哈尔滨师大附中
东北师大附中
辽宁省实验中学

2021年高三第二次联合模拟考试

文科数学

注意事项:

1. 本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分,共150分,考试时间120分钟.答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡的相应位置上.
2. 回答第Ⅰ卷时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其它答案标号.写在本试卷上无效.
3. 回答第Ⅱ卷时,将答案写在答题卡上,写在本试卷上无效.

第Ⅰ卷(选择题 共60分)

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 定义集合运算:$A*B=\{z \mid z=xy, x\in A, y\in B\}$,设$A=\{1,2\}$,$B=\{1,2,3\}$,则集合$A*B$的所有元素之和为 A

A. 16　　B. 18　　C. 14　　D. 8

2. 设复数$z=\dfrac{5}{2-i}$(其中i为虚数单位),则$z\cdot\bar{z}=$ B

A. 1　　B. 3　　C. 5　　D. 6

3. 命题p:$\forall x\in R, x^3+3^x>0$,则非$p$是 B

A. $\exists x\in R, x^3+3^x\geqslant 0$　　B. $\exists x\in R, x^3+3^x\leqslant 0$

C. $\forall x\in R, x^3+3^x\geqslant 0$　　D. $\forall x\in R, x^3+3^x\leqslant 0$

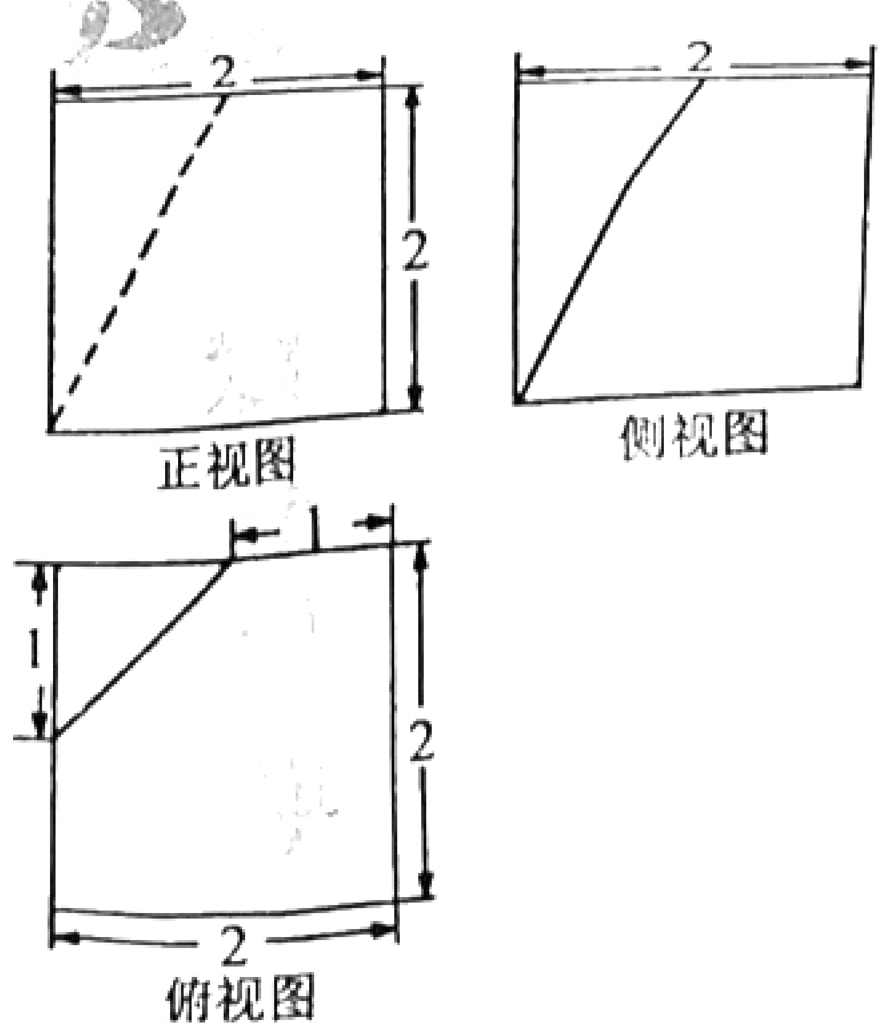
4. 已知$a=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{2}{5}}$,$b=\left(\dfrac{2}{5}\right)^{-\frac{1}{3}}$,$c=\log_3\dfrac{2}{5}$,则 A

