

房山区 2022-2023 学年度第一学期诊断性评价

高三数学

第一部分 (选择题 共 40 分)

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

(1) 已知集合 $A = \{-2, 0, 1, 2\}$ ， $B = \{x | x^2 \leq 1\}$ ，则 $A \cap B =$

- (A) $\{-1, 0, 1\}$ (B) $\{0, 1\}$
(C) $\{-2, 0, 1\}$ (D) $\{-2, 0, 1, 2\}$

(2) 若复数 z 满足 $z(1+i) = 2i$ ，则在复平面内 z 对应的点位于

- (A) 第一象限 (B) 第二象限
(C) 第三象限 (D) 第四象限

(3) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $2a_{n+1} = a_n$ ， $a_1 = 2$ ，则数列 $\{a_n\}$ 的前四项和 S_4 的值为

- (A) $\frac{15}{16}$ (B) $-\frac{15}{16}$ (C) $\frac{15}{4}$ (D) $-\frac{15}{4}$

(4) 已知函数 $f(x) = \frac{1-4^x}{2^x}$ ，则 $f(x)$

- (A) 图象关于原点对称，且在 $[0, +\infty)$ 上是增函数
(B) 图象关于原点对称，且在 $[0, +\infty)$ 上是减函数
(C) 图象关于 y 轴对称，且在 $[0, +\infty)$ 上是增函数
(D) 图象关于 y 轴对称，且在 $[0, +\infty)$ 上是减函数

(5) 若角 α 、 β 是锐角三角形的两个内角，则下列各式中一定成立的是

- (A) $\cos \alpha > \cos \beta$ (B) $\sin \alpha < \sin \beta$
(C) $\cos \alpha > \sin \beta$ (D) $\cos \alpha < \sin \beta$

(6) 设平面 α 与平面 β 相交于直线 l ，直线 m 在平面 α 内，直线 n 在平面 β 内，且 $m \perp l$ 。

则“ $\alpha \perp \beta$ ”是“ $m \perp n$ ”的

- (A) 充分不必要条件
(B) 必要不充分条件
(C) 充分必要条件
(D) 既不充分也不必要条件

(7) 若抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 上一点 M 到抛物线的准线和对称轴的距离分别为 5 和 3，

则 p 的值为

- (A) 1 (B) 2 (C) 1 或 9 (D) 2 或 9

(8) 已知半径为 1 的动圆 P 经过坐标原点，则圆心 P 到直线 $mx + y - 2 = 0$ ($m \in \mathbf{R}$) 的距离的最大值为

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

(9) 某教学软件在刚发布时有 100 名教师用户，发布 5 天后有 1 000 名教师用户。如果教师用户人数 $R(t)$ 与天数 t 之间满足关系式： $R(t) = R_0 e^{kt}$ ，其中 k 为常数， R_0 是刚发布时的教师用户人数，则教师用户超过 20 000 名至少经过的天数为

- (A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 12

(参考数据： $\lg 2 \approx 0.3010$)

(10) 在 $\triangle ABC$ 中， $BC = 4$ ， $AB = 3AC$ ，则 $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}$ 的取值范围为

- (A) $[-3, 12]$ (B) $(-3, 12)$
(C) $[12, 24]$ (D) $(12, 24)$

第二部分 (非选择题 共 110 分)

二、填空题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分。

(11) 函数 $f(x) = \frac{1}{x-1} + \lg x$ 的定义域是_____.

(12) $(\frac{1}{x} - x^3)^4$ 的展开式中常数项是_____. (用数字作答)

(13) 若双曲线 $\frac{x^2}{m} - y^2 = 1$ 的离心率为 2, 则该双曲线的渐近线方程为_____.

(14) 若函数 $f(x) = \begin{cases} |x|, & x \leq m, \\ x^2 - 2mx + 4m, & x > m \end{cases}$ 存在最小值, 则 m 的一个取值为____;
 m 的最大值为_____.

(15) 函数 $f(t) = 0.03 \sin(1\,000\pi t) + 0.02(\sin 2\,000\pi t) + 0.01 \sin(3\,000\pi t)$

的图象可以近似表示某音叉的声音图象. 给出下列四个结论:

① $\frac{1}{500}$ 是函数 $f(t)$ 的一个周期;

② $f(t)$ 的图象关于直线 $t = \frac{1}{500}$ 对称;

③ $f(t)$ 的图象关于点 $(\frac{1}{500}, 0)$ 对称;

④ $f(t)$ 在 $[-\frac{1}{6\,000}, \frac{1}{6\,000}]$ 上单调递增.

