

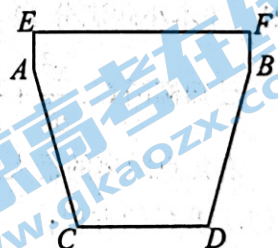
A10联盟2024届高 数学

巢湖一中 合肥八中 淮南二中 六安一中 南陵中学
滁州中学 池州一中 阜阳一中 灵璧中学 宿城一中
本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分

第 I 卷 选择题（共 60 分）

一、选择题（本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。）

1. 已知 $(1-i)x + (1+i)y = 1-3i$, $x, y \in \mathbf{R}$, 则 $x-y =$ ()
 A. 1 B. -1 C. 3 D. -3
2. 已知集合 $A = \{x | x = 3k-4, k \in \mathbf{N}\}$, $B = \{x | y = \ln(-x^2 + x + 12)\}$, 则 $A \cap B$ 的元素个数为 ()
 A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
3. 设 $a = 2^{\log_3 \frac{1}{2}}$, $b = \log_2 5$, $c = \log_3 5$, 则 ()
 A. $c < a < b$ B. $b < c < a$ C. $a < b < c$ D. $a < c < b$
4. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条渐近线与直线 $x-2y-1=0$ 垂直, 则 C 的离心率为 ()
 A. $\sqrt{6}$ B. $\sqrt{5}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\sqrt{2}$
5. 夏日炎炎, 某奶茶店推出了新款奶茶——“冰桶”系列, 受到了年轻消费者的喜爱, 已知该系列奶茶的容器可以看作是一个圆台与一个圆柱拼接而成, 其轴截面如图所示, 其中 $EF = 20 \text{ cm}$, $CD = 14 \text{ cm}$, $AE = 3 \text{ cm}$, $AC = 3\sqrt{26} \text{ cm}$; 则该容器的容积为 () (不考虑材料厚度)
 A. $1265\pi \text{ cm}^3$ B. $1365\pi \text{ cm}^3$
 C. $1295\pi \text{ cm}^3$ D. $1395\pi \text{ cm}^3$
6. 2023 年 7 月 28 日晚, 第 31 届世界大学生夏季运动会在成都盛大开幕. 为宣传成都大运会, 某大学团委开展了“阳光灿烂 青春与共”大运会知识竞赛活动, 各班以团支部为单位参加比赛, 某班团支部在 6 道题中(包含 4 道图片题和 2 道视频题), 依次不放回地随机抽取 2 道题作答, 设事件 A 为“第 1 次抽到图片题”, 事件 B 为“第 2 次抽到视频题”, 则 $P(B|\bar{A}) =$ ()
 A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{1}{5}$ D. $\frac{2}{5}$
7. 已知平面区域 $\Omega_1 = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$, $\Omega_2 = \{(x, y) | x^4 + y^2 \leq 1\}$, $\Omega_3 = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 1\}$, 记 $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ 的面积分别为 S_1, S_2, S_3 , 则 ()
 A. $S_3 < S_1 < S_2$ B. $S_3 < S_2 < S_1$ C. $S_2 < S_3 < S_1$ D. $S_2 < S_1 < S_3$



12. 已知首项为 $\frac{1}{2}$ 的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 其中 $S_{n+1} = S_n + a_n + \frac{a_n^2}{2023}$, 记数列 $\{1-a_n\}$ 的前 n 项积为 T_n , 则 ()

A. $a_2 < \frac{2}{3}$

B. $\exists k \in \mathbb{N}^*, a_{k+1} < a_k$

C. $T_{2024} > 0$

D. 使得 $T_k < 0$ 成立的最小正整数 k 的值为 2025

第 II 卷 非选择题 (共 90 分)

三、填空题 (本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.)

13. $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^6$ 展开式中的常数项为 _____ (用数字作答)

14. 曲线 $f(x) = \ln x + 2f'(1)x$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 _____.