A. $c<a<b$　　B. $c<b<a$　　C. $b<c<a$　　D. $a<b<c$

5. 某几何体的三视图如右图所示,则该几何体的体积为 C

A. $\dfrac{47}{6}$　　B. $\dfrac{15}{2}$

C. $\dfrac{23}{3}$　　D. 8



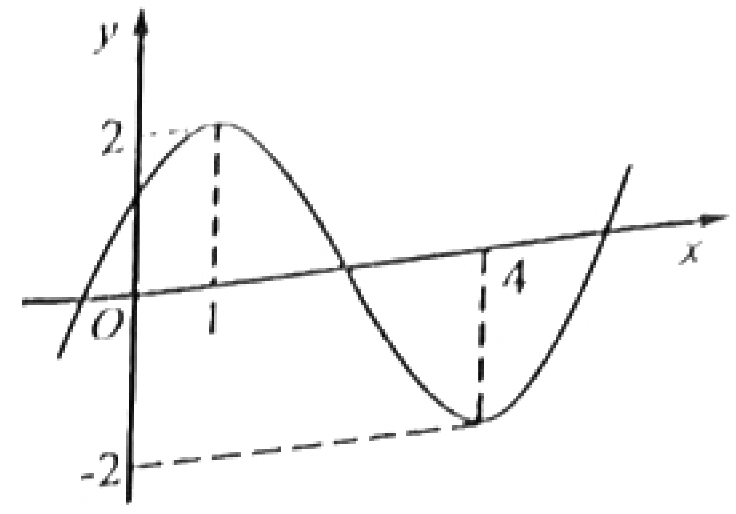
6. 等差数列$\{a_n\}$的公差为d，前n项的和为S_n，当首项a_1和d变化时，$a_2+a_8+a_{17}$是一个定值，则下列各数中也为定值的是 C

A. S_7　　B. S_8　　C. S_{13}　　D. S_{17}

7. 一枚骰子连续掷两次分别得到的点数为m,n，则$m>n$的概率为 A

A. $\frac{5}{12}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{7}{12}$

8. 已知函数$f(x)=A\sin(wx+\varphi)\left(A>0,w>0,0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$的图象如图，若$x_1,x_2\in(1,4)$，且$f(x_1)+f(x_2)=0(x_1\neq x_2)$，则$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=$ C



A. 1　　B. 0

C. $\frac{1}{2}$　　D. $-\frac{1}{2}$

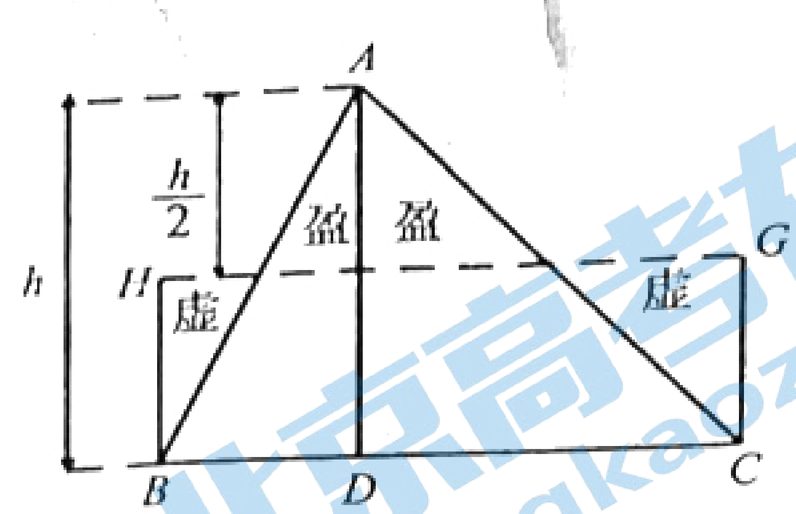
9. A,B是椭圆C长轴的两个端点，M是椭圆C上一点，$\tan\angle MAB=1$，$\tan\angle MBA=\frac{1}{4}$，则$C$的离心率为 D