其中所有正确结论的序号是_____.

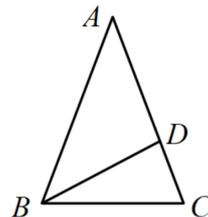
三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

(16) (本小题 14 分)

在 $\triangle ABC$ 中， D 是边 AC 上一点， $CD=1$ ， $BD=2$ ， $AB=3$ ， $\cos \angle BDC = \frac{1}{8}$ 。

(I) 求 AD 的长；

(II) 求 $\triangle ABC$ 的面积。



(17) (本小题 14 分)

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 1 的正方形， $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ， Q 为棱 PD 的中点。

(I) 求证： $PB \parallel$ 平面 ACQ ；

(II) 再从条件①、条件②、条件③中选择一个作为已知，

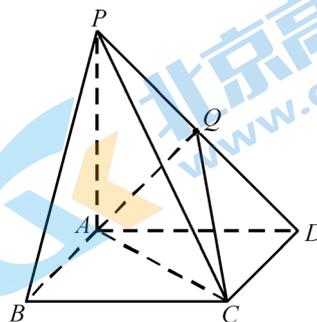
求：直线 PC 与平面 ACQ 所成角的正弦值，

以及点 P 到平面 ACQ 的距离。

条件①： $AQ \perp PC$ ；

条件②： $AQ \perp$ 平面 PCD ；

条件③： $CQ = \frac{\sqrt{6}}{2}$ 。



(把此图用黑签字笔画在答题卡上)

(18) (本小题 14 分)

为弘扬中华优秀传统文化，营造良好的文化氛围，增强文化自觉和文化自信，某区组织开展了中华优秀传统文化知识竞答活动，该活动有单人赛和PK赛，每人只能参加其中的一项。据统计，中小學生参与该项知识竞答活动的人数共计 4.8 万，其中获奖学生情况统计如下：

组别 \ 奖项	单人赛			PK 赛 获奖
	一等奖	二等奖	三等奖	
中学组	40	40	120	100
小学组	32	58	210	100

- (I) 从获奖学生中随机抽取 1 人，若已知抽到的学生获得一等奖，求抽到的学生来自中学组的概率；
- (II) 从中学组和小学组获奖者中各随机抽取 1 人，以 x 表示这 2 人中 PK 赛获奖的人数，求 x 的分布列和数学期望；
- (III) 从获奖学生中随机抽取 3 人，设这 3 人中来自中学组的人数为 ξ ，来自小学组的人数为 η ，试判断 $D(\xi)$ 与 $D(\eta)$ 的大小关系。(结论不要求证明)

(19) (本小题 15 分)

已知函数 $f(x) = a(x-1)^2 + e^x(x-2)$ ($a \in \mathbf{R}$) .

- (I) 当 $a = 0$ 时，求曲线 $y = f(x)$ 在点 $x = 1$ 处的切线方程；
- (II) 求函数 $f(x)$ 的单调区间；
- (III) 若函数 $f(x)$ 恰有一个零点，则 a 的取值范围为 _____. (只需写出结论)

(20) (本小题 14 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 经过点 $P(2,3)$ ，且点 P 到两个焦点的距离之和为 8.

(I) 求椭圆 C 的方程;

(II) 直线 $l: y = kx + m$ 与椭圆 C 分别相交于 A, B 两点，直线 PA, PB 分别与 y 轴交于点 M, N . 试问是否存在直线 l ，使得线段 MN 的垂直平分线经过点 P ，如果存在，写出一条满足条件的直线 l 的方程，并证明；如果不存在，请说明理由.

(21) (本小题 14 分)

若对 $\forall m, n \in \mathbb{N}_+$ ，当 $m - n \in A$ 时，都有 $a_m - a_n \in A$ ，则称数列 $\{a_n\}$ 受集合 A 制约.

(I) 若 $a_n = 2^n$ ，判断 $\{a_n\}$ 是否受 \mathbb{N}_+ 制约， $\{a_n\}$ 是否受区间 $[0,1]$ 制约;

(II) 若 $a_1 = 1, a_2 = 3$ ， $\{a_n\}$ 受集合 $\{2\}$ 制约，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(III) 若记 p ：“ $\{a_n\}$ 受区间 $[1, 2]$ 制约”， q ：“ $\{a_n\}$ 受集合 $\{2\}$ 制约”，

判断 p 是否是 q 的充分条件， p 是否是 q 的必要条件，并证明你的结论.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