15. 已知抛物线 $C: y^2 = 8x$ 与直线 $l: \sqrt{3}x - y - 2\sqrt{3} = 0$ 交于 M, N 两点 (点 M 在第一象限), C 的焦点为 F , 则 $|MF| =$ _____.

16. 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的所有顶点均在一个表面积为 12π 的球面上, 空间内的一点 E 满足 $AE \perp B_1D_1$, $AE \perp A_1D$, 若 $A_1B \subset$ 平面 α , $AE \parallel$ 平面 α , 且 $B_1C_1 \cap$ 平面 $\alpha = F$, 则 CF 的长为 _____.

四、解答题 (本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

17. (本小题满分 10 分)

$\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $2\sin^2 B + 2\sin^2 C + 2\sin B \sin C + \cos[2(B+C)] = 1$, $\angle A$ 的平分线交 BC 边于 D , 过 D 作 $DE \perp AC$, 垂足为点 E .

(1) 求角 A 的大小;

(2) 若 $b = 2, c = 4$, 求 AE 的长.

18. (本小题满分 12 分)

某公司使用甲、乙两台机器生产芯片, 已知每天甲机器生产的芯片占产量的六成, 且合格率为 94%; 乙机器生产的芯片占产量的四成, 且合格率为 95%, 已知两台机器生产芯片的质量互不影响. 现对某天生产的芯片进行抽样.

(1) 从所有芯片中任意抽取一个, 求该芯片是不合格品的概率;

(2) 现采用有放回的方法随机抽取 3 个芯片, 记其中由乙机器生产的芯片的数量为 X , 求 X 的分布列以及数学期望 $E(X)$.

19. (本小题满分12分)

已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_3 = 14, a_9 = 2a_4 + 6$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $b_1 = 1$, 且数列

$\left\{2 - \frac{S_n}{b_n}\right\}$ 是公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的通项公式;

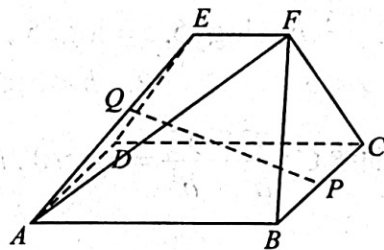
(2) 若 $c_n = a_n \cdot b_n$, 记数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 试比较 T_n 与 $(4n-6) \cdot 2^n + 14$ 的大小.

20. (本小题满分12分)

如图, 在五面体 $ABCDEF$ 中, 底面 $ABCD$ 为正方形, 侧面 $CDEF$ 为等腰梯形, 二面角 $E-CD-A$ 为直二面角, $AB = 2EF = 4$, $AF = 3\sqrt{3}$.

(1) 求点 F 到平面 $ABCD$ 的距离;

(2) 设点 P 为线段 BC 的中点, 点 Q 满足 $\overrightarrow{AQ} = \lambda \overrightarrow{AE}$ ($\lambda > 0$), 若直线 PQ 与平面 ADE 及平面 $ABCD$ 所成的角相等, 求 λ 的值.



21. (本小题满分12分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的上顶点到右顶点的距离为 $\sqrt{7}$, 点 M 在 C 上, 且点 M 到右焦点距离的最大值为 3, 过点 $P(0, 2)$ 且不与 x 轴垂直的直线 l 与 C 交于 A, B 两点.

(1) 求 C 的方程;

(2) 记 O 为坐标原点, 求 $\triangle AOB$ 面积的最大值.

22. (本小题满分12分)

已知函数 $f(x) = e^x - m \sin x$ ($m \in \mathbf{R}$).

(1) 若 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上恰有 2 个零点, 求 m 的取值范围;

(2) 若 $m > 0, n < 0$, $g(x) = f(x) + nx + \sqrt{2}m$, x_0 是 $g'(x)$ 的零点 ($g'(x)$ 是 $g(x)$ 的导数), 求证:
 $g(x_0) + n \ln 2 \geq n \ln(-n)$.

