

2018 北京临川育人学校高三（上）期末

数 学（文）

2018.1

一、选择题：本大题共 12 个小题，每小题 5 分，共 60 分。

1. 设集合 $A = \{x | x^2 - 4x + 3 < 0\}$, $B = \{x | 2x - 3 > 0\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $\left[-3, -\frac{3}{2}\right]$ B. $\left[-3, \frac{3}{2}\right]$ C. $\left[1, \frac{3}{2}\right]$ D. $\left[\frac{3}{2}, 3\right]$

2. 若 $z = 1 + 2i$, 则 $\frac{4i}{z\bar{z} - 1} =$ ()

- (A) 1 (B) -1 (C) i (D) -i

3. 设曲线 $y = \sin x + \cos x$ 在点 $(\frac{\pi}{2}, 1)$ 处的切线与直线 $x - ay + 1 = 0$ 平行, 则实数 a 等于 ()

- A. -1 B. $\frac{1}{2}$ C. -2 D. 2

4. 已知双曲线 $C_1: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$ 与双曲线 $C_2: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = -1$, 给出下列说法, 其中错误的是 ()

- A. 它们的焦距相等 B. 它们的焦点在同一个圆上
C. 它们的渐近线方程相同 D. 它们的离心率相等

5. 某学校上午安排上四节课, 每节课时间为 40 分钟, 第一节上课时间为 8:00 ~ 8:40, 课间休息 10 分钟. 某学生因故迟到, 若他在 9:10 ~ 10:00 之间到达教室, 则他听第二节课的时间不少于 10 分钟的概率为 ()

- A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{3}{10}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{4}{5}$

6. 已知 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x + y \geq 1 \\ x - y \geq -1 \\ 2x - y \leq 2 \end{cases}$, 若目标函数 $z = 2x - 3y$ 的最大值 ()

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

7. 下列命题中真命题是 ()

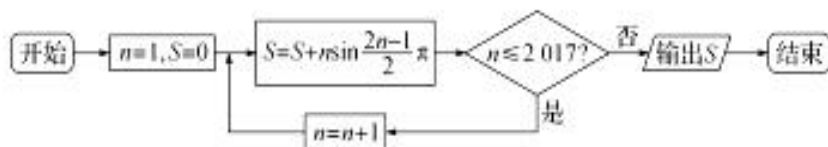
A. 命题 “存在 $x \in R, x^2 - x - 2 \geq 0$ ” 的否定是: “不存在 $x \in R, x^2 - x - 2 < 0$ ”

B. 线性回归直线 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 恒过样本中心 $(\bar{x}, \bar{y})$, 且至少过一个样本点.

C. 存在 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, 使 $\sin x + \cos x = \frac{1}{3}$.

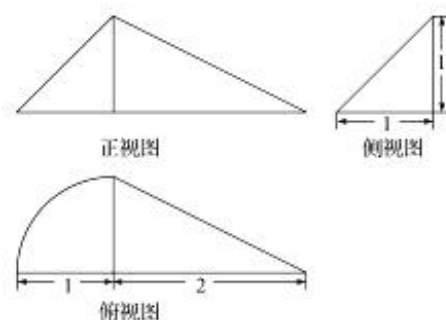
D. 函数 $f(x) = x^{\frac{1}{3}} - (\frac{1}{2})^x$ 的零点在区间 $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ 内.

8. 执行如图所示的程序框图, 则输出的 S 值为 ()



- A. 1009 B. -1009 C. -1007 D. 1008

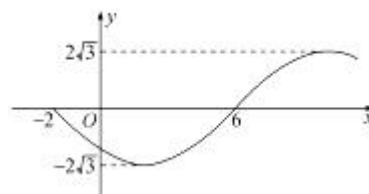
9. 已知一几何体的三视图如图所示, 则该几何体的体积为 ()



- A. $\frac{\pi}{6} + \frac{1}{3}$ B. $\frac{\pi}{12} + 1$ C. $\frac{\pi}{12} + \frac{1}{3}$ D. $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{3}$

10. 已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \pi$) 的部分图象如图所示, 则函数 $g(x) = A \cos(\varphi x + \omega)$ 图象的一个对称中心可能为 ()

- A. $(-\frac{5}{2}, 0)$ B. $(\frac{1}{6}, 0)$ C. $(-\frac{1}{2}, 0)$ D. $(-\frac{11}{6}, 0)$



11. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 若 P 为

其上一点, 且 $|PF_1| = 2|PF_2|$, $\angle F_1PF_2 = \frac{\pi}{3}$, 则双曲线的离心率为 ()

- A. $\sqrt{2}$ B. 2 C. $\sqrt{3}$ D. 3

12. 已知 $f(x) = \begin{cases} a - x^2 - 2x & (x < 0) \\ e^{|x-1|} & (x \geq 0) \end{cases}$, 且函数 $y = f(x) - 1$ 恰有 3 个不同的零点, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $[-1, +\infty)$ B. $[-2, 0)$ C. $(-2, +\infty)$ D. $(0, 1)$

二、填空题 (每题 5 分, 满分 20 分。)

13. 已知 $\vec{a} = (1, \lambda)$, $\vec{b} = (2, 1)$, 若向量 $2\vec{a} + \vec{b}$ 与 $\vec{c} = (8, 6)$ 共线, 则 $|\vec{a}| =$ _____.

