2022 北京房山高三一模

数　学

本试卷共 6 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将答题卡交回，试卷自行保存。

第一部分（选择题共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知集合 $A=\{-2,-1,0,1,2\}$，$B=\{x|\ x^2<2\}$ 则 $A\cap B=$（　）

（A）$\{-2,-1,0,1,2\}$　　（B）$\{-1,0,1\}$

（C）$\{-2,2\}$　　（D）$\{0,1\}$

（2）在复平面内，复数 z 对应的点的坐标为 $(2,-1)$，则 $z\cdot\bar{z}=$（　）

（A）5　　（B）3

（C）5−4i　　（D）3−4i

（3）若 $ab>0$，且 $a<b$ 则下列不等式一定成立的是（　）

（A）$a^2<b^2$　　（B）$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$

（C）$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}>2$　　（D）$\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$

（4）若 $\left(x+\frac{a}{x}\right)^6$ 的展开式中的常数项为 -20，则 $a=$（　）

（A）2　　（B）−2

（C）1　　（D）−1

（5）已知 M 为抛物线 $x^2=2py(p>0)$ 上一点，M 到抛物线的焦点的距离为 4，到 x 轴距离为 3，则 $p=$（　）

（A）$\frac{1}{2}$　　（B）1　　（C）2　　（D）4

（6）在等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_3=5$，$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_5}=\frac{10}{9}$ 则 $a_1\cdot a_5=$（　）

（A）$\frac{9}{2}$　　（B）9　　（C）10　　（D）25

（7）大西洋鲑鱼每年都要逆流而上游回产地产卵，研究发现鲑鱼的游速（单位：m/s）可以表示为 $v=\frac{1}{2}\log_3\frac{Q}{100}$，其中 Q 表示鲑鱼的耗氧量，则鲑鱼以 1.5m/s 的速度游动时的耗氧量与静止时的耗氧量的比值为（　）

（A）2600　　（B）2700　　（C）26　　（D）27

（8）已知函数 $f(x)=2\cos^2(x+\theta)-1$，则“$\theta=\frac{\pi}{4}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$”“是 $f(x)$ 为奇函数”的（　）

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

（9）已知直线 l 被圆 $C:x^2+y^2=2$ 所截的弦长不小于 2，则下列曲线中与直线 l 一定有公共点的是（　）

（A）$y=x^2-1$　　（B）$(x-1)^2+y^2=1$

（C）$\frac{x^2}{2}+y^2=1$　　（D）$x^2-y^2=1$

（10）已知 U 是非空数集，若非空集合 A_1,A_2 满足以下三个条件，则称 $\left(A_1,A_2\right)$ 为集合 U 的一种真分拆，并规定 $\left(A_1,A_2\right)$ 与 $\left(A_2,A_1\right)$ 为集合 U 的同一种真分拆.

① $A_1\cap A_2=\varnothing$；

② $A_1\cup A_2=U$；

③ $A\left(i=1,2\right)$ 的元素个数不是 A_1 中的元素.

则集合 $U=\{1,2,3,4,5,6\}$ 的真分拆的种数是（　）

（A）5　　（B）6　　（C）10　　（D）15

第二部分（非选择题共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

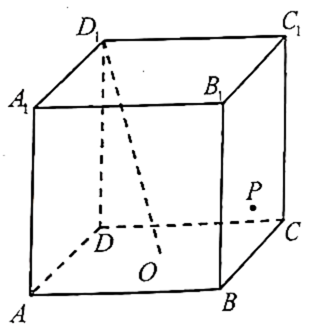
（11）若双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-y^2=1(a>0)$ 的一条渐近线方程为 $y=\frac{1}{2}x$，则 $a=$_______.

（12）已知 a,b 是单位向量，$c=a+2b$，且 $a\perp c$，则 $a\cdot b=$_______；$|c|=$_______.

（13）将函数 $f\left(x\right)=sin2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后得到函数 $g\left(x\right)$ 的图象，则 $g\left(x\right)=$_____；若 $g\left(x\right)$ 在区间 $\left[0,m\right]$ 上的最小值为 $g\left(0\right)$，则 m 的最大值为_____.