A10联盟2024届高三上学期8月底开学摸底考

数学参考答案

一、选择题（本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	B	D	B	D	C	A	A

1. C 因为 $(1-i)x + (1+i)y = x + y + (y-x)i = 1-3i$ ，所以 $x-y=3$ ，故选 C.

2. B 由题意得， $A = \{-4, -1, 2, 5, \dots\}$ ， $B = \{x | -3 < x < 4\}$ ，故 $A \cap B = \{-1, 2\}$ ，故选 B.

3. D 因为 $\log_3 \frac{1}{2} < 0$ ，所以 $0 < a < 1$ ，又 $b = \log_2 5 > \log_2 4 = 2$ ， $1 = \log_3 3 < c = \log_3 5 < \log_3 9 = 2$ ，所以 $a < c < b$ ，故选 D.

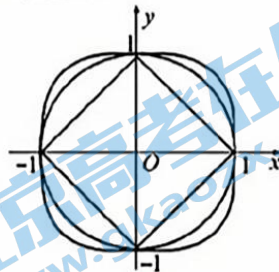
4. B 由题意得， $\frac{b}{a} = 2$ ，则 $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{5}$ ，故选 B.

5. D 由题意得，圆台的高 $h = \sqrt{AC^2 - \left(\frac{AB-CD}{2}\right)^2} = 15$ cm，故该容器的容积

$$V = \pi \times 10^2 \times 3 + \frac{1}{3} \times (\pi \times 10^2 + \pi \times 7^2 + \pi \times 10 \times 7) \times 15 = 1395\pi (\text{cm}^3)$$
，故选 D.

6. C 因为 $P(A) = \frac{A_1}{A_6} = \frac{2}{3}$ ， $P(\bar{A}) = \frac{A_2}{A_6} = \frac{1}{3}$ ，所以 $P(B|\bar{A}) = \frac{P(\bar{A}B)}{P(\bar{A})} = \frac{1}{5}$ ，故选 C.

7. A 分别作出曲线 $|x|+|y|=1$ ， $x^2+y^2=1$ ， $x^4+y^4=1$ 的大致图形如图所示（先作出第一象限的图形，再由对称性作出全部图形），观察可知， $S_3 < S_1 < S_2$ ，故选 A.



8. A 以 C 为坐标原点，CD, CA 所在直线分别为 x, y 轴建立如图所示的坐标系，

$$\text{则 } A(0, \sqrt{2}), B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), C(0,0), \overline{AB} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

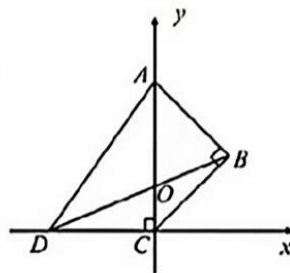
$$\overline{AC} = (0, -\sqrt{2}). \text{ 因为 } CB = CD = 1, \angle DCB = 135^\circ, \text{ 故 } \angle BDC = 22.5^\circ,$$

$$\text{因为 } \tan 45^\circ = \frac{2 \tan 22.5^\circ}{1 - \tan^2 22.5^\circ} = 1, \text{ 所以 } \tan 22.5^\circ = \sqrt{2} - 1 (\text{负值舍去}),$$

$$\text{故 } O(0, \sqrt{2} - 1). \text{ 又 } D(-1, 0), \text{ 则 } \overline{DO} = (1, \sqrt{2} - 1), \text{ 因为}$$

$$\overline{DO} = \lambda \overline{AB} + \mu \overline{AC}, \text{ 所以 } \begin{cases} 1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \lambda \\ \sqrt{2} - 1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \lambda - \sqrt{2} \mu \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} \lambda = \sqrt{2} \\ \mu = -1 \end{cases},$$

所以 $\lambda + \mu = \sqrt{2} - 1$ ，故选 A.



