\pi}{8}，k\pi+\frac{5\pi}{8}]$，$k\in Z$.

【点评】本题主要考查了二倍角公式，辅助角公式在三角函数化简中的应用及正弦函数性质的简单应用.

18.【分析】（*I*）X 的可能取值为 0，1，2，3．每次抛掷骰子，出现“6 点”的概率为 $P=\frac{1}{6}$．利用二项分布列的计算公式即可得出.

（II）设“第 i 盘游戏获得分 15 分”为事件 A_i（$i=1$，2），利用互斥事件与对立事件的概率计算公式即可得出.

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

（III）设每盘游戏得分为 Y．由（I）知 Y 的分布列，即可得出结论．

【解答】解：（I）X 可能的取值为 0，1，2，3．

每次抛掷骰子，出现“6 点”的概率为 $P=\frac{1}{6}$．

$P(X=0)=C_3^0(1-\frac{1}{6})^3=\frac{125}{216}$，$P(X=1)=C_3^1\times\frac{1}{6}\times(1-\frac{1}{6})^2=\frac{75}{216}$，

$P(X=2)=C_3^2\cdot(\frac{1}{6})^2\cdot(1-\frac{1}{6})=\frac{15}{216}$，$P(X=3)=C_3^3(\frac{1}{6})^3=\frac{1}{216}$，

所以 X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{125}{216}$	$\frac{25}{72}$	$\frac{5}{72}$	$\frac{1}{216}$

（II）设“第 i 盘游戏获得”为事件 A_i（$i=1$，2），则 $P(A_1)=P(A_2)=P(X=1)+P(X=2)=\frac{90}{216}=\frac{5}{12}$．

所以“两盘游戏中至少有一次获得 15 分”的概率为 $1-P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})=\frac{95}{144}$．

因此，玩两盘游戏至少有一次获得 15 分的概率为 $\frac{95}{144}$．

（III）设每盘游戏得分为 Y．

由（I）知，Y 的分布列为：

Y	□12	15	120
P	$\frac{125}{216}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{216}$

Y 的数学期望为 $EY=-12\times\frac{125}{216}+15\times\frac{5}{12}+120\times\frac{1}{216}=-\frac{5}{36}$．

这表明，获得分数 Y 的期望为负．

因此，多次游戏之后分数减少的可能性更大．

【点评】本题考查了二项分布列、互斥事件与对立事件的概率计算公式，考查了推理能力与计算能力，属于中档题．

19.【分析】(*I*) 因为 $PO\perp AD$，又 $CD\perp$ 平面 PAD，得到 $PO\perp CD$，进而证明结论；

(*II*) 以 O 点为原点分别以 OA、OG、OP 所在直线为 x 轴、y 轴、z 轴建立空间直角坐标系，平面 EFG 的法向量，又平面 $ABCD$ 的法向量 $\vec{n}=(0,\ 0,\ 1)$，利用夹角公式求出即可；

(*III*) 假设线段 PA 上存在点 M，设 $\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{PA}$，$\lambda\in[0,\ 1]$，由直线 GM 与平面 EFG 所成角为 $\frac{\pi}{6}$，得到关于 λ 的方程，解方程判断即可．

【解答】解：（I）证明：因为△PAD 是正三角形，O 是 AD 的中点，所以 $PO\perp AD$．

又因为 $CD\perp$ 平面 PAD，$PO\subset$ 平面 PAD，所以 $PO\perp CD$，$AD\cap CD=D$，AD，$CD\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $PO\perp$ 面 $ABCD$；

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

（II）如图，以 O 点为原点分别以 OA、OG、OP 所在直线为 x 轴、y 轴、z 轴建立空间直角坐标系．

则

$O(0,\ 0,\ 0)$，$A(2,\ 0,\ 0)$，$B(2,\ 4,\ 0)$，$C(-2,\ 4,\ 0)$，$D(-2,\ 0,\ 0)$，$G(0,\ 4,\ 0)$，$P(0,\ 0,2\sqrt{3})$，$E(-1,\ 2,\ \sqrt{3})$，$F(-1,\ 0,\ \sqrt{3})$，$\overrightarrow{EF}=(0,\ -2,\ 0)$，$\overrightarrow{EG}=(1,\ 2,\ -\sqrt{3})$，

设平面 EFG 的法向量为 $\overrightarrow{m}=(x,\ y,\ z)$，

由 $\begin{cases}\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{EF}=0\\ \overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{EG}=0\end{cases}$，得 $\begin{cases}-2y=0,\\ x+2y-\sqrt{3}z=0,\end{cases}$

令 $z=1$，则 $\overrightarrow{m}=(\sqrt{3},\ 0,\ 1)$，

又平面 $ABCD$ 的法向量 $\overrightarrow{n}=(0,\ 0,\ 1)$，

设平面 EFG 与平面 $ABCD$ 所成锐二面角为 θ，

所以 $\cos\theta=\dfrac{|\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{m}||\overrightarrow{n}|}=\dfrac{1}{2}$.