（14）函数 $f\left(x\right)$ 的图象在区间 $\left(0,2\right)$ 上连续不断，能说明“若 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left(0,2\right)$ 上存在零点，则 $f\left(0\right):f\left(2\right)<0$”为假命题的一个函数 $f\left(x\right)$ 的解析式可以为 $f\left(x\right)=$______.

（15）如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，点 O 为底面 $ABCD$ 的中心，点 P 在侧面 BB_1C_1C 的边界及其内部运动．给出下列四个结论：



① $D_1O\perp AC$；

②存在一点 P，$D_1O//B_1P$；

③若 $D_1O\perp OP$，则 $\triangle D_1C_1P$ 面积的最大值为 $\sqrt{5}$；

④若 P 到直线 D_1C_1 的距离与到点 B 的距离相等，则 P 的轨迹为抛物线的一部分．其中所有正确结论的序号_________.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（16）（本小题 14 分）

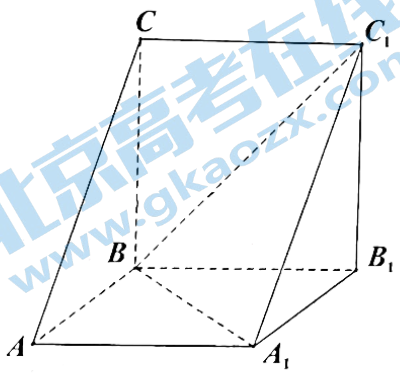
如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$BB_1\perp$ 平面 ABC，$AB=BC=BB_1=1$.

（I）求证：$AC//$ 平面 BA_1C_1；

（I）若 $AB\perp BC$，求：

① AA_1 与平面 BA_1C_1 所成角的正弦值；.

②直线 AC 与平面 BA_1C_1 的距离、



（17）（本小题 14 分）

在 $\triangle ABC$ 中，，$b\sin A=a\cos B$.

（I）求 $\angle B$ 的大小；

（II）再从下列三个条件中，选择两个作为已知，使得 $\triangle ABC$ 存在且唯一，求 $\triangle ABC$ 的面积.

条件①：$\cos A=-\frac{1}{2}$；

条件②：$b=\sqrt{2}$；

条件③：AB 边上的高为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

注：如果选择的条件不符合要求，第（II）问得 0 分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

（18）（本小题 14 分）

良好的生态环境是最普惠的民生福祉，北京市集中开展大气污染防治以来，在经济社会快速发展的同时实现了大气主要污染物浓度持续下降．2021 年，经过全市共同努力，空气质量首次全面达标，大气污染治理取得里程碑式突破，下表是 2021 年每个月空气质量优良和污染的天数统计.

月份	1 月	2 月	3 月	4 月	5 月	6 月	7 月	8 月	9 月	10 月	11 月	12 月	合计
空气质量优良天数	24	18	11	27	23	21	26	29	27	29	23	30	288
空气质量污染天数	7	10	20	3	8	9	5	2	3	2	7	1	77

（I）从 2021 年中任选 1 天，求这一天空气质量优良的概率；

（II）从 2021 年的 4 月、6 月和 9 月中各任选大，设随机变量 X 表示选出的 3 天中空气质量优良的天数，求 X 的分布列；

（III）在 2021 年的 1 月、3 月、5 月、7 月、8 月、10 月、12 月中，设空气质量优良天数的方差为 S_1^2，空气质量污染天数的方差为 S_2^2 会．试判断 S_1^2，S_2^2 之的大小关系．（结论不要求证明）

（19）（本小题 14 分）

已知函数 $f(x)=(\ln x-a)e^{x}$.

（I）当 $a=0$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程；

（II）若 $f(x)$ 在区间 $(0,\mathrm{e}]$ 存在极小值，求 a 的取值范围.

（20）（本小题 15 分）

已知椭圆 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，长轴的两个端点分别为 $A(-2,0),B(2,0)$.