A. $\frac{\sqrt{6}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

10. 已知三棱锥$A-BCD$的各条棱都相等，M为BC的中点. 则AM与BD所成的角的余弦值为 B

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{6}$

11. 割补法在我国古代数学著作中称为“出入相补”，刘徽称之为“以盈补虚”，即以多余补不足，是数量的平均思想在几何上的体现，如图揭示了刘徽推导三角形面积公式的方法，在三角形ABC内任取一点，则该点落在标记“盈”的区域的概率为 D



A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{5}$　　D. $\frac{1}{2}$

12. 已知函数$f(x)=e^{x-3}$，$g(x)=\frac{1}{2}+\ln\frac{x}{2}$，若$f(m)=g(n)$成立，则$m-n$的最大值为 D

A. $1-\ln2$　　B. $\ln2$　　C. $2\ln2$　　D. $\ln2-1$

第Ⅱ卷（非选择题　共90分）

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分. 把答案填写在答题纸相应位置上.

13. $\sin20°\cos10°-\cos160°\sin10°=$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

14. 已知向量$\vec{a}=(x-1,2)$，$\vec{b}=(y,-4)$，若$\vec{a}/\!/\vec{b}$，则9^x+3^y的最小值为 12.

15. 三棱锥$A-BCD$中，$AB=CD=\sqrt{2}$，$AD=AC=BD=BC=\sqrt{5}$，则三棱锥$A-BCD$外接球的体积为________.

16. 在学习推理和证明的课堂上，老师给出两个曲线方程 $C_1:\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$；$C_2:x^4+y^4=1$，问同学们：你想到了什么？能得到哪些结论？下面是四位同学的回答：

甲：曲线 C_1 关于 $y=x$ 对称；

乙：曲线 C_2 关于原点对称；

丙：曲线 C_1 与坐标轴在第一象限围成的图形面积 $S_1<\frac{1}{2}$；

丁：曲线 C_2 与坐标轴在第一象限围成的图形面积 $S_2<\frac{\pi}{4}$；

四位同学回答正确的有 乙 丙（选填"甲、乙、丙、丁"）.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（一）必考题：共 60 分.

17.（本小题满分 12 分）

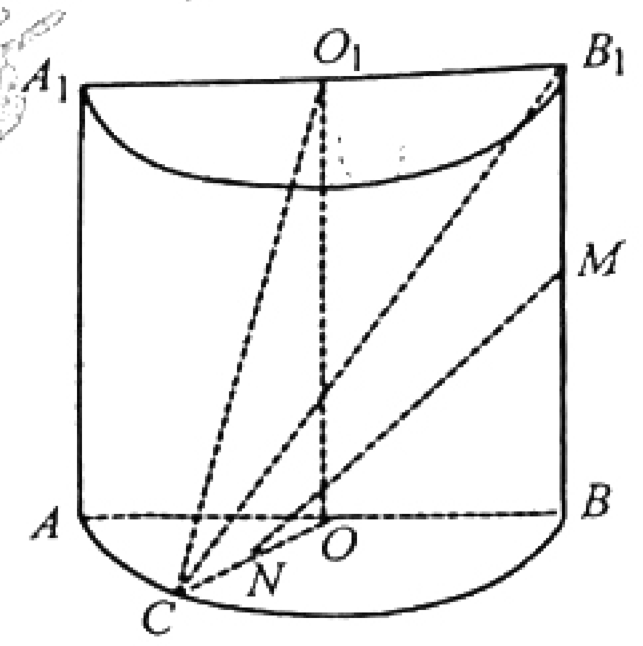
S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，$a_1=1$，$S_3=9$

（Ⅰ）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）设数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=2^{\frac{a_n+1}{2}}$，求 $b_8+b_9+\cdots+b_{100}$

18.（本小题满分 12 分）

如图，半圆柱 O_1O 中，平面 ABB_1A_1 过上、下底面的圆心 O_1，O，且 $AB=AA_1=2$，点 C 为半圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点，N 是 CO 的中点.



