2022北京市海淀区高考查缺补漏习

——解析几何和其他部分

一、【解析几何】

1-1. 已知直线 $l: ax+by=1$．若 l 上有且仅有一点 P，使得以点 P 为圆心，1为半径的圆过原点 O，则 $a-b$ 的最大值为（　　）

（A）1　　（B）$\sqrt{2}$　　（C）2　　（D）$2\sqrt{2}$

答案：B

分析：使得以点 P 为圆心且 1 为半径的圆过原点 O，说明 $|OP|=1$，由 l 上有且仅有一点 P 满足，可知满足 $|OP|=1$ 的点唯一，所以原点 O 到直线的距离为1，所以 $a^2+b^2=1$，若使得 $a-b$ 取得最大值，$a,-b$ 应该均为正实数，由均值不等式的推出式 $\frac{a^2+(-b)^2}{2}\ge[\frac{a+(-b)}{2}]^2$ 可得 $a-b$ 的最大值为 $\sqrt{2}$．也可以把 $a^2+b^2=1$ 看成单位圆，令 $a-b=t$，可以视为直线，显然在直线与圆相切时，分别取得最大值和最小值.

1-2. 已知点 $A(1,-1)$，点 P 在圆 $C: x^2+y^2+2x=0$ 上，则 $|AP|$ 得取值范围是_______；若 AP 是圆 C 的切线，则 $|AP|=$________.

答案：$[\sqrt{5}-1,\sqrt{5}+1]$，2

2. 圆锥曲线 $\frac{x^2}{t+5}+\frac{y^2}{4}=1$ 的离心率为 $\sqrt{2}$，则实数 $t=$_________

答案：-9

分析：由离心率可知，曲线为双曲线，所以标准方程为 $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{-t-5}=1$，可知

$a^2=4,b^2=-t-5$

所以 $c^2=-t-1$，所以 $\frac{-t-1}{4}=2$，可得 $t=-9$

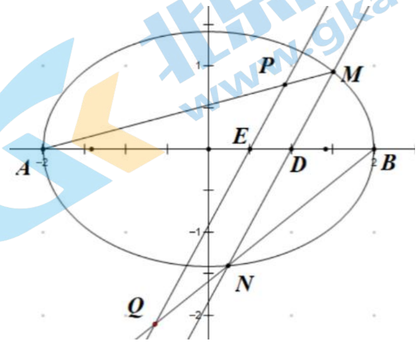
3. 已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右顶点为 A,B，$|AB|=4$，离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(1) 求椭圆 E 的标准方程；

(2) 已知过点 $D(1,0)$ 的直线 l_1 与椭圆 E 交于两点 M,N，过点 $E(\frac{1}{2},0)$ 的直线 l_2 与 l_1

平行，直线 AM、BN 分别交 l_2 于点 P、Q．当 $|EP|\cdot|EQ|\geq\frac{5}{2}$ 时，求直线 l_1 斜率的取值范围.

解：（1）$E:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$；



（2）显然当 l_1 与 x 轴重合时，不存在直线 l_2 与 l_1 平行，

设 l_1：$x=my+1$，$M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，

代入 $x^2+2y^2=4$ 得 $(m^2+2)y^2+2my-3=0$，

$\Delta=4m^2+12(m^2+2)>0$，$y_1y_2=\frac{-3}{m^2+2}$，

因为 $l_1//l_2$，所以在 ΔADM 中，$\frac{|EP|}{|DM|}=\frac{|AE|}{|AD|}=\frac{5}{6}$，在 ΔBEQ 中，$\frac{|DN|}{|EQ|}=\frac{|BD|}{|BE|}=\frac{2}{3}$，

所以，由已知可得 $|EP|\cdot|EQ|=\frac{5}{6}|DM|\times\frac{3}{2}|DN|\geq\frac{5}{2}$，

又 $|DM|=\sqrt{1+m^2}\,|y_1|$，$|DN|=\sqrt{1+m^2}\,|y_2|$

$(1+m^2)|y_1y_2|\geq 2$，即 $(1+m^2)\frac{3}{m^2+2}\geq 2$，

解得 $m^2\geq 1$，所以 l_1 斜率得取值范围为 $[-1,0)\cup(0,1]$.

4. 已知椭圆 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$，点 $D(1,0)$，直线 $l:x=3$，过 D 做直线 AB 与椭圆交于 A,B，过 B 作直线交 $x=3$ 于 T，过 D 作 DM // BT 交 AT 于一点 M，求证：M 在一条定直线上（M 的横坐标为定值）

证明：若直线 AB 斜率不存在，则不妨设 $A(1,\frac{\sqrt{6}}{3}),B(1,-\frac{\sqrt{6}}{3})$，此时 $\frac{AM}{MT}=\frac{AD}{DB}=1$，

M 为 AT 中点，此时 M 的横坐标为 2；

若直线斜率存在，则设直线 AB 为 $y=k(x-1)$，$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，由 $\begin{cases}x^2+3y^2=3\\ y=k(x-1)\end{cases}$

消元，得 $(3k^2+1)x^2-6k^2x+3k^2-3=0$，因为 $\Delta>0$，于是 $x_1+x_2=\frac{6k^2}{3k^2+1}$，

$x_1x_2=\frac{3k^2-3}{3k^2+1}$

又 $BT \parallel DM$，所以 $\frac{|AD|}{|BD|}=\frac{|AM|}{|MT|}$，设 $M(m,n)$，$T(3,t)$，则 $\frac{m-x_1}{3-m}=\frac{1-x_1}{x_2-1}$

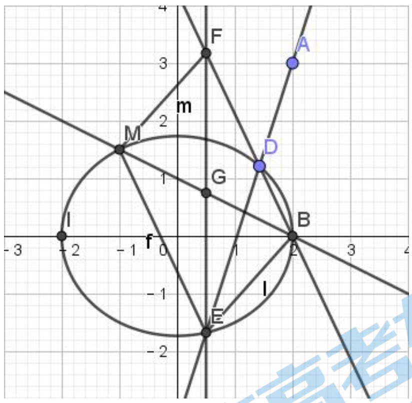
$$m=\frac{x_1x_2-4x_1+3}{x_2-x_1}=\frac{\frac{3k^2-3}{3k^2+1}+3-4x_1}{\frac{6k^2}{3k^2+1}-2x_1}=2$$

所以 M 在一条定直线 $x=2$ 上.

5. 椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右顶点为 $B(2,0)$，离心率为 $\frac{1}{2}$。

（1）求椭圆 C 的方程及短轴长;

（2）已知：过定点 $A(2,3)$ 作直线 l 交椭圆 C 于 D,E 两点，过 E 作 AB 的平行线交直线 DB 于点 F，设 EF 中点为 G，直线 BG 与椭圆的另一点交点为 M，若四边形 $BEMF$ 为平行四边形，求 G 点坐标.