14. 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, $a_1 = f(x+1), a_2 = 0, a_3 = f(x-1)$, 若 $f(x) = x^2 - 4x + 2$, 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n =$ _____;

15. 已知 $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$, $a=3, B=\frac{\pi}{3}$, 则 $b=$ _____.

16. 已知 A, B, C 三点在球心为 O 的球面上, $AB = AC = 2, \angle BAC = 90^\circ$, 球心 O 到平面 ABC 的距离为 $\sqrt{2}$, 则球 O 的表面积为 _____.

三、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分.）

17. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A 、 B 、 C 所对的边分别为 a 、 b 、 c ,

向量 $\mathbf{m} = (\sin B + \sin C, \sin A - \sin B)$, $\mathbf{n} = (\sin B - \sin C, \sin A)$, 且 $\mathbf{m} \perp \mathbf{n}$. [来源: 学科网 ZXXK]

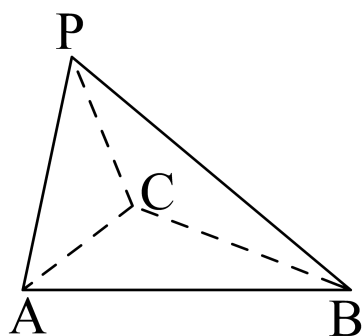
(I) 求角 C 的大小;

(II) 若 $\sin A = \frac{4}{5}$, 求 $\cos B$ 的值.

18. 如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, 平面 $PAC \perp$ 平面 ABC , $\triangle PAC$ 是等边三角形. 已知 $BC = 2AC = 8$, $AB = 4\sqrt{5}$.

(I) 证明: 平面 $PBC \perp$ 平面 PAC ;

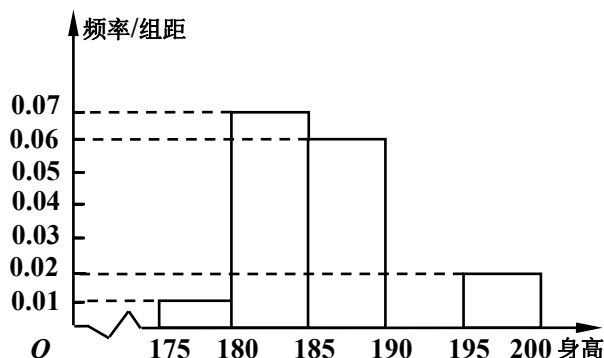
(II) 设 M 是棱 PA 上的任意一点, 当 $\triangle MBC$ 的面积最小时, 试求点 M 到平面 PBC 的距离.



19. 某大学体育学院在 2012 年新招收的大一学生中, 随机抽取了 40 名男生, 他们的身高 (单位: cm) 情况共分成五组: 第 1 组 $[175, 180)$, 第 2 组 $[180, 185)$, 第 3 组 $[185, 190)$, 第 4 组 $[190, 195)$, 第 5 组 $[195, 200]$. 得到的频率分布直方图 (局部) 如图所示, 同时规定身高在 185cm 以上 (含 185cm) 的学生才能成为组建该校男子篮球队的“预备生”.

(I) 求第四组的频率, 并将频率分布直方图补充完整;

(II) 在抽取的 40 名学生中, 用分层抽样的方法从“预备生”和“非预备生”中选出 5 人, 再从这 5 人中随机选 2 人, 那么至少有一人是“预备生”的概率是多少?



20. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 点 $Q\left(b, \frac{a}{b}\right)$ 在椭圆上, O 为坐标原点.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 已知点 P, M, N 为椭圆 C 上的三点, 若四边形 $OPMN$ 为平行四边形, 证明四边形 $OPMN$ 的面积 S 为定值, 并求该定值.

21. 已知函数 $f(x) = 2m \ln x - x$, $g(x) = \frac{3e^x - 3}{x^2}$ ($m \in \mathbb{R}$, e 为自然对数的底数).

(1) 试讨论函数 $f(x)$ 的极值情况;

(2) 证明: 当 $m > 1$ 且 $x > 0$ 时, 总有 $g(x) + 3f'(x) > 0$.

22. 已知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = 4 + \frac{\sqrt{2}}{2}t, \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$ (t 为参数), 以坐标原点为极点, x 轴的非负半轴为极轴建立极坐标

系, 圆 C 的极坐标方程为 $\rho = 4 \cos \theta$, 直线 l 与圆 C 交于 A, B 两点.

(1) 求圆 C 的直角坐标方程及弦 AB 的长;

(2) 动点 P 在圆 C 上 (不与 A, B 重合), 试求 $\triangle ABP$ 的面积的最大值.