（Ⅰ）在线段 BB_1 上是否存在点 M 使 MN // 平面 CO_1B_1，若存在，给出证明；若不存在，说明理由.

（Ⅱ）求三棱锥 $C-O_1B_1N$ 的体积.

19.（本小题满分 12 分）

新冠疫情爆发以来，在党和政府的领导下，社区工作人员做了大量的工作，为总结工作中的经验和不足，设计了一份调查问卷，满分 100 分，随机发给 100 名男性居民和 100 名女性居民，分数统计如下：

100 位男性居民评分频数分布表

分组	频数
[50,60)	5
[60,70)	15
[70,80)	64
[80,90)	7
[90,100]	9
合计	100

100 位女性居民评分频数分布表

分组	频数
[50,60)	3
[60,70)	12
[70,80)	72
[80,90)	8
[90,100]	5
合计	100

（Ⅰ）根据 100 位男性居民评分的频率分布表估计男性居民评分的均值 $\bar{x}$；

（Ⅱ）若规定评分小于 70 分为不满意、评分大于等于 70 分为满意，请完成下列 2×2 列联表，并判断能否有 99% 的把握认为居民是否满意与性别有关.

	满意	不满意	合计
男性			
女性			
合计			

参考公式 $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, $n = a+b+c+d$

$p(K^2 \geq k_0)$	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.706	3.841	5.204	6.635	7.879	10.828

20.（本小题满分 12 分）

椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，过点$\left(1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）过 $H(1,0)$ 的直线交椭圆于 A,B 两点，A 关于 x 轴对称点为 E，求证：直线 BE 过定点.

21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\ln x-ax+1(a\in R)$.

（Ⅰ）若 $f(x)\leq 0$ 恒成立，求实数 a 的取值范围；

（Ⅱ）求证：$(x+1)^{\frac{f(x)+ax-1}{x}}<e^x$.

（二）选考题：共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做，则按所做的第一题计分，做答时用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目对应的题号涂黑. 本题满分 10 分.

22. [选修 4－4：坐标系与参数方程]

在平面直角坐标系 xOy 中，直线 l 的参数方程为$\begin{cases}x=3t\\y=-\sqrt{3}t\end{cases}$（$t$ 为参数），曲线 C_1 的参数方程为$\begin{cases}x=2+2\cos\theta\\y=2\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数），以该直角坐标系的原点 O 为极点，x 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho=2\sqrt{3}\cos\theta-2\sin\theta$.

（Ⅰ）分别求曲线 C_1 的极坐标方程和曲线 C_2 的直角坐标方程；

（Ⅱ）设直线 l 交曲线 C_1 于 O,A 两点，交曲线 C_2 于 O,B 两点，求 $|AB|$ 的长.

23. [选修 4－5：不等式选讲]

已知函数 $f(x)=|x+2|-|x-1|$.

（Ⅰ）解不等式 $f(x)\leq x$；

（Ⅱ）设 $f(x)$ 的最大值为 t，如果正实数 m,n 满足 $m+2n=t$，求$\frac{2}{m}+\frac{1}{n}$ 的最小值.