解：（1）易得椭圆方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，短轴长 $2\sqrt{3}$

（2）由已知，直线 DE 的斜率存在，设直线 DE 为 $y=k(x-2)+3$，$E(x_1,y_1),D(x_2,y_2)$

由 $\begin{cases} y=k(x-2)+3 \\ 3x^2+4y^2=12 \end{cases}$

得 $(3+4k^2)x^2+8k(3-2k)x+4(3-2k)^2-12=0$

令 $\Delta=64k^2(3-2k)^2-4(3+4k^2)(4(3-2k)^2-12)>0$ 　　可得 $k>\frac{1}{2}$

于是 $x_1+x_2=-\frac{8k(3-2k)}{3+4k^2},x_1x_2=\frac{4(3-2k)^2-12}{3+4k^2}$

DB 直线方程为 $y=\frac{y_2}{x_2-2}(x-2)$，令 $x=x_1$，得 $y=\frac{y_2(x_1-2)}{x_2-2}$

于是 $F(x_1,\frac{y_2(x_1-2)}{x_2-2})$，所以 EF 中点 $G(x_1,\frac{y_1(x_2-2)+y_2(x_1-2)}{2(x_2-2)})$

$$k_{BG}=\frac{y_1(x_2-2)+y_2(x_1-2)}{2(x_2-2)(x_1-2)}=k+\frac{3(x_1+x_2-4)}{2(x_1x_2-2(x_1+x_2)+4)}=-\frac{1}{2}$$

于是 GB 直线方程为 $y=-\frac{1}{2}(x-2)$

由$\begin{cases} y=-\frac{1}{2}(x-2) \\ 3x^2+4y^2=12 \end{cases}$可解得$M(-1,\frac{3}{2})$，于是$G(\frac{1}{2},\frac{3}{4})$

此时可得$E(\frac{1}{2},\pm\frac{3\sqrt{5}}{4})$，$k=2\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$满足$k>\frac{1}{2}$即这样的平行四边形有两个.

6. 椭圆 C：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$的左、右焦点分别为$F_1,F_2$，点$D(-4,0)$，

（1）过点D与椭圆相切的直线为l，求l的方程；

（2）过F_1且与不垂直坐标轴的直线交椭圆于A,B，设直线AD与椭圆 C 的另一个交点为E，连接EF，求证：F_1D平分$\angle BF_1E$

解答：（1）由已知，直线l斜率存在，设$l:y=k(x+4)$，

联立$\begin{cases} y=k(x+4) \\ 3x^2+4y^2=12 \end{cases}$，消 y 得：$3x^2+4k^2(x+4)^2=12$

即：$(4k^2+3)x^2+32k^2x+64k^2-12=0$

$\Delta=32k^2\cdot32k^2-4(4k^2+3)(64k^2-12)=-144(4k^2-1)$

令$\Delta=0$，得$k=\pm\frac{1}{2}$

所以l的方程为：$x+2y+4=0$或者$x-2y+4=0$.

（2）设$DA:y=k(x+4)$，$E(x_1,y_1),A(x_2,y_2)$，则当$\Delta>0$时，$\begin{cases} x_1+x_2=-\frac{32k^2}{4k^2+3} \\ x_1\cdot x_2=\frac{64k^2-12}{4k^2+3} \end{cases}$，

此时：

$$k_{F_1A}+k_{F_1E}=\frac{y_1}{x_1+1}+\frac{y_2}{x_2+1}=\frac{k(x_1+4)}{x_1+1}+\frac{k(x_2+4)}{x_2+1}=\frac{k(x_1+4)(x_2+1)+k(x_2+4)(x_1+1)}{(x_1+1)(x_2+1)}$$

$$=\frac{k[2x_1x_2+5(x_1+x_2)+8]}{(x_1+1)(x_2+1)}=\frac{k[2\cdot\frac{64k^2-12}{4k^2+3}-5\cdot\frac{32k^2}{4k^2+3}+8]}{(x_1+1)(x_2+1)}=0$$

所以：$\angle DF_1E=\angle AF_1F_2$，$F_1D$平分$\angle BF_1E$

7. 椭圆 C：$3x^2+4y^2=12$的左、右焦点分别为F_1,F_2，过F_1且与不垂直坐标轴的直

线交椭圆 C 于 A,B，设 B 关于 x 轴的对称点为 E，

（1）求椭圆的离心率；

（2）求证：直线 AE 过 x 轴上定点.

解答：

（1）椭圆 C：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，$a^2=4,b^2=3,c^2=a^2-b^2=1$，所以离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$

（2）$F_1(-1,0)$，由已知，设 $AB:x=my-1,A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),m\neq 0$

$$联立\begin{cases}x=my-1\\3x^2+4y^2=12\end{cases}，消 x 得：3(my-1)^2+4y^2=12$$

所以：$(3m^2+4)y^2-6my-9=0$

$$\Delta>0且\begin{cases}y_1+y_2=\frac{6m}{3m^2+4}\neq 0\\y_1\cdot y_2=\frac{-9}{3m^2+4}\end{cases}$$

所以：直线 AE 方程为：$y+y_2=\frac{y_1+y_2}{x_1-x_2}(x-x_2)$

即：$y=\frac{y_1+y_2}{x_1-x_2}(x-x_2-\frac{x_1-x_2}{y_1+y_2}y_2)$

其中：$x_2+\frac{x_1-x_2}{y_1+y_2}y_2=\frac{x_2(y_1+y_2)+(x_1-x_2)y_2}{y_1+y_2}=\frac{x_2y_1+x_1y_2}{y_1+y_2}=\frac{(my_2-1)y_1+(my_1-1)y_2}{y_1+y_2}$

$$=\frac{2my_1y_2-(y_1+y_2)}{y_1+y_2}=\frac{2m\cdot\frac{-9}{3m^2+4}-\frac{6m}{3m^2+4}}{\frac{6m}{3m^2+4}}=\frac{-24m}{6m}=-4$$

直线 AE 过 x 轴上定点 $(-4,0)$

8. 椭圆 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$，点 $D(1,0)$，直线 $l:x=3$，点 $M(2,1)$

过 D 做直线 AB 与椭圆交于 A,B，过 B 作 BT // DM，交直线 $x=3$ 于 T

求证：A,M,T 三点共线.