所以平面 EFG 与平面 $ABCD$ 所成锐二面角为 $\dfrac{\pi}{3}$；

（III）假设线段 PA 上存在点 M，使得直线 GM 与平面 EFG 所成角为 $\dfrac{\pi}{6}$，

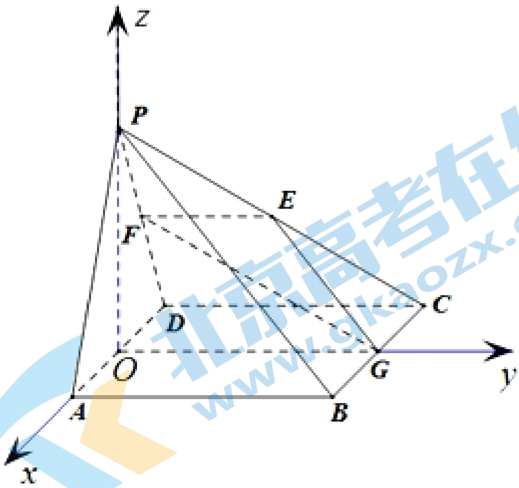
设 $\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{PA}$，$\lambda\in[0,\ 1]$，由 $\overrightarrow{GM}=\overrightarrow{GP}+\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{GP}+\lambda\overrightarrow{PA}$，

所以 $\overrightarrow{GM}=(2\lambda,\ -4,\ 2\sqrt{3}(1-\lambda))$．

所以 $\sin\dfrac{\pi}{6}=|\cos\langle\overrightarrow{GM},\ \overrightarrow{m}\rangle|=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{4\lambda^2-6\lambda+7}}$，

整理得 $2\lambda^2$□$3\lambda+2=0$，无解，

所以，不存在这样的点 M.



【点评】考查线面垂直的判定，向量法求二面角和线面所成的角的余弦值，考查运算能力，中档题．

20.【分析】（I）求出导函数 $f'(x)=e^x$□a，通过当 $a\leq 0$ 时，当 $a>0$ 时．判断导函数的符号，得到函数的单调区

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

间．

（II）求出求出切线的向量，切点坐标，然后求解在 A 点处的切线方程．

（III）令 g（x）$=f$（x）$\square$（$x^2\square 3x+1$）$=e^x\square x^2\square 1$，则 g'（x）$=e^x\square 2x$．令 h（x）$=e^x\square 2x$，则 h'（x）$=e^x\square 2$，判断函数的单调性，求解函数的最值即可．

【解答】解：（I）f'（x）$=e^x\square a$，

当 $a\leq 0$ 时，f'（x）≥ 0 恒成立，所以 f（x）在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，

当 $a>0$ 时，令 f'（x）$=0$，解得 $x=lna$．

当 x 变化时，f'（x），f（x）的变化情况如表：

x	（$\square\infty$，lna）	lna	（lna，$+\infty$）
f'（x）	$\square$	0	+
f（x）	减	极小值	增

所以 $a>0$ 时，f（x）在（$\square\infty$，lna）上单调递减，在（lna，$+\infty$）上单调递增．

（II）令 $x=0$，得 $y=1$，则 A（0，1），

因为 f'（x）$=e^x\square 3$，所以 f'（0）$=1\square 3=\square 2$，

所以在 A 点处的切线方程为 $y\square 1=\square 2$（$x\square 0$），即 $y=\square 2x+1$．

（III）证明：令 g（x）$=f$（x）$\square$（$x^2\square 3x+1$）$=e^x\square x^2\square 1$，

则 g'（x）$=e^x\square 2x$．

令 h（x）$=e^x\square 2x$，则 h'（x）$=e^x\square 2$，

当 $0<x<ln2$ 时，h'（x）<0，h（x）单调递减，

当 $x>ln2$ 时，h'（x）>0，h（x）单调递增；

所以 h（x）$\geq h$（$ln2$）$=e^{ln2}\square 2ln2=2\square 2ln2>0$，即 g'（x）>0 恒成立．

所以 g（x）在（$\square\infty$，$+\infty$）上单调递增，所以 g（x）$>g$（0）$=1\square 0\square 1=0$，

所以 $e^x\square x^2\square 1>0$，即当 $x>0$ 时，f（x）$>x^2\square 3x+1$ 恒成立．

【点评】本题主要考查导数法研究函数的单调性，函数的最值的求法，构造法的应用；基本思路：当函数是增函数时，导数大于等于零恒成立，当函数是减函数时，导数小于等于零恒成立，然后转化为求相应函数的最值问题．注意判别式的应用．是难题．

21．【分析】（I）将点 P 代入椭圆方程，求出 a，结合离心率公式即可求得椭圆的离心率；

（II）设直线 PA：$y\square 1=k$（$x\square 2$），PB：$y\square 1=\square k$（$x\square 2$），设点 A 的坐标为（x_1，y_1），B（x_2，y_2），分别求出 $x_1\square x_2$，$y_1\square y_2$，根据斜率公式，以及两直线的位置关系与斜率的关系