二模文科答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	C	B	A	C	D	A	B	B	D	A	A

13 $\frac{1}{2}$． 14.6　　15. $\sqrt{6}\pi$ _　16. 甲，乙，丙

17. 解：设 $a_n = a_1 + (n-1)d, s_3 = 3a_1 + \frac{3\times 2}{2}d = 9, a_1 = 1, \therefore d = 2$， …3 分

$\therefore a_n = 1 + 2(n-1) = 2n-1$　　…5 分

$b_n = 2^{\frac{2n-1+1}{2}} = 2^n$　　…7 分

$b_8 + b_9 + \cdots + b_{100} = 2^8 + 2^9 + \cdots + 2^{100} = \frac{2^8(1-2^{93})}{1-2} = 2^{101} - 2^8$　　…12 分

18. （1）证明：存在，是 BB_1 的中点

取 CO_1 的中点 P，连接 NP， B_1P．

$\because N$ 是 CO 的中点，$\therefore NP//OO_1//MB_1$

$\because M$ 是 BB_1 的中点，$\therefore NP = MB_1$，

$\therefore$四边形 MB_1PN 是平行四边形，$\therefore MN//PB_1$．　…2 分

$\because PB_1 \subset$ 平面 CO_1B_1， $MN \not\subset$ 平面 CO_1B_1，　…4 分

$\therefore MN//$ 平面 CO_1B_1．　…6 分

（2）解：$V_{C-O_1B_1N} = V_{B_1-CO_1N} = \frac{1}{3}S_{\Delta CO_1N}O_1B_1 = \frac{1}{3}\times(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 2)\times 1 = \frac{1}{6}$　…12 分

19. 解：$\bar{x} = \frac{1}{100}(55\times 5 + 65\times 15 + 75\times 64 + 85\times 7 + 95\times 9) = \frac{7500}{100} = 75$

… 3 分

均值为75

…4 分

	满意	不满意	合计
男性	80	20	100
女性	85	15	100
合计	165	35	200

…6 分

$$k^2=\frac{200(80\times15-20\times85)^2}{165\times35\times100\times100}\approx0.866<6.635$$ 11

分

没有 99%的把握认为居民是否满意与性别有关 12 分

20. 解： $e=\frac{\sqrt{3}}{2},c=\frac{\sqrt{3}}{2}a,b=\frac{1}{2}a,\frac{1}{a^2}+\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}a^2}=1,a^2=4,b^2=1$ …4 分

$\therefore$ 椭圆方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ …5 分

设直线与椭圆联立 $\begin{cases}x=ty+1\\x^2+4y^2=4\end{cases},(4+t^2)y^2+2ty-3=0$

$y_1+y_2=\frac{-2t}{4+t^2},y_1y_2=\frac{-3}{4+t^2},\Delta=4t^2-4\times(-3)(4+t^2)=4t^2+4\times3\times(4+t^2)>0$

…7 分

$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),E(x_1,-y_1)$

直线 $BE:y=\frac{y_2+y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)-y_1,$

$$y=0,x=\frac{y_1(x_2-x_1)}{y_2+y_1}+x_1=\frac{y_1x_2+y_2x_1}{y_2+y_1}=\frac{2ty_1y_2+y_2+y_1}{y_2+y_1}=\frac{2t\frac{-3}{4+t^2}+\frac{-2t}{4+t^2}}{\frac{-2t}{4+t^2}}=4$$

…11 分

直线 BE 过点（4,0） …12 分

21.

解：$f'(x)=\frac{1}{x}-a$

$a\le 0, f'(x)>0, y=f(x)$为增函数，$f(1)=1-a>0, f(x)\le 0$ 不恒成立……2分

$a>0, 0<x<\frac{1}{a}, f'(x)>0, \frac{1}{a}<x, f'(x)<0, \left(0,\frac{1}{a}\right)$是增区间，$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$是减区间……4分

$f\left(\frac{1}{a}\right)_{max}=\ln\frac{1}{a}\le 0, a\ge 1$……5分

∴ 实数a的取值范围是 $a\ge 1$……6分

(2) $\frac{\ln x}{x}(x+1)<e^x$，即 $\frac{\ln x}{x}<\frac{e^x}{x+1}$，设 $g(x)=\frac{\ln x}{x}, h(x)=\frac{e^x}{x+1}$