证明：若直线 AB 斜率为 0，则设 $A(-\sqrt{3},0),B(\sqrt{3},0)$，设 $T(3,t)$，则

$k_{BT}=\frac{t}{3-\sqrt{3}}=1,t=3-\sqrt{3}$，；$\therefore k_{MT}=\frac{t-1}{1}=2-\sqrt{3},k_{AM}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$，从而

$\therefore k_{MT}=k_{AM}$，此时 A,M,T 三点共线；

若直线 AB 斜率不为 0，设直线 AB 为 $x=my+1$，$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，由

$\begin{cases}x^2+3y^2=3\\x=my+1\end{cases}$ 消元，得 $(m^2+3)y^2+2my-2=0$，于是 $y_1+y_2=-\dfrac{2m}{m^2+3}$，

$y_1y_2=-\dfrac{2}{m^2+3}$

因为点 $D(1,0)$，点 $M(2,1)$，所以 $k_{DM}=1$，又 $BT \parallel DM$，

所以 BT 的方程为 $y-y_2=(x-x_2)$，令 $x=3$，得 $y=3-x_2+y_2$，于是 $T(3,3-x_2+y_2)$

$k_{AM}=\dfrac{1-y_1}{2-x_1}=\dfrac{1-y_1}{1-my_1}$，$k_{MT}=\dfrac{1-3+x_2-y_2}{2-3}=2-x_2+y_2=1-(m-1)y_2$

$k_{AM}-k_{MT}=\dfrac{1-y_1}{1-my_1}-1+(m-1)y_2$

$=\dfrac{1-y_1-1+my_1+(m-1)y_2-m(m-1)y_1y_2}{1-my_1}$

$=\dfrac{(m-1)(y_1+y_2)-m(m-1)y_1y_2}{1-my_1}=0$

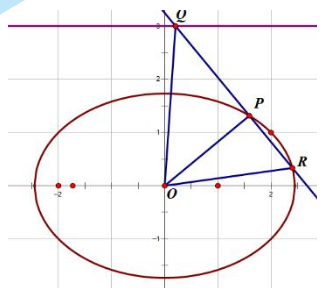
所以 A,M,T 三点共线.

9. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 经过点 A（2，1），左焦点 $F\left(-\sqrt{3},0\right)$。

（Ⅰ）求椭圆方程及离心率；

（Ⅱ）O 为坐标原点，等腰直角△OPQ 的顶点 P 在椭圆 C 上，Q 在直线 y=3 上，直线 PQ 与椭圆的另一个交点为 R，求△OQR 的面积。

解：（Ⅰ）$C:\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}=1$，离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$



（Ⅱ）由已知，可设 $P(x_0,y_0)$，$OP:y=kx$（$k\neq 0$）

则 $PQ:y=-\dfrac{1}{k}(x-x_0)+y_0$，令 $y=3$ 得 $x_Q=x_0+k(y_0-3)$

因为 $|OP|=|PQ|$，

$\sqrt{1+k^2}\,|x_0|=\sqrt{1+k^2}\,|y_0-3|$

所以 $x_0^2=(y_0-3)^2$，

又 $P(x_0,y_0)$ 在椭圆上，所以 $x_0^2+2y_0^2=6$

消 x_0 得 $y_0^2-2y_0+1=0$，

解得 $y_0=1$，所以 $x_0=\pm 2$

所以 $P(-2,1)$ 或 $P(2,1)$

所以对应的 $k=-\dfrac{1}{2}$，或者 $k=\dfrac{1}{2}$，

$PQ: y=2(x+2)+1$ 或 $y=-2(x-2)+1$

由 $\begin{cases} y=2x+5, \\ x^2+2y^2=6, \end{cases}$ 消 y 得 $9x^2+40x+44=0$，

由 $x_1=-2$ 已经是它得一个根，所以 $x_2=-\dfrac{22}{9}$，

所以 $R(-\dfrac{22}{9},\dfrac{1}{9})$，此时 $Q(-1,3)$

所以 $|QR|=\sqrt{1+2^2}\times\dfrac{13}{9}=\dfrac{13\sqrt{5}}{9}$，

$S_{\Delta OQR}=\dfrac{1}{2}|QR|\times d=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{13\sqrt{5}}{9}\times\dfrac{5}{\sqrt{1+2^2}}=\dfrac{65}{18}$，

由对称性可知另一种情况，结果相同.

【其它】

1. 已知 $(2x+1)^4 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$，则 $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 =$

（A）-1　　（B）1　　（C）2^4　　（D）3^4

答案：B

2. 目前玩具市场流行一种新的玩具形式——盲盒。顾名思义，打开包装盒之前不知道玩具的款式，运气好可以抽到喜欢的款式，甚至是隐藏款，运气不好就可能抽到不喜欢的或者重复的。根据盲盒款式在市场上出现的频率，在二手市场会有人售卖自己不需要的盲盒。某款盲盒的售价为 59 元，含有 3 个正常款和 1 个隐藏款。已知该种盲盒的不同款式在二手市场的平均售价如下：

款式	款式 1	款式 2	款式 3	隐藏款
款式名称	人类之子	梵高	掷铁饼者	维纳斯的诞生
平均定价	80 元	150 元	30 元	1200 元

为了帮助同学们理性消费，你开始利用所学的概率知识研究这个问题. 试估计购买一个该种盲盒，隐藏款出现的概率是__________.

答案：$\dfrac{1}{64}$

3. 端午节是我国重要的传统节日之一，其最早源于古代百越地区对龙图腾的崇拜与信仰，后来又有纪念诗人屈原的意义. 全国各地有很多端午节的习俗，制作香囊是其中之一. 某校为了弘扬传统文化，在劳技课上请同学们自制香囊赠送亲朋好友. 小明制作了一个四面体形状的香囊，他测量发现该四面体的每条棱长都是 6cm，如果他想做一个正方体包装盒将香囊放入（不能改变香囊形状），请问该正方体的棱长最小为（　　）

A. 6cm　　B. $3\sqrt{2}$ cm　　C. $3\sqrt{3}$ cm　　D. 5cm

答案：B

2022 北京市海淀区高考查缺补漏习

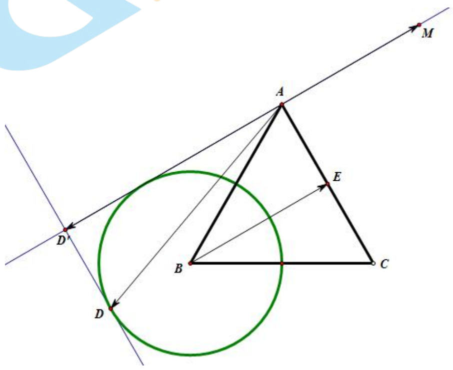
——平面向量、数列和立体几何部分

一、【平面向量】

1. ΔABC 为等边三角形，且边长为 2，则 $<\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}>=$ ______,若 $|\overrightarrow{BD}|=1,\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{EA}$，则 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BE}$ 的最小值为________.