（I）求椭圆 C 的方程；

（II）过点 $(1,0)$ 的直线与椭圆 C 交于 M,N（不与 A,B 重合）两点，直线 AM 与直线 $x=4$ 交于点 Q .

求证：$\frac{S_{\triangle MBN}}{S_{\triangle MBQ}}=\frac{|BN|}{|BQ|}$.

（21）（本小题 14 分）

若无穷数列 $\{a_n\}$ 满足如下两个条件，则称 $\{a_n\}$ 为无界数列：

① $a_n>0(n=1,2,3)\cdots$；

②对任意的正数 δ，都存在正整数 N，使得 $a_N>\delta$.

（I）若 $a_n=2n+1,b_n=2+\cos(n)(n=1,2,3\cdots)$，判断数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 是否是无界数列；

（II）若 $a_n=2n+1$，是否存在正整数 k，使得对于一切 $n\geq k$，

都有 $\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_n}{a_{n+1}}<n-1$ 成立？若存在，求出 k 的范围；若不存在说明理由；

（III）若数列 $\{a_n\}$ 是单调递增的无界数列，

求证：存在正整数 m，使得 $\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_m}{a_{m+1}}<m-1$.

参考答案

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	A	C	D	C	B	D	A	C	A

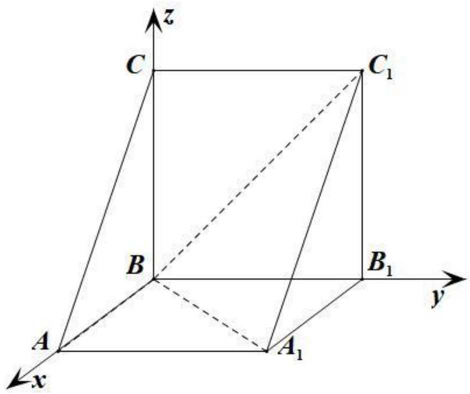
二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

（11） 2　（12） $-\frac{1}{2};\sqrt{3}$　（13） $\sin(2x-\frac{\pi}{3});\frac{5\pi}{6}$

（14）答案不唯一，如$(x-1)^2$　（15）①③

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（16）（本小题 14 分）



（I）在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，四边形 AA_1CC_1 为平行四边形.

所以 AC // A_1C_1 2

因为 $AC\not\subset$ 平面 BA_1C_1，$A_1C_1\subseteq$ 平面 BA_1C_1，

所以 AC//平面 BA_1C_1... 2(4)

（II）因为 $BB_1\perp$平面 ABC，$AB,BC\subseteq$ 平面 ABC，

所以 $BB_1\perp AB, BB_1\perp BC$.

又 $AB\perp BC$，

所以 AB,BB_1,BC 两两互相垂直.

如图建立空间直角坐标系 $B-xyz$，..1(5)

则 $A(1,0,0),B_1(0,1,0),C_1(0,1,1),A_1(1，1，0)$，$B(0,0,0)$.

所以 $\overrightarrow{BA_1}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{BC_1}=(0,1,1)$，$\overrightarrow{AA_1}=(0,1,0)$ ....6(6)

设平面 BA_1C_1 的法向量为 $n=(x, y,z)$，则

$$\begin{cases} n\cdot\overrightarrow{BA_1}=0 \\ n\cdot\overrightarrow{BC_1}=0 \end{cases}，即\begin{cases} x+y=0 \\ y+z=0. \end{cases}$$

令 $x=1$，则 $y=-1, z=1$.于是 $n=(1, -1,1)$..3（9）

① 设直线 AA_1 与平面 BA_1C_1 所成的角为 θ，则

$$\sin\theta=\left|\cos\left\langle\overrightarrow{AA_1},n\right\rangle\right|=\left|\frac{\overrightarrow{AA_1}\cdot n}{\left|\overrightarrow{AA_1}\right|\left|n\right|}\right|=\frac{|(0,1,0)\cdot(1,-1,1)|}{1\cdot\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$ ....2（11）

所以 AA_1 与平面 BA_1C_1 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

②因为 AC//平面 BA_1C_1，

所以直线 AC 与平面 BA_1C_1 的距离就是点 A 到平面 BA_1C_1 的距离 ....1（12）

设 A 到面 BA_1C_1 的距离为 h，则

$$h=\frac{|\overrightarrow{AA_1}\cdot n|}{|n|}=\frac{|(0,1,0)\cdot(1,-1,1)|}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$ ....2（14）

（17）（本小题 14 分）

（I）由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ 及 $b\sin A=a\cos B$ 2

得 $a\sin B=a\cos B$.