$g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，$(0,e)$，g(x)是增函数，$(e,+\infty)$是减函数，分 $g(e)_{max}=\frac{1}{e}$……9

$h'(x)=\frac{xe^x}{(x+1)^2}>0$，$(0,+\infty)$，h(x)是增函数 x h( ) $>1, 1>\frac{1}{e}$ 分……11

$\therefore (x+1)\frac{f(x)+ax-1}{x}<e^x$……12分

22：（1）曲线 C_1：$\begin{cases} x=2+2\cos\theta \\ y=2\sin\theta \end{cases}$（$\theta$ 为参数）可化为直角坐标方程：

$(x-2)^2+y^2=4$，

即 $x^2+y^2-4x=0$，可得 $\rho^2-4\rho\cos\theta=0$，

所以曲线 C_1 的极坐标方程为：$\rho=4\cos\theta$ ……2 分

曲线 C_2：$\rho=2\sqrt{3}\cos\theta-2\sin\theta$，即 $\rho^2=2\sqrt{3}\rho\cos\theta-2\rho\sin\theta$，

则 C_2 的直角坐标方程为：$(x-\sqrt{3})^2+(y+1)^2=4$. …

（2）直线 l 的直角坐标方程为 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x$，

所以 l 的极坐标方程为 $\theta=-\frac{\pi}{6}$ 或 $\theta=\frac{5\pi}{6}$. 联立 $\begin{cases} \theta=-\frac{\pi}{6} \\ \rho=4\cos\theta \end{cases}$，$\begin{cases} \theta= \\ \rho \end{cases}$

得 $A\left(2\sqrt{3},-\frac{\pi}{6}\right)$

联立 $\begin{cases}\theta=-\dfrac{\pi}{6}\\ \rho=2\sqrt{3}\cos\theta-2\sin\theta\end{cases}$，$\begin{cases}\theta=\dfrac{5\pi}{6}\\ \rho=2\sqrt{3}\cos\theta-2\sin\theta\end{cases}$，得 $B\left(4,-\dfrac{\pi}{6}\right)$，……9 分

$|AB|=|\rho_A-\rho_B|=4-2\sqrt{3}$． ……10 分

解：（Ⅰ）$\because f(x)=|x+2|-|x-1|$

①当 $x\le -2$ 时，$f(x)=-x-2+(x-1)=-3\le x$，$\therefore x\ge -3$，$\because x\le -2$，$\therefore -3\le x\le -2$；…1 分

②当 $-2<x<1$ 时，$f(x)=x+2+(x-1)=2x+1\le x$，$\therefore -2<x\le -1$；…2 分

③当 $x\ge 1$ 时，$f(x)=x+2-(x-1)=3\le x$，$\because x\ge 3$；…3 分

综上知不等式 $f(x)\le x$ 的解集为 $[-3,-1]\cup[3,+\infty)$． …5 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，$f(x)=\begin{cases}-3, & x\le -2\\ 2x+1, & -2<x<1\\ 3, & x\ge 1\end{cases}$，$(-2,1)$ 是增函数 …6 分

所以 $f(x)_{\max}=3$， …7 分

$\therefore m+2n=3$，m>0,n>0 则

$\dfrac{2}{m}+\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{3}\cdot(\dfrac{2}{m}+\dfrac{1}{n})(m+2n)=\dfrac{1}{3}(4+\dfrac{4n}{m}+\dfrac{m}{n})\ge\dfrac{1}{3}\times(4+2\sqrt{\dfrac{4n}{m}\cdot\dfrac{m}{n}})=\dfrac{8}{3}$，9 分

当且仅当 $\dfrac{4n}{m}=\dfrac{m}{n}$，即 $m^2=4n^2$，即 $m=2n=\dfrac{3}{2},n=\dfrac{3}{4}$ 时，$\dfrac{2}{m}+\dfrac{1}{n}$ 取得最小值 $\dfrac{8}{3}$ …10 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 " 精益求精、专业严谨 " 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。