答案：120°，$-\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)$

解析：借助数量积的几何意义，根据已知条件可判断点 D 的运动轨迹为以 B 为圆心，半径为 1 的圆，点 E 为 AC 的中点。把向量 $\overrightarrow{BE}$ 平移到与向量 $\overrightarrow{AD}$ 共起点的 $\overrightarrow{AM}$，则向量 $\overrightarrow{AD}$ 在直线 AM 投影向量的数量最小时， 所求的数量积达到最小值



2. 已知 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 为非零向量，则"存在两组不同实数对 (λ_1,μ_1)，(λ_2,μ_2)，使得 $\vec{c}=\lambda_1\vec{a}+\mu_1\vec{b}=\lambda_2\vec{a}+\mu_2\vec{b}$"是"$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线"的（　　）

A.充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

答案：A

3. 已知 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=2$，$|\boldsymbol{c}|=1$，则 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ 的最小值为________.

答案：　$6-2\sqrt{3}$

4.已知 $\boldsymbol{a}=(1,-\sqrt{3}),\boldsymbol{b}=(-1,0)$，则 $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=$ _____，若 $<\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}>=60^\circ$，则 $\lambda=$ _____.

答案：1，2

5.已知 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=0$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$，则 $(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=$ ______.

答案：0

二、【数列】

1.数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和记为 S_n，则"数列 $\{a_n\}$ 是递增数列"是"数列 $\{S_n\}$ 为递增数列"的（ D ）

A.充分不必要条件　　B.必要不充分条件

C.充要条件　　D.既不充分也不必要条件

2. 已知数列 $\{a_n\}$ 为无穷多项的等比数列，则"$\{a_n\}$ 无最值"是"$q<-1$"的（　　）

A.充分不必要条件　　B.必要不充分条件

C.充要条件　　D.既不充分也不必要条件

答案：C

3. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+2}-a_n=2d$（$n=1,2,\cdots$），其中 d 为常数，则"$a_4-a_1=3d$"是"$\{a_n\}$ 是等差数列"的（　　）

A.充分不必要条件　　　　　B.必要不充分条件
C.充要条件　　　　　　　　D.既不充分也不必要条件
答案：C

4. 已知 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，则“ $S_n=na_n$ ”是“ $\{a_n\}$ 是公比为 1 的等比数列”的（　　）

A.充分不必要条件　　　　　B.必要不充分条件
C.充要条件　　　　　　　　D.既不充分也不必要条件
答案：B

5.已知等差数列 $\{a_n\}$ 中 $a_2=-1$， $2a_3+a_4=5$，则 $a_{2022}-a_{2020}=$__________.

答案：$\because 4d=2a_3+a_4-3a_2=8, \therefore a_{2022}-a_{2020}=2d=4$.

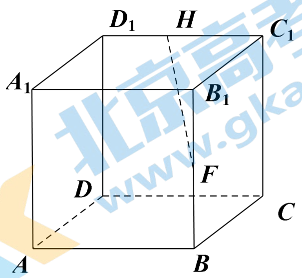
6.已知 $\{a_n\}$ 是等比数列，其中 $a_3=2$， $a_1+a_4=0$，则 $a_{2022}=$__________.

答案：-2

三、【立体几何】
1. 已知点 P 是两条异面直线 l,m 外的任意一点，那么过点 P 可作_____条直线与 l,m 都平行；可作_____条直线与 l,m 都垂直；至少可作_____个平面与 l,m 都平行.
答案：0；1；0.

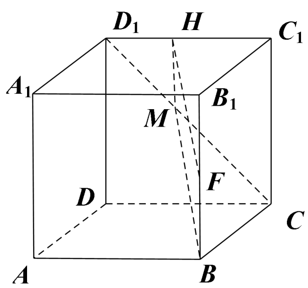
2.如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $AD=1$， $AB=AA_1=2$， H，F 分别是棱 C_1D_1，BB_1 的中点.

（I）请判断直线 HF 与平面 A_1BCD_1 的位置关系，并证明你的结论；



（II）求直线 HF 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦值；

（III）在线段 HF 上是否存在一点 Q，使得点 Q 到平面 A_1BCD_1 的距离是 $\sqrt{2}$，若存在，求出 $\dfrac{HQ}{HF}$ 的值；若不存在，说明理由.



[略答]

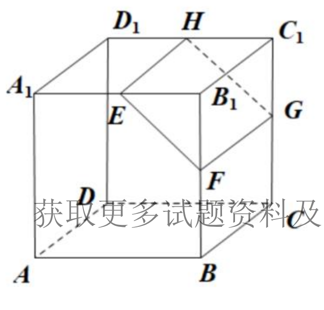
（I） HF // 平面 A_1BCD_1

证明：**思路一：**取 D_1C 的中点 M，连接 MB，

只需证 $HF // MB$

思路二：取 A_1B_1, CC_1 的中点 E,G，连接 EF,FG,GH

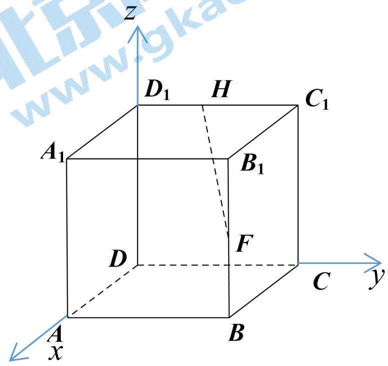
只需证平面 $EFGH$ // 平面 A_1BCD_1.



（II）**建系，**$\overrightarrow{HF}=(1,1,-1)$，平面 $ABCD$ 的一个法向量为 $\vec{m}=(0,0,1)$

$\left|\cos\langle\overrightarrow{HF},\vec{m}\rangle\right|=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

则直线 HF 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.



（III）线段 HF 上不存在一点 Q，使得点 Q 到平面 A_1BCD_1 的距离是 $\sqrt{2}$，

思路一：由（I）知 HF // 平面 A_1BCD_1，点 Q 到平面 A_1BCD_1 的距离即为点 F 到平面 A_1BCD_1 的距离.

$\overrightarrow{FB}=(0,0,-1)$，易求得平面 A_1BCD_1 的一个法向量为 $\vec{n}=(0,1,1)$

点 F 到平面 A_1BCD_1 的距离为 $\frac{|\overrightarrow{FB}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\frac{\sqrt{2}}{2}\neq\sqrt{2}$，

所以线段 HF 上不存在一点 Q，使得点 Q 到平面 A_1BCD_1 的距离是 $\sqrt{2}$.

思路二：假设线段 HF 上存在一点 Q，使得点 Q 到平面 A_1BCD_1 的距离是 $\sqrt{2}$，设 $\frac{HQ}{HF}=\lambda$，

则 $Q(\lambda,\lambda+1,2-\lambda)$，且 $\overrightarrow{QB}=(1-\lambda,1-\lambda,\lambda-2)$，

易求得平面 A_1BCD_1 的一个法向量为 $\vec{n}=(0,1,1)$，

点 Q 到平面 A_1BCD_1 的距离为 $\frac{|\overrightarrow{QB}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\frac{|1-\lambda+\lambda-2|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\neq\sqrt{2}$，

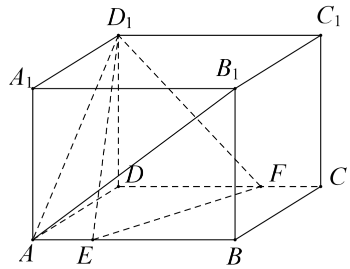
所以线段 HF 上不存在一点 Q，使得点 Q 到平面 A_1BCD_1 的距离是 $\sqrt{2}$.