所以 $\tan B=1$..2

因为 0º＜∠B＜180 º，

所以∠B＝45 º..1（5）

（II）选择条件①②，ΔABC 存在且唯一，解答如下：

由 $\cos A=-\frac{1}{2}$，及 0º＜∠A＜135º，得∠A＝120 º ....1（6）

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ 及 $b=\sqrt{2}$

得 $\frac{a}{\sin 120^\circ}=\frac{\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}$，解得 $a=\sqrt{3}$ ....3（9）

方法 1：由 $A+B+C=180^\circ$，得∠C＝15º.

$\sin C=\sin 15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)$

$=\sin 45^\circ\cdot\cos 30^\circ-\cos 45^\circ\cdot\sin 30^\circ$ ....3（12）

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}$

所以 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\frac{3-\sqrt{3}}{4}$ ....2（14）

方法 2：由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，得 $3=2+c^2-2\sqrt{2}c\cdot(-\frac{1}{2})$

即 $c^2+\sqrt{2}c-1=0$，解得 $c=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

所以 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2})\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3-\sqrt{3}}{4}$

选择①③，ΔABC 存在且唯一，解答如下：

由 $\cos A=-\frac{1}{2}$，及 $0^\circ<\angle A<135^\circ$，得 $\angle A=120^\circ$ ....1（6）

因为 AB 边上的高为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$，所以 $b=\frac{h}{\sin A}=\frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{2}$ ....2（8）

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ 及 $b=\sqrt{2}$

得 $\dfrac{a}{\sin 120^\circ}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}$，解得：$a=\sqrt{3}$ ……………………………………………………………3（9）

（以下与选择条件①②相同）

（18）（本小题 14 分）

（I）记事件 A 为"从 2021 年中任选 1 天，这一天空气质量优良"，

则 $P(A)=\dfrac{288}{365}$ ……………………………………………………………………………4

（II）X 的所有可能取值为 0,1,2,3. ……………………………………………………………1

方法 1：记事件 B 为"从 4 月任选 1 天，这一天空气质量优良"，

事件 C 为"从 6 月任选 1 天，这一天空气质量优良"，

事件 D 为"从 9 月任选 1 天，这一天空气质量优良".

由题意知，事件 B, C, D 相互独立，

且 $P(B)=P(D)=\dfrac{27}{30}=\dfrac{9}{10}$，$P(C)=\dfrac{21}{30}=\dfrac{7}{10}$ ……………………………………2

所以 $P(X=0)=P(\bar{B}\bar{C}\bar{D})=P(\bar{B})P(\bar{C})P(\bar{D})=\dfrac{1}{10}\times\dfrac{3}{10}\times\dfrac{1}{10}=\dfrac{3}{1000}$ ……………………1

$P(X=1)=P(B\bar{C}\bar{D}+\bar{B}C\bar{D}+\bar{B}\bar{C}D)=P(B)P(\bar{C})P(\bar{D})+P(\bar{B})P(C)P(\bar{D})+P(\bar{B})P(\bar{C})P(D)$

$=\dfrac{9}{10}\times\dfrac{3}{10}\times\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{10}\times\dfrac{7}{10}\times\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{10}\times\dfrac{3}{10}\times\dfrac{9}{10}=\dfrac{61}{1000}$ ……………………1

$P(X=2)=P(BC\bar{D}+B\bar{C}D+\bar{B}CD)=P(B)P(C)P(\bar{D})+P(B)P(\bar{C})P(D)+P(\bar{B})P(C)P(D)$

