顺义区 2019 届高三第二次统练数学试卷答案（理科）

一、A B A D　C B B D

二、填空题

9. $1+i$　　10. 60^0　　11. $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{4}=1$ ，$y=\pm\dfrac{1}{2}x$.

12. $-\dfrac{4}{5}$.　　13. $(2,\dfrac{1}{2})$　（答案不唯一）　　14. 9, 4

三、解答题

15 解（I）在$\triangle ABC$中，由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，-----------------2 分

所以 $a^2=8^2+3^2-2\times8\times3\times\dfrac{1}{2}$

$=49$，

即 $a=7$.　　---------------------------- 4 分

由正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$，　　---------------------------- 6 分

得

$\sin C=\dfrac{c\sin A}{a}=\dfrac{3\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{7}=\dfrac{3\sqrt{3}}{14}$.　　---------------------------- 8 分

（II）在$\triangle ABC$中，BC 边上的高为 $b\sin C=8\times\dfrac{3\sqrt{3}}{14}=\dfrac{12\sqrt{3}}{7}$.-------------13 分

或法 2：$s_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=12\sqrt{3}$，又 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}BC\cdot h$，所以 $h=\dfrac{12\sqrt{3}}{7}$

16.(I)证明:∵平面 $PCD\perp$ 平面 $ABCD$

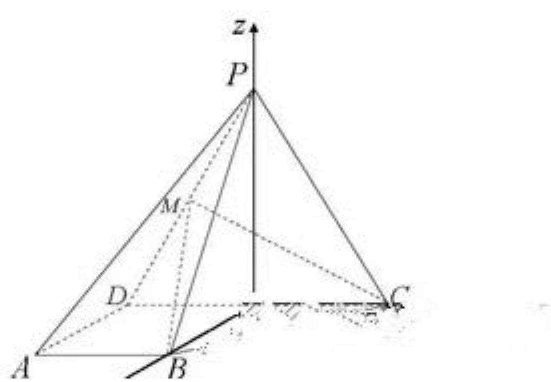
平面 $PCD\cap$ 平面 $ABCD=CD$

$AD\subset$ 平面 $ABCD$

$AD\perp CD$

∴ $AD\perp$ 平面 PCD　---------------------------- 4 分

（II）取 CD 的中点 O，连结 OB ,OP



$\because PC = PD$

$\therefore OP \perp CD$

$\because AB = \frac{1}{2}CD$,

$\therefore AB = OD$

又$\because \angle BAD = \angle ADC = 90^\circ$

$\therefore$四边形 $ABOD$ 是平行四边形

$\therefore OB // AD$

$\therefore OB \perp OC$

$\because AD \perp$平面 PCD

$\therefore AD \perp OP$

$\therefore OB \perp OP$

建立如图所示空间直角坐标系 $O-xyz$， --5 分

则 $A(1,-1,0)$，$B(1,0,0)$，$C(0,1,0)$，$P(0,0,\sqrt{3})$，

$M(0,-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$，$\overrightarrow{CM} = (0,-\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$，$\overrightarrow{CB} = (1,-1,0)$

设 $\vec{m} = (x,y,z)$ 为平面 MBC 的一个法向量，由 $\begin{cases} \vec{m}\cdot\overrightarrow{CM} = 0 \\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{CB} = 0 \end{cases}$

得 $\begin{cases} -\frac{3}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$ 令 $x = 1$，得 $y = 1$，$z = \sqrt{3}$，所以 $\vec{m} = (1,1,\sqrt{3})$ ------------------------------------7 分

因为 z 轴垂直于平面 BCD，

所以取平面 BCD 的一个法向量 $\vec{n} = (0,0,1)$ --8 分

$$\cos < \vec{m},\vec{n} > = \frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}\times 1} = \frac{\sqrt{15}}{5}$$ --9 分

所以二面角 $M-BC-D$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$. ---------------------------- 10 分

