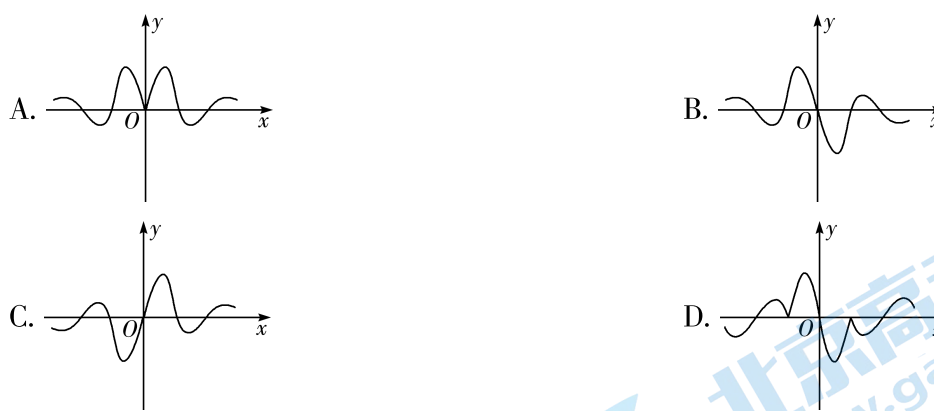


高三数学

考生注意：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上，并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{-2, -1, 1, 2, 4\}$, $B = \{x | (x+2)(x-3) < 0\}$, 则 $A \cap B =$
 A. $\{-2, 2\}$ B. $\{-1, 2\}$ C. $\{-2, -1, 2\}$ D. $\{-1, 1, 2\}$
2. 设 $z = \frac{1+3i}{3-i} - 3i$, 则 $|z| =$
 A. $\sqrt{10}$ B. 2 C. $\sqrt{3}$ D. $\sqrt{2}$
3. 已知 P, Q 分别为 $\triangle ABC$ 的边 AB, AC 的中点, 若 $\vec{PQ} = (2, 3)$, $B(-1, -2)$, 则点 C 的坐标为
 A. $(3, 4)$ B. $(1, 1)$ C. $(-3, -5)$ D. $(-5, -8)$
4. 函数 $f(x) = \frac{\sin 3x}{\ln(e^{2x} + 1) - x}$ 的部分图象大致为

5. 已知函数 $f(x) = x^2 - ax - \ln x + 2$ ($a \in \mathbf{R}$) 在区间 $(0, 1)$ 上单调递减, 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 则 $f(x)$ 的极小值为
 A. 2 B. 1 C. 0 D. -1

6. 过动点 $P(a, b)$ ($a \neq 0$) 作圆 $C: x^2 + (y - 4\sqrt{3})^2 = 3$ 的两条切线, 切点分别为 A, B , 且 $\angle APB = 60^\circ$, 则 $\frac{b}{a}$ 的取值范围是

- A. $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ B. $[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}]$
 C. $(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}] \cup [\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty)$ D. $(-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, +\infty)$

7. 已知 $\alpha \in (0, \pi)$, $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, 且 $2\sin \alpha + \tan \beta + \tan \gamma = 2\sin \alpha \tan \beta \tan \gamma$, 则 $\alpha =$
 A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{2\pi}{3}$

8. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 2^{n+1} + c$, 若 $a_n + 2(-1)^n < \lambda[a_{n+1} + 2(-1)^{n+1}]$ 对任意 $n \in \mathbf{N}^*$ 恒成立, 则实数 λ 的取值范围是
 A. $(0, +\infty)$ B. $(\frac{1}{2}, +\infty)$ C. $(1, +\infty)$ D. $(2, +\infty)$

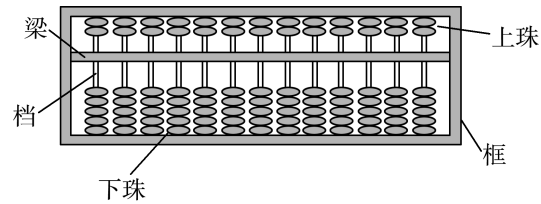
二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 已知样本数据 $P_1 = \{a_1, a_2, \dots, a_9\}$, 其中 a_1, a_2, \dots, a_9 为区间 $(0, 9)$ 内互不相等的实数, 样本数据 $P_2 = \{9 - a_1, 9 - a_2, \dots, 9 - a_9\}$, 样本数据 $P_3 = \{\frac{9}{a_1}, \frac{9}{a_2}, \dots, \frac{9}{a_9}\}$, 则下列结论正确的是
 A. P_1 与 P_2 的极差相等 B. P_1 与 P_2 的平均数之和为 9
 C. P_1 与 P_3 的平均数之积为 9 D. P_1 与 P_3 的中位数之积为 9
10. 已知 F_1, F_2 分别是椭圆 $C: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ 的左、右焦点, P, Q 是 C 上关于坐标原点对称的两个点, 则
 A. C 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $(|PF_1| + 1)(|PF_2| + 1) \leq 25$
 C. 四边形 PF_1QF_2 面积的最大值为 $8\sqrt{3}$ D. $\angle F_1PF_2$ 的最大值为 $\frac{\pi}{3}$
11. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , $f(x+1)$ 的图象关于直线 $x = -1$ 对称, 且 $f(x+1)$ 在区间 $(-\infty, -1]$ 上单调递增, 函数 $g(x) = x^3 + 2x - \frac{1}{1+2^x} + \frac{1}{2}$, 则下列判断正确的是
 A. $f(g(x))$ 是偶函数 B. $g(2\sqrt{3}) > g(3\sqrt{2})$
 C. $f(g(\sqrt{3}\ln 2)) > f(g(\ln 3))$ D. $g(f(\sqrt{3}\ln 2)) < g(f(\ln 3))$
12. 已知圆锥 PO 的轴截面 PAB 是等边三角形, $AB = 4$, M 是圆锥侧面上的动点, 满足线段 PM 与 AM 的长度相等, 则下列结论正确的是
 A. 存在一个定点, 使得点 M 到此定点的距离为定值
 B. 存在点 M , 使得 $PM \perp AM$
 C. 存在点 M , 使得 $\angle AMB = 60^\circ$
 D. 存在点 M , 使得三棱锥 $P-AMB$ 的体积为 $\frac{4\sqrt{6}}{3}$