$=\dfrac{9}{10}\times\dfrac{7}{10}\times\dfrac{1}{10}+\dfrac{9}{10}\times\dfrac{3}{10}\times\dfrac{9}{10}+\dfrac{1}{10}\times\dfrac{7}{10}\times\dfrac{9}{10}=\dfrac{369}{1000}$ ……………………1

$P(X=3)=P(BCD)=P(B)P(C)P(D)=\dfrac{9}{10}\times\dfrac{7}{10}\times\dfrac{9}{10}=\dfrac{567}{1000}$ ……………………1

方法 2：$P(X=0)=\dfrac{3\times9\times3}{30\times30\times30}=\dfrac{3}{1000}$

$P(X=1)=\dfrac{27\times9\times3+3\times21\times3+3\times9\times27}{30\times30\times30}=\dfrac{61}{1000}$

$P(X=2)=\dfrac{27\times21\times3+27\times9\times27+3\times21\times27}{30\times30\times30}=\dfrac{369}{1000}$

$P(X=3)=\dfrac{27\times21\times27}{30\times30\times30}=\dfrac{567}{1000}$

所以 X 的分布列为:

X	0	1	2	3
P	$\dfrac{3}{1000}$	$\dfrac{61}{1000}$	$\dfrac{369}{1000}$	$\dfrac{567}{1000}$

……………………………………………………………………………………………………1

（III） $s_1^2=s_2^2$ 2

（19）（本小题 14 分）

（I）当 a=0 时， $f(x)=\ln x\cdot e^x(x>0)$

则 $f'(x)=(\ln x+\frac{1}{x})e^x$ 1

所以 $f'(1)=e$， $f(1)=0$ 2

所以曲线 $y=f(x)$ 在 x=1 处的切线方程为 $y=e(x-1)$ ....1（4）

（II） $f'(x)=(\ln x-a)'e^x+(\ln x-a)(e^x)'=\frac{1}{x}e^x+(\ln x-a)e^x=(\frac{1}{x}+\ln x-a)e^x$ ....1（5）

令 $g(x)=\frac{1}{x}+\ln x-a,x\in(0,e]$.

则 $g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$ ....1（6）

解 $g'(x)=0$,得 $x=1$.

$g'(x)$与 $g(x)$的变化情况如下：

x	（0，1）	1	(1, e)
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	↘	极小值	↗

所以函数 $g(x)$在区间(0, e]上的最小值为 $g(1)=1-a$ ....2（8）

方法 1：

① 当 $a\le1$ 时，$g(1)=1-a\ge0$，所以 $g(x)\ge0$ 恒成立，即 $f'(x)\ge0$ 恒成立，

所以函数 $f(x)$在区间 (0, e]上是增函数，无极值，不符合要求...1（9）

② 当 $1<a<1+\frac{1}{e}$ 时，因为 $g(1)=1-a<0$, $g(e)=1+\frac{1}{e}-a>0$,

所以存在 $x_0\in(1,e)$，使得 $g(x_0)=0$.

x	（1，x_0）	x_0	（x_0 , e）
$g(x)$($f'(x)$)	-	0	+
$f(x)$	↘	极小值	↗

所以函数 $f(x)$在区间(1, e)上存在极小值 $f(x_0)$，符合要求...4（13）

③当 $a\ge1+\frac{1}{e}$ 时，因为 $g(1)=1-a<0, g(e)=1+\frac{1}{e}-a<0$

所以函数 $f(x)$在区间(1, e)上无极值.

取 $x=\frac{1}{ae}\in(0,1)$，则 $g(\frac{1}{ae})=ae-\ln a-1-a\ge ae-(a-1)-1-a=a(e-2)>0$.

所以存在 $x_0\in(0,1)$，使得 $g(x_0)=0$.

易知，x_0为函数 $f(x)$在区间(0，1)上的极大值点.

所以函数 $f(x)$在区间(0, e)上有极大值，无极小值，不符合要求...1（14）

综上，实数 a 的取值范围是（$1,1+\frac{1}{e}$）.

方法 2：

“$f(x)$在区间$(0, e]$上存在极小值”当且仅当“$\begin{cases} g(1)<0 \\ g(e)>0 \end{cases}$”，解得$1<a<1+\frac{1}{e}$.