2.如图，已知在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=\sqrt{2}$，$AA_1=1$，$AD=a$，点 E、F 分别在直线 AB、CD 上，且 $AE=CF$ ．

（I）当点 E 为棱 AB 中点时，求证：$AB_1\perp$ 平面D_1EF；

（II）当 $a=\sqrt{2}$，且点 E 与点 A 重合时，求点 B_1 到平面 D_1EF 的距离；【答案：$\sqrt{2}$】

（III）若存在直线 EF 与直线 AD_1 所成的角等于 30°，求实数 a 的取值范围．【答案：$\left[\sqrt{3},+\infty\right)$】



【解析】（III）这一问看似考查异面直线成角，实际考查线面角（直线 AD_1 与底面 $ABCD$ 的夹角）．注意到线面角是直线与平面内任意直线成角中的最小值．所以当点 E、F 在跑时，直线 EF 与直线 AD_1 所成角的取值范围是从线面角一直到趋近于 90°．所以若存在直线 EF 与直线 AD_1 所成角等于 30°，则只须（必须且只需）线面角小于等于 30°，而直线 AD_1 与底面 $ABCD$ 的夹角即 $\angle D_1AD$，易得 a 的取值范围为$\left[\sqrt{3},+\infty\right)$．

建议该题去掉，首先，题目表述　　点 E、F 分别在直线 AB、CD 上，且 $AE=CF$ ．会导致点 E，F 位置不唯一，这样第（I）问就不对。其次，第（III）问感觉没啥意义。

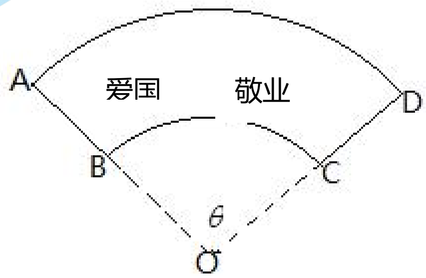
2022 北京市海淀区高考查缺补漏习

——三角函数和解三角形部分

1. 若 $-\frac{3\pi}{4}<\alpha<-\frac{\pi}{2}$，则 $\sin\alpha,\cos\alpha,\tan\alpha$ 的大小关系为________.

答案： $\sin\alpha<\cos\alpha<\tan\alpha$

2. 某企业欲做一组体现社会主义核心价值观的扇面(由扇形 OAD 挖去扇形 OBC 构成)．已知 $OA=30\text{cm}$, $OB=x\text{cm}(0<x<30)$，线段 BA、线段 CD、弧 BC、弧 AD 的长度之和为 160cm，圆心角 θ 为弧度，则 θ 关于 x 的函数解析式是



（A） $\theta=\frac{2x+100}{x+30}$　　（B） $\theta=\frac{x+130}{x+30}$

（C） $\theta=\frac{100-x}{30+x}$　　（D） $\theta=\frac{100-x}{2x+10}$

【答案】A

3. 已知函数 $f(x)=\frac{1-\cos 2x}{\cos x}+1$，给出下列三个结论：

① $f(x)$ 是偶函数；

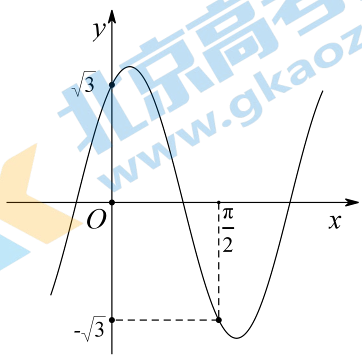
② $f(x)$ 是周期函数；

③ $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上是增函数.

其中，所有正确结论的序号是________.

【答案】①②③

4. 已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$ 的图象如图所示，则 $\omega=$



（A）1　　（B） $\frac{3}{2}$

（C）2　　（D） $\frac{5}{2}$

【答案】C

5. 已知点 $M(\frac{\pi}{3},1)$ 在函数 $f(x)=\sin(\omega_1 x+\varphi_0)$ 的图象上，点 $N(\frac{2\pi}{3},1)$ 在函数 $g(x)=\sin(\omega_2 x+\varphi_0)$ 的图象上，且 ω_1，$\omega_2>0$，$\varphi_0\in[-\pi,\pi)$，给出下列结论：

①当 $\varphi_0=\frac{\pi}{6}$ 时，$\omega_1=1$；

②存在点 (ω_1,ω_2) 满足 $x-2y=0$；

③ $\exists\omega_1$，$\omega_2>0$，满足 $x-2y+6=0$；

④ $\exists\omega_1$，$\omega_2>0$，使点 $M(\frac{\pi}{3},1)$ 和点 $N(\frac{2\pi}{3},1)$ 为两个函数的公共点；

⑤若点 $N(\frac{2\pi}{3},1)$ 在函数 $f(x)=\sin(\omega_1 x+\varphi_0)$ 的图象上，则函数 $f(x)=\sin(\omega_1 x+\varphi_0)$ 的周期是 M，N 两点间距离的整数倍；

⑥定义满足长度 $|a-b|$ 取最小值的区间 (a,b) 为最小区间．若 $\omega_1>\omega_2$，区间 $(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3})$ 是满足 $f'(x)\cdot g'(x)<0$ 的最小区间，则函数 $f(x)=\sin(\omega_1 x+\varphi_0)$ 的周期 $\frac{2\pi}{3}$．

其中，所有正确结论的序号是________．

【答案】②③④⑥

6．设函数 $f(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\omega x)+\sin^2\left(\frac{\omega x}{2}\right)-\frac{1}{2}(0<\omega<3)$．若函数 $f(x)$ 可以同时以下面四条直线中的三条为对称轴：

①$x=-\frac{\pi}{6}$；②$x=\frac{\pi}{3}$；③$x=\frac{\pi}{2}$；④$x=\frac{4\pi}{3}$．

请你选出符合条件的三条直线的序号____________，并回答下面的问题：

（Ⅰ）写出 ω 的值；

（Ⅱ）若 $f(x)\geq-\frac{1}{2}$ 在区间 $[0,m]$ 上恒成立，求 m 的最大值．

【答案】（Ⅰ）$f(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\omega x)+\sin^2\left(\frac{\omega x}{2}\right)-\frac{1}{2}=\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)$

因为 $0<\omega<3$，所以 $T>\frac{2\pi}{3}$，所以选择①②④，此时 $\omega=2$．

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $f(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{6})$．