二、选择题（本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分。）

题号	9	10	11	12
答案	AC	ABD	AB	ACD

9. AC 因为 $\frac{160}{400} = \frac{2}{5}$, 故 A 正确; 因为 $\frac{60}{200} > \frac{40}{200}$, 故 B 错误;

$$\chi^2 = \frac{400 \times (160 \times 60 - 140 \times 40)^2}{300 \times 100 \times 200 \times 200} = \frac{16}{3} \approx 5.333, \text{ 因为 } 5.333 > 3.841, 5.333 < 6.635, \text{ 故 C 正}$$

确, D 错误. 故选 AC.

10. ABD 由 $l: mx - y - m + 3 = 0 \Rightarrow m(x-1) + (3-y) = 0$, 得 $\begin{cases} x-1=0 \\ 3-y=0 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$, 所以直线 l 过

定点为 $(1, 3)$, 故 A 正确; 由圆的标准方程可得圆心为 $C(2, 4)$, 半径 $r = \sqrt{3}$, 直线 l 过的定点

为 $M(1, 3)$, 当 $l \perp CM$ 时, 直线 l 截圆 C 所得弦长最短, 因为 $CM = \sqrt{2}$, 则最短弦长为 $2\sqrt{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2} = 2$, 故 B 正确; 因为点 $M(1, 3)$ 在圆 C 内, 所以直线 l 与圆 C 一定相交, 故 C 错误; 当直线 l 过圆心 C 时, 满足题意, 此时 $2m - 4 - m + 3 = 0$, 解得 $m = 1$, 故 D 正确. 故选 ABD.

11. AB 由 $f(x) = |\sin(\pi x - \pi)| + \sin\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{3\pi}{2}\right) = |\sin \pi x| - \cos \frac{\pi x}{2}$, 知 $f(-x) = |\sin \pi x| - \cos \frac{\pi x}{2}$, 所以 $f(x)$ 是偶函数, 故 A 正确; 因为

$$f(4-x) = |\sin(4\pi - \pi x)| - \cos\left(2\pi - \frac{\pi x}{2}\right) = |\sin \pi x| - \cos \frac{\pi x}{2} = f(x), \text{ 所以 } f(x) \text{ 的图象关于}$$

直线 $x = 2$ 对称, 故 B 正确; 因为 $f(0) = -1, f(2) = 1$, 则 $f(0) \neq f(2)$, 所以 2 不是 $f(x)$ 的周期, 故 C 错误; 因为 $f(1) = 0, f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$, 则 $f(1) < f\left(\frac{1}{2}\right)$. 故 D 错误. 故选 AB.

12. ACD 由题意得, $a_{n+1} - a_n = \frac{a_n^2}{2023}$, 故 $a_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2023 \times 4} < \frac{2}{3}$, 故 A 正确; $a_{n+1} - a_n = \frac{a_n^2}{2023} > 0$,

故数列 $\{a_n\}$ 单调递增, 故 B 错误; $T_n = (1-a_1) \cdot (1-a_2) \cdots (1-a_n)$,

$$a_{n+1} = \frac{2023a_n + a_n^2}{2023} = \frac{(2023+a_n)a_n}{2023}, \text{ 故 } \frac{1}{a_n + 2023} = \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}, \text{ 累加可得}$$

$$\sum_{i=1}^{2023} \frac{1}{a_i + 2023} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{2024}}, \text{ 即 } \frac{1}{a_{2024}} = 2 - \sum_{i=1}^{2023} \frac{1}{a_i + 2023} > 2 - 2023 \times \frac{1}{\frac{1}{2} + 2023} > 1. \text{ 则}$$

$a_{2024} < 1$, 由数列 $\{a_n\}$ 单调递增, 得 $\frac{1}{2} = a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_{2024} < 1$, 所以 $T_{2024} > 0$, 故 C

正确; 因为 $\frac{1}{a_{2025}} = 2 - \sum_{i=1}^{2024} \frac{1}{a_i + 2023} < 2 - 2024 \times \frac{1}{1 + 2023} = 1$, 所以 $a_{2025} > 1$, 所以

$T_{2025} = T_{2024} \cdot (1 - a_{2025}) < 0$, 所以使得 $T_k < 0$ 成立的最小正整数 k 的值为 2025, 故 D 正确. 故选 ACD.