（III）解：直线 CM 与平面 PAB 不平行，---11 分

理由如下：

$\overrightarrow{AB}=(0,1,0)$ $\overrightarrow{PB}=(1,0,-\sqrt{3})$

设 $\vec{v}=(x,y,z)$ 为平面 PAB 的一个法向量，由 $\begin{cases}\vec{v}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\ \vec{v}\cdot\overrightarrow{PB}=0\end{cases}$

得 $\begin{cases}y=0\\ x-\sqrt{3}z=0\end{cases}$ 令 $z=1$，得 $x=\sqrt{3}$，所以 $\vec{v}=(\sqrt{3},0,1)$

$\overrightarrow{CM}\cdot\vec{v}=(0,-\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})\cdot(\sqrt{3},0,1)=\frac{\sqrt{3}}{2}\neq 0$ ---13 分

所以 $\overrightarrow{CM}$ 与 $\vec{v}$ 不垂直，又因为 $CM\not\subset$ 平面 PAB

所以直线 CM 与平面 PAB 不平行. --14 分

或法 2：（反证法）假设 $CM//$面PAB,因为 $CD//$面PAB，且 $CM\cap CD=C$

所以 面$PCD//$面PAB，又 面$PCD\cap$面PAB=P（矛盾）

所以假设不成立，故直线 CM 与平面 PAB 不平行.

17. 解：（I）记"在 2008 年和 2018 年都达到了"富裕" 或更高生活质量"为事件 M .因为在 2008 年和 2018 年都达到了"富裕" 或更高生活质量的只有家庭 C.所以 $P(M)=\frac{1}{5}$

--4 分

(II) X 的可能取值为 1,2,3

$P(X=1)=\frac{C_3^1C_2^2}{C_5^3}=\frac{3}{10}$, $P(X=2)=\frac{C_3^2C_2^1}{C_5^3}=\frac{6}{10}$, $P(X=3)=\frac{C_3^3C_2^0}{C_5^3}=\frac{1}{10}$

--10 分

X 的分布列为：

X	1	2	3

P	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$

--11 分

(III)

家庭	1978 年	1988 年	1998 年	2008 年	2018 年
A	1	1	2	3	4
B	1	2	2	3	4
C	0	1	2	4	5
D	0	1	2	2	3
E	1	1	2	2	3

生活质量方差最大的家庭是 C，方差最小的家庭是 E. --13 分

18. 解：（I）因为点$(1,1)$在曲线$y=f(x)$上，所以$a=1$，$f(x)=\sqrt{x}-\ln x$

--1 分

又$f'(x)=\frac{\sqrt{x}}{2x}-\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{x}-2}{2x}$， --3 分

所以$f'(1)=-\frac{1}{2}$ --4 分

在该点处曲线的切线方程为$y-1=-\frac{1}{2}(x-1)$即$x+2y-3=0$ --5 分

（II）定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{a\sqrt{x}}{2x}-\frac{1}{x}=\frac{a\sqrt{x}-2}{2x}$ --6 分

讨论：（1）当$a\le 0$时，$f'(x)<0$

此时$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减，所以不存在极小值------------------------------8 分

（2）当$a>0$时，令$f'(x)=0$可得$x=\frac{4}{a^2}$ --9 分

列表可得

x	$\left(0,\frac{a^2}{4}\right)$	$\frac{a^2}{4}$	$\left(\frac{4}{a^2},+\infty\right)$
$f'(x)$	−	0	+

$f(x)$	单调递减		单调递增

所以$f(x)$在$\left(0,\dfrac{4}{a^2}\right)$上单调递减，在$\left(\dfrac{4}{a^2},+\infty\right)$上单调递增 ----------------------11 分

所以$f(x)_{极小值}=f\left(\dfrac{4}{a^2}\right)=2-\ln\dfrac{4}{a^2}$，所以$2-\ln\dfrac{4}{a^2}=2$ 解得$a=2$（舍负）

---13 分

19. 解：（I）设$M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，则依题意可知：$y_1^2=4x_1,y_2^2=4x_2$

相减可得：$y_1^2-y_2^2=4x_1-4x_2$ 即$(y_1-y_2)(y_1+y_2)=4(x_1-x_2)$

又$y_1+y_2=4$，所以$k=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=1$，即直线$MN$的斜率为 1. --4 分