因为 $x\in[0,m]$，所以 $2x-\frac{\pi}{6}\in[-\frac{\pi}{6},2m-\frac{\pi}{6}]$．

要使得 $f(x)\geq-\frac{1}{2}$ 在 $[0,m]$ 上恒成立，

$-\frac{\pi}{6}<2m-\frac{\pi}{6}\leq\frac{7\pi}{6}$，即 $0<m\leq\frac{2\pi}{3}$．

所以 m 的最大值为 $\frac{2\pi}{3}$．

【解三角形】

1．在 ΔABC 中，$AB=4$，$\tan A\cdot\tan B=\frac{1}{4}$，则 $\tan C$ 的最大值为_____，ΔABC 的面积的最大值为_____．

【答案】$-\frac{4}{3}$，2

2．在 ΔABC 中，$\cos C=\frac{11}{14}$，________，求 a 和 $S_{\Delta ABC}$ 的值．

从以下三个条件中选两个，补充在上面的问题中使得三角形存在，并回答问题．

条件① $b\cos A=8$；条件② $c\sin B=2\sqrt{3}$；条件③ $a^2+c^2-b^2=\frac{2}{7}ac$.

【答案】

选①③，由题可知：$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{1}{7}$

在 ΔABC 中，$\because B\in(0,\pi)\ \therefore \sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$

$\because C\in(0,\pi)$，$\therefore \sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\frac{5\sqrt{3}}{14}$

$\therefore \cos A=-\cos(B+C)=-\cos B\cos C+\sin B\sin C=\frac{1}{2}$

$\because A\in(0,\pi)$，$\therefore \sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore b=16$.

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$

$$\therefore a=\frac{\sin A}{\sin B}\cdot b=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{4\sqrt{3}}{7}}\times 16=14$$

$$\therefore S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times 14\times 16\times\frac{5\sqrt{3}}{14}=40\sqrt{3}$$

选②③，由题可知：$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{1}{7}$，

在 ΔABC 中，$\because B\in(0,\pi)\ \therefore \sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$

$\because c\sin B=2\sqrt{3}$，$\therefore c=\frac{7}{2}$

$\because C\in(0,\pi)$，$\therefore \sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\frac{5\sqrt{3}}{14}$

$\therefore \sin A=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，$\therefore a=\frac{\sin A}{\sin C}\cdot c=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{5\sqrt{3}}{14}}\times\frac{7}{2}=\frac{49}{10}$

$\therefore S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times\frac{49}{10}\times\frac{7}{2}\times\frac{4\sqrt{3}}{7}=\frac{49\sqrt{3}}{10}$

选①②，由题可知：$\frac{b\cos A}{c\sin B}=\frac{8}{2\sqrt{3}}=\frac{4}{\sqrt{3}}$，

由正弦定理 $\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}$，即 $\frac{b}{c}=\frac{\sin B}{\sin C}$

$\therefore\frac{\sin B\cos A}{\sin C\sin B}=\frac{4}{\sqrt{3}}$

又 $\because\sin B\neq 0$ 且 $C\in(0,\pi)$，$\therefore\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\frac{5\sqrt{3}}{14}$

$\therefore\cos A=\frac{10}{7}>1$ 矛盾，即三角形不存在.

所以不可以选①②.

3. 在 ΔABC 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，现有下列四个条件：

① $\sqrt{3}(a^2+c^2-b^2)=-2ac$；② $\cos\frac{A}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$；③ $a=\sqrt{3}$；④ $b=2$.

（Ⅰ）①②两个条件可以同时成立吗？请说明理由；

（Ⅱ）请从上述四个条件中选择三个使得 ΔABC 有解，并求 ΔABC 的面积.

【答案】解：（Ⅰ）由条件① $3(a^2+c^2-b^2)=-2\sqrt{3}ac$，

得 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，

因为 $\cos B=-\frac{\sqrt{3}}{3}<-\frac{1}{2}=\cos\frac{2\pi}{3}$，$B\in(0,\pi)$，

而 $y=\cos x$ 在 $(0,\pi)$ 上单调递减，

所以 $\frac{2\pi}{3}<B<\pi$.

由条件② $\cos\frac{A}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，可得 $\cos A=2\cos^2\frac{A}{2}-1=\frac{1}{2}$

因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$；

于是 $A+B>\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}=\pi$，与 $A+B<\pi$ 矛盾.

所以 ΔABC 不能同时满足①②.

（Ⅱ）因为 ΔABC 同时满足上述四个条件中的三个，不能同时满是①②，

则满足三角形有解的所有组合为①③④或②③④.

若选择组合①③④：

由 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，即 $c^2+2c=1$，解得 $c=\sqrt{2}-1$，

因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\sqrt{1-(\frac{\sqrt{3}}{3})^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

所以 ΔABC 的面积 $S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times(\sqrt{2}-1)\times\frac{\sqrt{6}}{3}=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$．

若选择组合②③④：

由 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，即 $c^2-2c+1=0$，解得 $c=1$，

因为 $a^2+c^2=b^2$，所以 $B=\frac{\pi}{2}$，ΔABC 为直角三角形，

所以 ΔABC 的面积 $S=\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$．

4．已知 ΔABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $\sqrt{3}\sin(B+\frac{\pi}{6})=-\cos(B+\frac{\pi}{6})$．

（Ⅰ）求 $\angle B$ 的值；

（Ⅱ）给出以下三个条件：

条件①：$a^2-b^2+c^2+3c=0$；

条件② $a=\sqrt{3},b=1$；

条件③ $S_{\Delta ABC}=\frac{15\sqrt{3}}{4}$．

这三个条件中仅有两个正确，请选出正确的条件并回答下面的问题：

（i）求 $\sin A$ 的值；

（ii）求 $\angle ABC$ 的角平分线 BD 的长．

【答案】解：（Ⅰ）由 $\sqrt{3}\sin(B+\frac{\pi}{6})=-\cos(B+\frac{\pi}{6})$，得 $\tan(B+\frac{\pi}{6})=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，

因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\frac{2\pi}{3}$．

（Ⅱ）显然 $B>A$，所以 $b>a$，所以条件②错误，所以①③正确．

（i）由③可得 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{15\sqrt{3}}{4}$，所以 $ac=15$，

由①可得 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{-3c}{2ac}=\frac{-3}{2a}=-\frac{1}{2}$，

所以 $a=3$，$c=5$，

代入 $a^2-b^2+c^2+3c=0$，解得 $b=7$，

由 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，解得 $\sin A=\dfrac{3\sqrt{3}}{14}$．

（ii）由正弦定理 $\dfrac{AD}{\sin 60^{\circ}}=\dfrac{AB}{\sin\angle ADB}$，$\dfrac{CD}{\sin 60^{\circ}}=\dfrac{BC}{\sin\angle BDC}$，所以 $\dfrac{AD}{CD}=\dfrac{AB}{BC}$，