三、填空题 (本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.)

13. 15

$$\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^6 \text{ 的展开式的逆项为 } T_{r+1} = C_6^r (x^2)^{6-r} \left(-\frac{1}{x}\right)^r = C_6^r (-1)^r x^{12-3r}, \text{ 令 } 12-3r=0, \text{ 解得 } r=4,$$

故常数项为 $C_6^4 = 15$.

14. $x + y + 1 = 0$ (其他形式的答案只要正确也可)

由题意得, $f'(x) = \frac{1}{x} + 2f'(1)$, 所以 $f'(1) = 1 + 2f'(1)$, 解得 $f'(1) = -1$, 故 $f(x) = \ln x - 2x$, 则

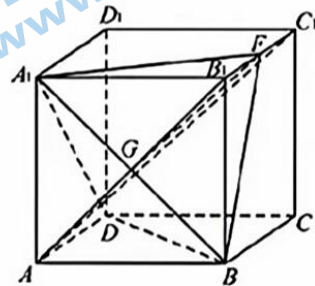
$f(1) = -2$ ，所以曲线在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y + 2 = -(x - 1)$ ，即 $x + y + 1 = 0$ 。

15. 8

由题意得，直线 l 过 C 的焦点 F 且倾斜角 $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ，故 $|MF| = \frac{p}{1 - \cos \alpha} = \frac{4}{1 - \cos \frac{\pi}{3}} = 8$ 。

16. $\sqrt{5}$

由题意得， $\pi \times (\sqrt{3}AB)^2 = 12\pi$ ，故 $AB = 2$ 。因为 $AE \perp B_1D_1$ ，所以 $AE \perp BD$ ，又 $AE \perp A_1D$ ， $BD \cap A_1D = D$ ，所以 $AE \perp$ 平面 A_1BD ，则直线 AE 即为直线 AC_1 。取线段 B_1C_1 的中点 F ，连接 A_1F, BF ，连接 AB_1 交 A_1B 于 G ，连接 FG ，易证 $FG \parallel AC_1$ ，故 $AC_1 \parallel$ 平面 A_1FB ，故平面 α 即为平面 A_1FB ，则 $CF = \sqrt{5}$ 。



四、解答题（本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。）

17. （本小题满分 10 分）

$$(1) \because 2\sin^2 B + 2\sin^2 C + 2\sin B \sin C + \cos[2(B+C)] = 1,$$

$$\therefore \sin^2 B + \sin^2 C + \sin B \sin C = \frac{1 - \cos[2(B+C)]}{2} = \sin^2(B+C) = \sin^2 A, \dots\dots\dots 2 \text{分}$$

由正弦定理可得： $b^2 + c^2 + bc = a^2$ ，即 $b^2 + c^2 - a^2 = -bc$ ， $\dots\dots\dots 3 \text{分}$

$$\text{由余弦定理可得：} \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = -\frac{1}{2}, \dots\dots\dots 4 \text{分}$$

$$\because A \in (0, \pi), \therefore A = \frac{2\pi}{3}. \dots\dots\dots 5 \text{分}$$

$$(2) \because S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ACD}, AD \text{ 是 } \triangle ABC \text{ 的角平分线,}$$

$$\therefore \frac{1}{2}bc \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2}c \cdot AD \sin \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}b \cdot AD \sin \frac{\pi}{3}, \dots\dots\dots 7 \text{分}$$

$$\because b = 2, c = 4, \therefore AD = \frac{4}{3}. \dots\dots\dots 8 \text{分}$$

$$\text{在 Rt}\triangle ADE \text{ 中, } AD = \frac{4}{3}, \angle DAE = \frac{\pi}{3}, \therefore AE = AD \cos \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}. \dots\dots\dots 10 \text{分}$$