证明如下：

当$1<a<1+\frac{1}{e}$时，

因为$\begin{cases} g(1)<0 \\ g(e)>0 \end{cases}$，所以存在 x_0，使得 $g(x_0)=0$.

x	1，x_0	x_0	(x_0, e)
$g(x)(f'(x))$	-	0	+
$f(x)$	↘	极小值	↗

所以函数 $f(x)$在区间$(1, e)$上存在极小值.

所以实数 a 的取值范围是$(1,1+\frac{1}{e})$.

（20）（本小题 15 分）

（I）由长轴的两个端点分别为 $A(-2, 0)$, $B(2,0)$,可得 $a=2$ 1

由离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，可得$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以$c=\sqrt{3}$ 1

又 $a^2=b^2+c^2$，解得 $b=1$..1

所以椭圆 C 的标准方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$ ....2(5)

（II）方法 1：

当直线 l 斜率不存在时，直线 l 的方程为 $x=1$，

易得$M(1,\frac{\sqrt{3}}{2}), N(1,-\frac{\sqrt{3}}{2})$

所以$k_{AM}=\frac{\sqrt{3}}{6}$，直线 AM 所在的方程为$y=\frac{\sqrt{3}}{6}(x+2)$.

求得 $Q(4,\sqrt{3})$.

$k_{BN}=\frac{\sqrt{3}}{2}, k_{QB}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

所以，N,B,Q 三点共线，所以$\frac{S_{\Delta MBN}}{S_{\Delta MBQ}}=\frac{|BN|}{|BQ|}$ ....1（6）

当直线 l 斜率存在时，设直线 l 的方程为$y=k(x-1)(k\neq 0)$ ....1（7）

由$\begin{cases} y=k(x-1) \\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases}$得$(1+4k^2)x^2-8k^2x+4k^2-4=0$ ....1（8）

设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$，

则 $x_1+x_2=\dfrac{8k^2}{1+4k^2}$， $x_1 \cdot x_2=\dfrac{4k^2-4}{1+4k^2}$ ....2（10）

$k_{AM}=\dfrac{y_1}{x_1+2}$，直线 AM 的方程为 $y=\dfrac{y_1}{x_1+2}(x+2)$ ....1（11）

所以 $Q(4, \dfrac{6y_1}{x_1+2})$ ....1（12）

所以 $k_{NB}=\dfrac{y_2-0}{x_2-2}=\dfrac{y_2}{x_2-2}, k_{BQ}=\dfrac{\dfrac{6y_1}{x_1+2}-0}{4-2}=\dfrac{\dfrac{6y_1}{x_1+2}}{2}=\dfrac{3y_1}{x_1+2}$

$k_{NB}-k_{BQ}=\dfrac{y_2}{x_2-2}-\dfrac{3y_1}{x_2+2}=\dfrac{k(x_2-1)}{x_2-2}-\dfrac{3k(x_1-1)}{x_1+2}$

$=\dfrac{k(x_2-1)(x_1+2)-3k(x_1-1)(x_2-1)}{(x_2-2)(x_1+2)}$

$=\dfrac{k[-2x_1x_2+5x_1+x_2-8]}{(x_2-2)(x_1+2)}$

$=\dfrac{k\left[-2\dfrac{(4k^2-4}{1+4k^2}+5\dfrac{8k^2}{1+4k^2}-8\right]}{(x_2-2)(x_1+2)}=0.$

所以，N,B,Q 三点共线，所以 $\dfrac{S_{\Delta MBN}}{S_{\Delta MBQ}}=\dfrac{|BN|}{|BQ|}$ ....3（15）

方法 2：

设直线 l 的方程为 $x=my+1$,

由$\begin{cases} x=mx+1, \\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases}$ 得$(m^2+4)y^2+2my-3=0$.

设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$，

则 $y_1+y_2=-\dfrac{2m}{m^2+4}, y_1 \cdot y_2=\dfrac{-3}{m^2+4}$.

$k_{AM}=-\dfrac{y_1}{x_1+2}$，直线 AM 的方程为 $y=\dfrac{y_1}{x_1+2}(x+2)$.