解得 $AD=\dfrac{35}{8}$．

在 ΔADB 中，由正弦定 $\dfrac{BD}{\sin A}=\dfrac{AD}{\sin 60^{\circ}}$，所以 $BD=\dfrac{15}{8}$．

5. 在 $\triangle ABC$ 中，$c=\sqrt{7}$，且 $\triangle ABC$ 同时满足条件①、条件②、条件③、条件④这四个条件中的三个，请选择三个条件并解答下列问题：

（Ⅰ）求边 b；

（Ⅱ）求 $S_{\triangle ABC}$．

条件① $a+b=5$；条件② $\sin B=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$；条件③ $b\cos B=\dfrac{4\sqrt{7}}{7}$；条件④ $\cos A=\dfrac{\sqrt{7}}{14}$．

【答案】解：选择①②③

$\because b\cos B=\dfrac{4\sqrt{7}}{7}$ $\therefore \cos B>0$，$\because \sin B=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$

$\therefore \cos B=\sqrt{1-\sin^2 B}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$

$\because b\cos B=\dfrac{4\sqrt{7}}{7}$

$\therefore b=2$

$\because a+b=5$

$\therefore a=3$

$\therefore S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}\times 3\times\sqrt{7}\times\dfrac{\sqrt{21}}{7}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

选择①②④

$\because \cos A=\dfrac{\sqrt{7}}{14}$，$A\in(0,\pi)$，

$\therefore \sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\dfrac{3\sqrt{21}}{14}$

$\because \sin B=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$

$\therefore$ 由正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，得 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{\sin A}{\sin B}=\dfrac{3}{2}$

$\because a+b=5$

$\therefore a=3$，$b=2$

$\therefore S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}\times 3\times\sqrt{7}\times\dfrac{\sqrt{21}}{7}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

选择①③④

$\because \cos A=\dfrac{\sqrt{7}}{14}$

$\therefore$由余弦定理：$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ 及 $a+b=5$

得 $\dfrac{\sqrt{7}}{14}=\dfrac{b^2+7-(5-b)^2}{2\sqrt{7}b}$

解得 $b=2$，则 $a=3$

因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\dfrac{3\sqrt{21}}{14}$

则 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\times 2\times\sqrt{7}\times\dfrac{3\sqrt{21}}{14}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

选择②③④

$\because b\cos B=\dfrac{4\sqrt{7}}{7}\therefore \cos B>0$，$\because \sin B=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$

$\therefore \cos B=\sqrt{1-\sin^2 B}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$

$\because b\cos B=\dfrac{4\sqrt{7}}{7}$

$\therefore b=2$

$\because \cos A=\dfrac{\sqrt{7}}{14}$， $A\in(0,\pi)$，

$\therefore \sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\dfrac{3\sqrt{21}}{14}$

$\therefore S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\times 2\times\sqrt{7}\times\dfrac{3\sqrt{21}}{14}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

2022 北京市海淀区高考查缺补漏习题

——函数部分

1. 若函数 $y=f(x)$ 的解析式为 $f(x)=\begin{cases}1, x\text{为有理数}\\0, x\text{为无理数}\end{cases}$，则 $f[f(x)]=$________

答案：1.

2. 若函数 $f(x)=\log_a(x+1)-\frac{3}{2}$ 存在零点 $2a-1$，则 a 的值为________.

答案： 4

3. 若 $a=\lg 2, b=\lg 3$，则 $\lg 15=$______.

答案： $b+1-a$

4. 若函数 $f(x)=kx^2-x-|\ln x|$ 有唯一的零点，则实数 k 的取值范围是__________

答案：$(0,+\infty)$

5. 若方程 $\left|e^x-1\right|=bx$ 有两个实数根，则 b 的取值范围为_

答案：$(-1,0)\cup(1,+\infty)$

6. 已知函数 $f(x)=\lg x+x^2-1$，则不等式 $f(x)>0$ 的解集是______.

答案：$\{x\,|\,x>1\}$

7. 定义域为 $\mathbf{R}$ 的 $f(x)$ 满足对 $\forall x\in\mathbf{R}$，有 $f(1+x)=f(1-x)=f(x-1)$，且当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)=\sin(\pi x)$，设函数 $f(x)$ 对应曲线为 C，则以下对于函数 $f(x)$ 性质描述正确的是____________

① $f(x)$ 是奇函数；　　② $f(x)$ 是偶函数；

③ $f(x)$ 是周期函数 ；　④直线 $x=\frac{3}{2}$ 是曲线 $y=f(x)$ 的一条对称轴.

答案： ② ③ ④

8. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,1)$，值域为 $\mathbf{R}$，请写出一个满足要求的函数________.

答案： $f(x)=\ln(1-x)$

9. 在人工智能领域，神经网络是一个比较热门的话题.由神经网络发展而来的深度学习正在飞速改变着我们身边的世界.从 AlphaGo 到自动驾驶汽车，这些大家耳熟能详的例子，都是以神经网络作为其理论基础的.在神经网络当中，有一

类很重要的函数称为激活函数，Sigmoid 函数 $\sigma(x)$ 即是神经网络中最有名的激活函数之一，其解析式为：$\sigma(x)=\dfrac{1}{1+e^{-x}}$.

下列关于 Sigmoid 函数的表述正确的是：

①Sigmoid 函数是单调递增函数；

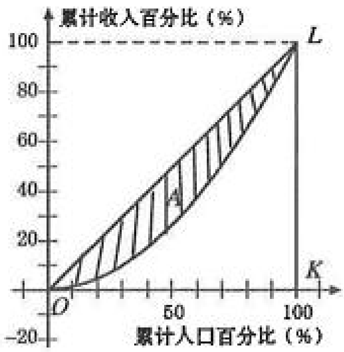
②Sigmoid 函数的图像是一个中心对称图形，对称中心为 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$；

③对于任意正实数 a，方程 $\sigma(x)=a$ 有且只有一个解；

④Sigmoid 函数的导数满足：$\sigma'(x)=\sigma(x)(1-\sigma(x))$.