18. （本小题满分 12 分）

(1) 记事件 A_1 表示芯片来自甲机器生产，事件 A_2 表示芯片来自乙机器生产，事件 B 表示取到的是合格品。

$$\begin{aligned} P(\bar{B}) &= P(A_1 \bar{B} \cup A_2 \bar{B}) = P(A_1)P(\bar{B}|A_1) + P(A_2)P(\bar{B}|A_2) \\ &= 0.6 \times (1 - 0.94) + 0.4 \times (1 - 0.95) = 0.056. \dots\dots\dots 4 \text{分} \end{aligned}$$

(2) 由题意得， $X \sim B\left(3, \frac{2}{5}\right)$ ， $\dots\dots\dots 5 \text{分}$

$$\text{故 } P(X=0) = \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{27}{125}, P(X=1) = C_3^1 \left(\frac{3}{5}\right)^2 \left(\frac{2}{5}\right) = \frac{54}{125},$$

$$P(X=2) = C_3^2 \left(\frac{3}{5}\right) \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{36}{125}, P(X=3) = \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{8}{125}. \dots\dots\dots 9 \text{分}$$

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{27}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{8}{125}$

.....10分

故 $E(X) = 3 \times \frac{2}{5} = \frac{6}{5}$12分

19. (本小题满分12分)

(1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,

由 $\begin{cases} a_3 = 14 \\ a_9 = 2a_4 + 6 \end{cases}$, 得 $\begin{cases} a_1 + 2d = 14 \\ a_1 + 8d = 2(a_1 + 3d) + 6 \end{cases}$,

解得 $\begin{cases} a_1 = 4 \\ d = 5 \end{cases}$. $\therefore a_n = 5n - 1$3分

由题意得, $2 - \frac{S_n}{b_n} = \left(2 - \frac{b_1}{b_1}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, 即 $S_n = \left[2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right] b_n$,

$\therefore S_{n+1} = \left[2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] b_{n+1}$,4分

两式作差得: $S_{n+1} - S_n = b_{n+1} = \left[2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] b_{n+1} - \left[2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right] b_n$,

化简得: $\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] (b_{n+1} - 2b_n) = 0$, $\therefore b_{n+1} = 2b_n$,5分

\therefore 数列 $\{b_n\}$ 是以 $b_1 = 1$ 为首项、2 为公比的等比数列, $\therefore b_n = 2^{n-1}$ 6分

(2) 由 (1) 得, $c_n = (5n - 1) \cdot 2^{n-1}$.

$\therefore T_n = 4 \times 2^0 + 9 \times 2 + 14 \times 2^2 + \dots + (5n - 6) \times 2^{n-2} + (5n - 1) \times 2^{n-1}$,

$2T_n = 4 \times 2^1 + 9 \times 2^2 + 14 \times 2^3 + \dots + (5n - 6) \times 2^{n-1} + (5n - 1) \times 2^n$,8分

$\therefore -T_n = -(5n - 1) \times 2^n + 5 \times (2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{n-1}) - 1$,9分

$\therefore T_n = (5n - 1) \cdot 2^n + 1 - 5(2^n - 1) = (5n - 6) \cdot 2^n + 6$,10分

$\therefore T_n - [(4n - 6) \cdot 2^n + 14] = n \cdot 2^n - 8$,11分

\therefore 当 $n = 1$ 时, $T_n < (4n - 6) \cdot 2^n + 14$; 当 $n = 2$ 时, $T_n = (4n - 6) \cdot 2^n + 14$; 当 $n > 2, n \in \mathbf{N}^*$ 时, $T_n > (4n - 6) \cdot 2^n + 14$12分

20. (本小题满分12分)

(1) 如图, 过点 F 作 $FO \perp DC$ 于点 O , 连接 OA .