（II）由（I）知直线MN的斜率为 1，所以可设直线MN的方程为$y=x+a$

讨论：

当（1）$M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$在x轴异侧时，由$\angle OBM=\angle OBN$知$k_{BM}+k_{BN}=0$，---------------------6 分

又$k_{BM}=\dfrac{y_1}{x_1+2},k_{BN}=\dfrac{y_2}{x_2+2}$

所以$\dfrac{y_1}{x_1+2}+\dfrac{y_2}{x_2+2}=0$ 即$\dfrac{y_1(x_2+2)+y_2(x_1+2)}{(x_1+2)(x_2+2)}=0$ --------------------7 分

又$y_1=x_1+a,y_2=x_2+a$，所以$(x_1+a)(x_2+2)+(x_2+a)(x_1+2)=0$

化简得$2x_1x_2+(a+2)(x_1+x_2)+4a=0$（1） ---------------------8 分

联立方程组$\begin{cases}y=x+a\\y^2=4x\end{cases}$消去$y$得$x^2+(2a-4)x+a^2=0$

所以$x_1+x_2=4-2a$，$x_1x_2=a^2$--------------------12 分

代入（1）式可得$a=-2$所以直线MN的方程为$y=x-2$-------------------13 分

（2）当$M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$在x轴同侧时，由$\angle OBM=\angle OBN$知$k_{BM}=k_{BN}$

即直线 MN 过点 B，所以此时直线方程为$y=x+2$，经验证，此时直线与抛物线无交点，故舍去 --------------------14 分

综上可知：直线MN的方程为$y=x-2$.

20. 解：（I）由$\{b_n\}$是"平方等差数列"，$b_1=1,b_2=2$，有$D=2^2-1^2=3$，

于是$b_3^2=b_2^2+D=4+3=7$，

$b_4^2=b_3^2+D=7+3=10$

所以，$b_3=\pm\sqrt{7},b_4=\pm\sqrt{10}$. --4 分

（II）设数列$\{a_n\}$是等比数列，所以$a_n=a_1q^{n-1}$，（q为公比且$q\neq 0$）则$a_n^2=a_1^2q^{2n-2}$，若$\{a_n\}$为"平方等差数列"，则有

$$a_n^2-a_{n-1}^2=a_1^2q^{2n-2}-a_1^2q^{2n-4}=a_1^2q^{2(n-2)}(q^2-1)=D\text{（}D\text{为与 }n\text{ 无关的常数）}$$

所以$q^2=1$，　　即 $q=1$ 或 $q=-1$.　　--------------------------------------8 分

（III）因为数列$\{c_n\}$ 是"平方等差数列"，$c_1=2,c_2=2\sqrt{2},c_n>0$，则$D=4$，

$c_n^2=c_1^2+(n-1)D=4+4(n-1)=4n$　　$\therefore c_n=2\sqrt{n}$，

所以数列$\left\{\dfrac{1}{c_n}\right\}$的前$n$项和$T_n=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{\sqrt{1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+...+\dfrac{1}{\sqrt{n}})$　------------------------------------10 分

假设存在正整数p,k使不等式$\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{\sqrt{1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}})>\sqrt{pn+k}-1$　对一切$n\in N^*$都成立，即$\dfrac{1}{\sqrt{1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}>2(\sqrt{pn+k}-1)$

当$n=1$时，　$1>2(\sqrt{p+k}-1)$，$\therefore p+k<\dfrac{9}{4}$又$p,k$为正整数，

$\therefore p=k=1$.　　---11 分

下面证明：$\dfrac{1}{\sqrt{1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+...+\dfrac{1}{\sqrt{n}}>2(\sqrt{n+1}-1)$对一切$n\in N^*$都成立.

由于$\dfrac{1}{\sqrt{n}}=\dfrac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}>\dfrac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(n\in N^*)$

所以$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}>2[(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\ldots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})]=2(\sqrt{n+1}-1)$

所以存在$p=k=1$使不等式$T_n>\sqrt{pn+k}-1$对一切$n\in N^*$都成立.

（注：也可用数学归纳法证明） --13 分