答案：①②④

10. 为了研究国民收入在国民之间的分配，避免贫富过分悬殊，美国统计学家劳伦茨提出了著名的劳伦茨曲线，如图所示．劳伦茨曲线为直线 OL 时，表示收入完全平等；劳伦茨曲线为折线 OKL 时，表示收入完全不平等．记阴影区域 A 为不平等区域，a 表示其面积，s 为 ΔOKL 的面积．令 $Gini=\dfrac{a}{s}$，称为基尼系数，对于下列说法：



① $Gini$ 越小，则国民分配越公平；

②设劳伦茨曲线对应的函数为 $f(x)$，则对任意 $x\in(0,1)$，均有 $\dfrac{f(x)}{x}>1$；

③若国家 A 某年的劳伦茨曲线近似为 $y=x^2(x\in[0,1])$，其基尼系数为 m；若国家 B 某年的劳伦茨曲线近似为 $y=x^3(x\in[0,1])$，其基尼系数为 n，则 $m<n$；

其中正确的是_________．①③

11．若对函数 $f(x)$ 的任意一条切线 l，均存在唯一一条切线 l' 使得 $l\perp l'$，则称该函数为正交函数．给出下列四个函数：

① $f(x)=x^2$，　② $f(x)=x^{-2}$，　③ $f(x)=\ln(|x|)$，　④ $f(x)=|\ln x|$．

其中正交函数的个数为（　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

答案:②③④正确，选 C

12．若对函数 $f(x)$ 的任意一条切线 l，均存在唯一一条切线 l' 使得 $l\,/\!/\,l'$，则称该函数为平行函数．给出下列四个函数：

① $f(x)=x^{-3}$，　　　　　② $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$，

③ $f(x)=\sin x(0<x<2\pi)$，　　　④ $f(x)=|\sin x|(0<x<2\pi)$.

A. 1　　　B. 2　　　C. 3　　　D. 4

答案:①②正确，选 B

13. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^3-ax^2+x+1$，

（1）若 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上的最大值为 3，求 $f(x)$ 的最小值；

（2）若 $f(x)\le e^x$，求 a 得取值范围.

注：（1）可改为；当 $a>0$ 时，若 $f(x)$ 存在极大值 M，求证：$M<\frac{4}{3}$.

略解：（1）由必要条件 $f(2)=7-4a\le 3$ 得 $a\ge 1$.

当 $a=1$ 时，$f'(x)=\frac{3}{2}(x-\frac{2}{3})^2+\frac{1}{3}>0$，所以 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上递增，所以符合题意，$f(x)$ 最小值为 $f(0)=1$；

当 $a>1$ 时，仅需考虑在 $[0,2]$ 上存在极大值的情况，

由 $f'(x)=\frac{3}{2}x^2-2ax+1$，

可知当 $\begin{cases}\Delta=4a^2-6>0,\\ 0<\frac{2}{3}a<2,\end{cases}$ 即 $\frac{\sqrt{6}}{2}<a<3$ 时，$f'(x)$ 在 $(0,2)$ 内存在唯一零点 x_0 满足：

$f'(x)>0$ 在 $(0,x_0)$ 上成立，$f'(x)<0$ 在 $(x_0,\frac{2a}{3})$ 上成立，所以 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上存在唯一极大值为 $f(x_0)$，

由 $f'(x_0)=\frac{3}{2}{x_0}^2-2ax_0+1=0$，

可知 $x_0\in[0,2]$ 时，$f(x_0)=\frac{1}{2}{x_0}^3-a{x_0}^2+x_0+1=-\frac{1}{4}{x_0}^3+\frac{1}{2}x_0+1<\frac{1}{2}x_0+1\le 2$，

所以仅有 $a=1$ 符合题意.

（2）由 $f(x)\le e^x$ 可得 $(x^3-2ax^2+2x+2)e^{-x}\le 2$

令 $g(x)=(x^3-2ax^2+2x+2)e^{-x}$，则 $g'(x)=-x[x-(1+2a)](x-2)e^{-x}$

当 $2a+1<0$ 时，$g(0)=2$ 是 $g(x)$ 的极小值，显然不合题意；

当 $2a+1=0$ 时，$g(2)=10e^{-2}$ 是唯一极大值，因为 $g(2)=18e^{-2}>2$，所以不符合题意；

当 $2a+1=2$ 时，$g(0)=2$ 时唯一极大值，符合题意；

当 $0<2a+1<2$ 时，$g(0)=2$ 和 $g(2)=(14-8a)\mathrm{e}^{-2}$ 是极大值，由 $(14-8a)\mathrm{e}^{-2}\le 2$ 得 $a\ge\dfrac{7-\mathrm{e}^2}{4}$，

所以 $\dfrac{7-\mathrm{e}^2}{4}\le a<\dfrac{1}{2}$；

当 $2a+1>2$ 时，$g(x)=(x^3-2ax^2+2x+2)\mathrm{e}^{-x}<(x^3-x^2+2x+2)\mathrm{e}^{-x}$

令 $h(x)=(x^3-x^2+2x+2)\mathrm{e}^{-x}$，$h'(x)=-x(x-2)^2\mathrm{e}^{-x}$，所以 $h(x)\le h(2)=10\mathrm{e}^{-2}<2$，

所以 $a\ge\dfrac{\mathrm{e}^2-7}{4}$ 时，符合题意.

14. 已知函数 $f(x)=(x+1)\mathrm{e}^{-x}$.

（1）求 $f(x)$ 的最大值；

（2）若 $a<\dfrac{\mathrm{e}^{-x}-1}{x}<b$ 对 $x\in(0,1)$ 恒成立，求 a 的最大值与 b 的最小值.

解：$f'(x)=-x\mathrm{e}^{-x}$，$f(x)\le f(0)=1$

设 $g(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{-x}-1}{x}$，则 $g'(x)=\dfrac{1-(x+1)\mathrm{e}^{-x}}{x^2}=\dfrac{1-f(x)}{x^2}\ge 0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上递增，所以

当 $x\in(0,1]$时，$g(x)\le g(1)$，所以 b 的最小值为 $g(1)=\mathrm{e}^{-1}-1$.

$a<\dfrac{\mathrm{e}^{-x}-1}{x}\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-x}-ax-1>0$，

设 $h(x)=\mathrm{e}^{-x}-ax-1$，$h'(x)=-\mathrm{e}^{-x}-a$，

当 $a\ge 0$ 时，因为 $x\in(0,1)$，$\mathrm{e}^{-1}<\mathrm{e}^{-x}<1$，所以 $h(x)=\mathrm{e}^{-x}-ax-1<\mathrm{e}^{-x}-1<0$，不合题意；

当 $0>a>-1$ 时，令 $h'(x_0)=0$ 得 $x_0=-\ln(-a)>0$，$h(x)$ 在 $(0,x_0)$ 递减，所以 $h(x_0)<h(0)=0$，不符合题意；

当 $a\le -1$ 时，$h'(x)=-\mathrm{e}^{-x}-a>-1-a\ge 0$，所以 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上递增，$h(x)>0$ 恒成立.

所以 a 的最大值为 -1.

2022 北京高三各区二模试题下载

北京高考资讯公众号搜集整理了【**2022 北京各区高三二模试题&答案**】，想要获取试题资料，关注公众号，点击菜单栏【一模二模】→【二模试题】，即可免费获取全部二模试题及答案，欢迎大家下载练习！

还有更多二模成绩、排名、赋分等信息，考后持续分享！