因为二面角 $E - CD - A$ 为直二面角, 所以平面 $CDEF \perp$ 平面 $ABCD$,

又平面 $CDEF \cap$ 平面 $ABCD = CD$, $FO \subset$ 平面 CDE , 所以 $FO \perp$ 平面 $ABCD$,

因为 $OA \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $FO \perp OA$ 2分

因为四边形 $CDEF$ 为等腰梯形, $AB = CD = 2EF = 4$,

所以 $OD = 3$, 所以 $AO = 5$4分

又 $AF = 3\sqrt{3}$, 所以 $FO = \sqrt{2}$, 即点 F 到平面 $ABCD$ 的距离为 $\sqrt{2}$5分

(2) 以 O 为坐标原点, 分别以 OD, OF 所在直线分别为 x, z 轴, 过点 O 作平面 $CDEF$ 的垂线为 y 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系 $Oxyz$.

则 $A(3,4,0), D(3,0,0), E(2,0,\sqrt{2}), F(0,0,\sqrt{2}), P(-1,2,0)$,6分

由 $\overrightarrow{AQ} = \lambda \overrightarrow{AE} = (-\lambda, -4\lambda, \sqrt{2}\lambda)$, 得 $Q(3-\lambda, 4-4\lambda, \sqrt{2}\lambda)$,

$\therefore \overrightarrow{PQ} = (4-\lambda, 2-4\lambda, \sqrt{2}\lambda)$,7分

设平面 ADE 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 由 $\overrightarrow{DA} = (0, 4, 0)$, $\overrightarrow{DE} = (-1, 0, \sqrt{2})$, $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{DA} = 0 \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{DE} = 0 \end{cases}$,

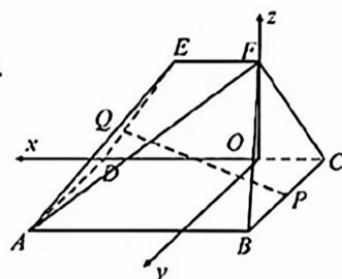
得 $\begin{cases} 4y = 0 \\ -x + \sqrt{2}z = 0 \end{cases}$, 令 $z = 1$, 则 $\mathbf{n} = (\sqrt{2}, 0, 1)$9分

又易知平面 $ABCD$ 的一个法向量为 $\mathbf{m} = (0, 0, 1)$10分

设直线 PQ 与平面 ADE 所成角为 θ , 与平面 $ABCD$ 所成角为 α ,

则 $\sin \theta = \sin \alpha$, $\therefore \frac{|\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{PQ}|}{\|\mathbf{n}\| \|\overrightarrow{PQ}\|} = \frac{|\mathbf{m} \cdot \overrightarrow{PQ}|}{\|\mathbf{m}\| \|\overrightarrow{PQ}\|}$,11分

整理得 $\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = |\sqrt{2}\lambda|$, 由 $\lambda > 0$, 得 $\lambda = \frac{4\sqrt{3}}{3}$12分



21. (本小题满分 12 分)

(1) 由题意得, $\begin{cases} \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{7} \\ a^2 = b^2 + c^2 \\ a + c = 3 \end{cases}$,2分

解得 $a^2 = 4, b^2 = 3$, 故 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$4分

(2) 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 直线 $l: y = kx + 2$,

联立 $\begin{cases} y = kx + 2 \\ 3x^2 + 4y^2 = 12 \end{cases}$, 整理得: $(3 + 4k^2)x^2 + 16kx + 4 = 0$,

由 $\Delta > 0$ 得 $k^2 > \frac{1}{4}$, 且 $x_1 + x_2 = -\frac{16k}{3 + 4k^2}$, $x_1 x_2 = \frac{4}{3 + 4k^2}$,6分

$\therefore |AB| = \sqrt{1 + k^2} |x_1 - x_2| = \frac{4\sqrt{(1 + k^2)(12k^2 - 3)}}{3 + 4k^2}$ 8分

\therefore 点 O 到直线 l 的距离 $d = \frac{2}{\sqrt{1 + k^2}}$,9分

$\therefore S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot d = \frac{4\sqrt{12k^2 - 3}}{3 + 4k^2}$ 10分