【解答】解：（I）由椭圆方程椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{2}=1$ 过点 P（2，1），可得 $a^2=8$．

所以 $c^2=a^2\square 2=8\square 2=6$，

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$，离心率 $e=\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

（II）直线 AB 与直线 OP 平行．证明如下：

设直线 PA：$y\square 1=k（x\square 2）$，PB：$y\square 1=\square k（x\square 2）$，

设点 A 的坐标为（x_1，y_1），B（x_2，y_2），

由 $\begin{cases}\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1\\ y=kx-2k+1\end{cases}$ 得（$4k^2+1$）x^2+8k（$1\square 2k$）$x+16k^2\square 16k\square 4=0$，

$\therefore 2x_1=\frac{16k^2-16k-4}{1+4k^2}$，

$\therefore x_1=\frac{8k^2-8k-2}{1+4k^2}$

同理 $x_2=\frac{8k^2+8k-2}{4k^2+1}$，

所以 $x_1\square x_2=\square\frac{16k}{4k^2+1}$，

由 $y_1=kx_1\square 2k+1$，$y_2=\square kx_2+2k+1$

有 $y_1\square y_2=k（x_1+x_2）\square 4k=\square\frac{8k}{4k^2+1}$，

因为 A 在第四象限，所以 $k\neq 0$，且 A 不在直线 OP 上．

$\therefore k_{AB}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{1}{2}$，

又 $k_{OP}=\frac{1}{2}$，

故 $k_{AB}=k_{OP}$，

所以直线 AB 与直线 OP 平行．

【点评】本题考查椭圆的简单性质，考查了直线与椭圆位置关系的应用，训练了斜率和直线平行的关系，是中档题．

22.【分析】（I）考虑元素 1，2，结合新定义 S_A，可得所求值；

（II）从两个方面证明，结合等差数列的性质和求和公式，即可得证；

（III）由于含有 n 个元素的非空子集个数有 $2^n\square 1$，讨论当 $n=10$ 时，$n=11$ 时，结合条件和新定义，推理可得所求．

【解答】解：（I）由条件知 $1\leq S_A$，必有 $1\in A$，又 $a_1<a_2<\ldots<a_n$ 均为整数，$a_1=1$，

$2\leq S_A$，由 S_A 的定义及 $a_1<a_2<\ldots<a_n$ 均为整数，必有 $2\in A$，$a_2=2$；

（II）证明：必要性：由“a_1，a_2，…，a_n 成等差数列”及 $a_1=1$，$a_2=2$，

北京高考在线 www.gkaozx.com

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

得 $a_i=i$（$i=1$，2，…，n）此时 $A=\{1，2，3，…，n\}$满足题目要求，

从而 $S_A=1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$；

充分性：由条件知 $a_1<a_2<…<a_n$，且均为正整数，可得 $a_i\geq i$（$i=1$，2，3，…，n），

故 $S_A\geqslant 1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$，当且仅当 $a_i=i$（$i=1$，2，3，…，n）时，上式等号成立.

于是当 $S_A=\frac{1}{2}n(n+1)$ 时，$a_i=i$（$i=1$，2，3，…，n），从而 a_1，a_2，…，a_n 成等差数列.

所以“a_1，a_2，…，a_n 成等差数列”的充要条件是“$S_A=\frac{1}{2}n(n+1)$”；

（III）由于含有 n 个元素的非空子集个数有 2^n□1，故当 $n=10$ 时，2^{10}□$1=1023$，

此时 A 的非空子集的元素之和最多表示 1023 个不同的整数 m，不符合要求.

而用 11 个元素的集合 $A=\{1，2，4，8，16，32，64，128，256，512，1024\}$的非空子集的元素之和

可以表示 1，2，3，…，2046，2047 共 2047 个正整数.

因此当 $S_A=2020$ 时，n 的最小值为 11.

记 $S_{10}=a_1+a_2+…+a_{10}$，则 $S_{10}+a_{11}=2020$ 并且 $S_{10}+1\geq a_{11}$.

事实上若 $S_{10}+1<a_{11}$，$2020=S_{10}+a_{11}<2a_{11}$，则 $a_{11}>1010$，$S_{10}<a_{11}<1010$，

所以 $m=1010$ 时无法用集合 A 的非空子集的元素之和表示，与题意不符.

于是 $2020=S_{10}+a_{11}\geq 2a_{11}$□1，得 $a_{11}\leqslant\frac{2021}{2}$，$a_{11}\in N^*$，所以 $a_{11}\leq 1010$.

当 $a_{11}=1010$ 时，$A=\{1，2，4，8，16，32，64，128，256，499，1010\}$满足题意，

所以当 $S_A=2020$ 时，n 的最小值为 11，此时 a_n 的最大值 1010.

【点评】本题考查新定义的理解和运用，考查等差数列的性质和求和公式的运用，考查化简运算能力和推理能力，属于难题.

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 " 精益求精、专业严谨 " 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

微信搜一搜
北京高考资讯