所以 $Q(4, \dfrac{6y_1}{x_1+2})$.

所以$k_{NB}=\dfrac{y_2-0}{x_2-2}=\dfrac{y_2}{x_2-2}, k_{BQ}=\dfrac{\dfrac{6y_1}{x_1+2}-0}{4-2}=\dfrac{\dfrac{6y_1}{x_1+2}}{2}=\dfrac{3y_1}{x_1+2}$

$$k_{NB}-k_{BQ}=\frac{y_2}{x_2-2}-\frac{3y_1}{x_1+2}=\frac{y_2(my_1+3)-3y_1(my_2-1)}{(x_2-2)(x_1+2)}$$

$$=\frac{-2my_1y_2+3(y_1+y_2)}{(x_2-2)(x_1+2)}=0.$$

（21）（本小题 14 分）

（I）$\{a_n\}$是无界数列；$\{b_n\}$不是无界数列. 4

（II）存在满足题意的正整数 k，且$k\geq 4$. 5

当$n\geq 4$时，

因为$n-\left(\dfrac{a_1}{a_2}+\dfrac{a_2}{a_3}+\cdots+\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right)=\dfrac{a_2-a_1}{a_2}+\dfrac{a_3-a_2}{a_3}+\cdots+\dfrac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}}$ 7

$=\dfrac{2}{5}+\dfrac{2}{7}+\cdots+\dfrac{2}{2n+3}\geq\dfrac{2}{5}+\dfrac{2}{7}+\dfrac{2}{9}+\dfrac{2}{11}>1$， 8

所以 存在正整数$k(k\geq 4)$，

对于一切$n\geq k$，有$\dfrac{a_1}{a_2}+\dfrac{a_2}{a_3}+\cdots+\dfrac{a_n}{a_{n+1}}<n-1$成立. 9

（III）因为数列$\{a_n\}$是单调递增的无界数列，所以$a_n>0, a_1<a_2<\cdots a_n<a_{n+1}<\cdots$

所以$n-\left(\dfrac{a_1}{a_2}+\dfrac{a_2}{a_3}+\cdots+\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right)=\dfrac{a_2-a_1}{a_2}+\dfrac{a_3-a_2}{a_3}+\cdots+\dfrac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}}$

$>\dfrac{a_2-a_1}{a_{n+1}}+\dfrac{a_3-a_2}{a_{n+1}}+\cdots+\dfrac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}}=\dfrac{a_{n+1}-a_1}{a_{n+1}}=1-\dfrac{a_1}{a_{n+1}}$ 11

即$\dfrac{a_1}{a_2}+\dfrac{a_2}{a_3}+\cdots+\dfrac{a_n}{a_{n+1}}<n-1+\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$

因为$\{a_n\}$是无界数列，取$M=2a_1$，由定义知存在正整数 N_1，使$a_{N_1+1}>2a_1$

所以 $\dfrac{a_1}{a_2}+\dfrac{a_2}{a_3}+\cdots+\dfrac{a_{N_1}}{a_{N_1+1}}<N_1-\dfrac{1}{2}$ 12

由定义可知$\{a_n\}$是无穷数列，考察数列$a_{N_1+1}, a_{N_1+2}, a_{N_1+3},\cdots$，显然这仍是一个单调递增的无界数列，同上理由可知存在正整数 N_2，使得

$\dfrac{a_{N_1+1}}{a_{N_1+2}}+\dfrac{a_{N_1+2}}{a_{N_1+3}}+\cdots+\dfrac{a_{N_2}}{a_{N_1+2}}<(N_2-N_1)-\dfrac{1}{2}$ 13

故存在正整数 N_2，使得

$\dfrac{a_1}{a_2}+\dfrac{a_2}{a_3}+\cdots+\dfrac{a_{N_2}}{a_{N_2+1}}<\left(N_1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(N_2-N_1-\dfrac{1}{2}\right)=N_2-1$ 14

即存在正整数 $m=N_2$，使得 $\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_m}{a_{m+1}}<m-1$ 成立.