令 $t = \sqrt{12k^2 - 3} > 0$, 故 $4k^2 = \frac{t^2}{3} + 1$, 故 $S_{\triangle AOB} = \frac{12t}{t^2 + 12} = \frac{12}{t + \frac{12}{t}} \leq \sqrt{3}$,

当且仅当 $t = \frac{12}{t}$, 即 $t = 2\sqrt{3}$, $k = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$ 时等号成立,

故 $\triangle AOB$ 面积的最大值为 $\sqrt{3}$12分

22. (本小题满分12分)

(1) 令 $f(x)=0$, 显然 $m \neq 0$, $\therefore \frac{1}{m} = \frac{\sin x}{e^x}$1分

令 $p(x) = \frac{\sin x}{e^x}$, $x \in \left[-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, 则 $p'(x) = \frac{\cos x - \sin x}{e^x} = \frac{\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{e^x}$,2分

故当 $x \in \left(-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ 时, $p'(x) > 0$, 当 $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $p'(x) < 0$,

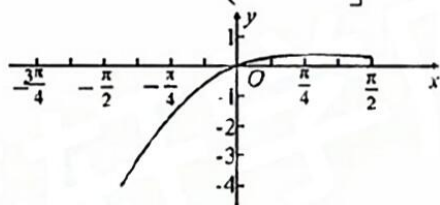
故函数 $p(x)$ 在 $\left[-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递增, 在 $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减,3分

作出 $p(x)$ 的大致图象如图所示, 因为 $p(0) = 0$, $p\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}}$, $p\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2e^{\frac{\pi}{4}}}$,

所以要使函数的图象 $p(x) = \frac{\sin x}{e^x}$ 与直线 $y = \frac{1}{m}$ 在 $\left[-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上恰有2个不同的交点,

则 $\frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}} \leq \frac{1}{m} < \frac{\sqrt{2}}{2e^{\frac{\pi}{4}}}$,5分

解得 $\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}} < m \leq e^{\frac{\pi}{2}}$, 即实数 m 的取值范围为 $\left(\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}, e^{\frac{\pi}{2}}\right]$6分



(2) 要证: $g(x_0) + n \ln 2 \geq n \ln(-n)$, 即证: $g(x_0) \geq n \ln\left(-\frac{n}{2}\right)$.

因为 $g(x) = f(x) + nx + \sqrt{2}m = e^x - m \sin x + nx + \sqrt{2}m$,

所以 $g'(x) = e^x - m \cos x + n$, 则 $g'(x_0) = e^{x_0} - m \cos x_0 + n = 0$,7分

故 $g(x_0) = g(x_0) + g'(x_0) = 2e^{x_0} - m(\sin x_0 + \cos x_0) + nx_0 + n + \sqrt{2}m$

$$= 2e^{x_0} - \sqrt{2}m \sin\left(x_0 + \frac{\pi}{4}\right) + nx_0 + n + \sqrt{2}m$$

$$= 2e^{x_0} + \sqrt{2}m \left[1 - \sin\left(x_0 + \frac{\pi}{4}\right)\right] + nx_0 + n \geq 2e^{x_0} + nx_0 + n. \text{9分}$$

令 $h(x) = 2e^x + nx + n$, 则 $h'(x) = 2e^x + n$,10分

故当 $x \in \left(-\infty, \ln\left(-\frac{n}{2}\right)\right)$ 时, $h'(x) < 0$, 当 $x \in \left(\ln\left(-\frac{n}{2}\right), +\infty\right)$ 时, $h'(x) > 0$,

故函数 $h(x)$ 在 $\left(-\infty, \ln\left(-\frac{n}{2}\right)\right)$ 上单调递减, 在 $\left(\ln\left(-\frac{n}{2}\right), +\infty\right)$ 上单调递增,

则 $h(x) \geq h\left(\ln\left(-\frac{n}{2}\right)\right) = n \ln\left(-\frac{n}{2}\right)$, 即 $g(x_0) + n \ln 2 \geq n \ln(-n)$12分

以上各解答题如有不同解法并且正确, 请按相应步骤给分.