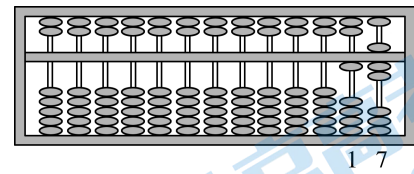
三、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分.

13. 一个正四棱台的下底面周长与上底面周长之差为16,且其侧面梯形的高为 $2\sqrt{3}$,则该正四棱台的高为_____.

14. 算盘起源于中国,迄今已有2600多年的历史,在电子计算机发明以前,算盘是广为使用的计算工具.图(1)展示的是一把算盘的初始状态,自右向左每一档分别表示个位、十位、百位、千位……上面的一粒珠子表示5,下面的一粒珠子表示1.例如图(2)中个位上拨动一粒上珠、两粒下珠,十位上拨动一粒下珠靠梁,表示数字17.现将初始状态的算盘上个位、十位、百位、千位、万位、十万位分别随机拨动一粒珠子靠梁,则可以表示能被3整除的六位数的个数为_____.



图(1)



图(2)

15. 已知函数 $f(x) = \cos(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, -\pi < \varphi < 0$)的图象与 y 轴的交点为 $(0, \frac{\sqrt{3}}{2})$,且在区间 $(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ 上有且仅有一个零点,则 ω 的取值范围是_____.

16. 过双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$)的左焦点 F 作 C 的一条渐近线的垂线,垂足为 P ,这条垂线与另一条渐近线在第一象限内交于点 A , O 为坐标原点,若 $|OP|, |PA|, |OA|$ 成等差数列,则 C 的离心率为_____.

四、解答题:共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10分)

在 $\triangle ABC$ 中,内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ,已知 $b^2 + 3accos B = 2c^2$.

(I) 若 $a = c$,求 A ;

(II) 若 $\cos A + \cos 2A = \frac{5}{9}$,求证: $b = c$.

18. (12分)

记正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ,已知 $a_1 = 1, 2(S_n + S_{n-1}) = a_n^2 + 1$ ($n \geq 2$).

(I) 求 a_n ;

(II) 若 $b_n = \begin{cases} \frac{a_n + 1}{2}, & n \text{ 为奇数,} \\ \frac{4}{a_n(a_n + 4)}, & n \text{ 为偶数,} \end{cases}$ 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ,求 T_{20} 的值.

19. (12分)

魔方是民间益智玩具,能培养数学思维,锻炼眼脑的协调性,全面提高专注力、观察力、反应力.基于此特点某小学开设了魔方兴趣班,共有100名学生报名参加,在一次训练测试中,老师统计了学生还原魔方所用的时间(单位:秒),得到相关数据如下:

人数	时间	[50,80)	[80,110)	[110,140)	[140,170)	[170,200)
年级						
低年级		2	8	12	14	4
高年级		10	22	16	10	2

(I) 估计这100名学生这次训练测试所用时间的第78百分位数;

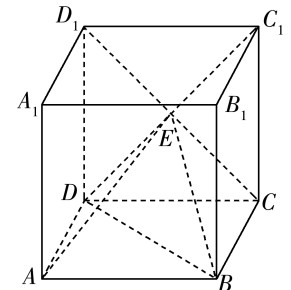
(II) 在这次测试中,从所用时间在 $[80,110)$ 和 $[110,140)$ 内的学生中各随机抽取1人,记抽到低年级学生的人数为 X ,求 X 的分布列和数学期望.

20. (12分)

如图,已知平行六面体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $BC \perp DC, D_1C \perp DC_1, E$ 为 D_1C, DC_1 的交点,且 $DC_1 \perp BE$.

(I) 求证:平面 $CC_1D_1D \perp$ 平面 $ABCD$;

(II) 若 $DD_1 \perp DC, AB = 2BC = 2$,求二面角 $A - BE - D$ 的余弦值.



21. (12分)

已知函数 $f(x) = 2x - 2(a+1)e^x + ae^{2x}$ ($a \in \mathbf{R}$).

(I) 若 $f(x)$ 单调递增,求 a 的值;

(II) 设 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$)是方程 $f(x) = ae^{2x}$ 的两个实数根,求证: $x_1 + x_2 > 2$.

22. (12分)

已知抛物线 $C: x^2 = 2py$ ($p > 0$)经过点 $(-2, 2)$.

(I) 求 C 的方程及其准线方程;

(II) 过 C 外一点 P 作三条直线 l_1, l_2, l_3 ,其中 l_1, l_2 与 C 分别相切于 A, B 两点, l_3 与 C 相交于 D, E 两点,同时与直线 AB 相交于 Q 点,记 $\triangle APQ, \triangle APD, \triangle BPQ, \triangle BPE$ 的面积分别为 S_1, S_2, S_3, S_4 ,证明:当点 P 运动时, $\frac{S_1}{S_2} + \frac{S_3}{S_4}$ 为定值.