数学试题答案

一、选择题：本大题共 12 个小题，每小题 5 分，共 60 分。

1. D 2. C 3. A 4. D 5. A 6. A 7. D 8. B 9. C 10. C 11. C 12. D

二、填空题（每题 5 分，满分 20 分。）

13. $\sqrt{2}$

14. $-2n+4$ 或 $2n-4$

15. 【答案】 $\sqrt{7}$

16. 16π

三、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分。）

17. 试题分析：(1)利用 $\vec{m} \cdot \vec{n} = 0$, 得到关于角的正弦关系, 利用正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$, 将角化成边, 利用余弦定理, 得到 $\cos C$, 得到角 C 的大小;

(2) $\cos B = \cos[180^\circ - (A + C)] = -\cos(A + C) = -\cos A \cos C + \sin A \sin C$, 还有一个比较关键的地方, 就是要比较角 C, A 的大小, 根据角 C, A 的正弦值, 比较大小, 结合正弦定理, 大边对大角, 判断 $\cos A$ 的正负, 求出 $\cos B$. 此题比较基础.

试题解析：(1)由 $m \perp n$ 可得 $m \cdot n = \sin^2 B - \sin^2 C + \sin^2 A - \sin A \sin B = 0$ 2 分

由正弦定理, 得 $b^2 - c^2 + a^2 - ab = 0$, 即 $a^2 + b^2 - c^2 = ab$. 4 分

再结合余弦定理得, $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{ab}{2ab} = \frac{1}{2}$.

因此 $0 < C < \pi$, 所以 $C = \frac{\pi}{3}$. 6 分

(2)因此 $\sin C = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{75}}{10} > \frac{\sqrt{64}}{10} = \frac{4}{5} = \sin A$,

所以由正弦定理知 $c > a$, 则 $\frac{\pi}{3} = C > A$, 故 $\cos A = \frac{3}{5}$. 9 分

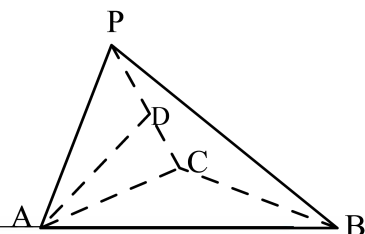
所以 $\cos B = -\cos(A + C) = \sin A \sin C - \cos A \cos C = \frac{4\sqrt{3}-3}{10}$. 12 分

考点：1. 正弦定理和余弦定理；2. 解斜三角形.

18. 解：(I) 在 $\triangle ABC$ 中, $AC=4, BC=8, AB=4\sqrt{5}$

$\therefore AC^2 + BC^2 = AB^2$, 故 $AC \perp BC$ -----2 分

又平面 $PAC \perp$ 平面 ABC , 平面 $PAC \cap$ 平面 $ABC = AC$, $\therefore BC \perp$ 平面 PAC



$BC \subset \text{平面 } PBC$, $\therefore \text{平面 } PBC \perp \text{平面 } PAC$ -----4 分

(II) 无论在何处, $MC \subset \text{平面 } PAC$, $BC \perp \text{平面 } PAC$, 所以 $\triangle MBC$ 总为直角三角形. -----6 分

$\therefore S_{\triangle MBC} = \frac{1}{2} BC \cdot MC$, 当 $\triangle MBC$ 的面积最小时, 只需 MC 最短.

-----8 分

又 $\triangle PAC$ 是等边三角形, 所以 M 在 PA 中点时, MC 最短, 此时点 M 到平面 PBC 的距离是点 A 到平面 PBC 的距离的一半. -----10 分

由 (I) 平面 $PBC \perp \text{平面 } PAC$; 所以过 A 作 PC 的垂线 AD , 即为等边三角形 PAC 的高即为 A 到平面 PBC 的距离, $AD = 2\sqrt{3}$, 所以点 M 到平面 PBC 的距离是 $\sqrt{3}$. -----12 分

19. (12 分) 解: (I) 其它组的频率为

$$(0.01 + 0.07 + 0.06 + 0.02) \times 5 = 0.8, \quad \text{[来源: 2016.12]}$$

所以第四组的频率为 0.24 分

(II) 解法一: 依题意“预备生”与“非预备生”的人数比为 3:2, 所以采用分层抽样的方法抽取的 3 名“预备生”记为 a, b, c , 2 名“非预备生”为 m, n . 则基本事件是

$(a, b), (a, c), (a, m), (a, n), (b, c), (b, m), (b, n), (c, m), (c, n), (m, n)$ 共 10 个。其中满足至少有一人是“预备生”的基本事件有 9 个, 故所求的概率为 $P = \frac{9}{10}$. -----12 分

解法二: 依题意“预备生”与“非预备生”的人数比为 3:2, 所以采用分层抽样的方法抽取的 3 名“预备生”记为 a, b, c , 2 名“非预备生”为 m, n . 则基本事件是

$(a, b), (a, c), (a, m), (a, n), (b, c), (b, m), (b, n), (c, m), (c, n), (m, n)$ 共 10 个。其中 2 名都是“非预备生”的基本事件有 1 个, 故所求的概率为 $P = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$. -----12 分

20.

解: (1) 因为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$,

所以 $e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{1}{2}$, 得 $a^2 = 2b^2$, ①

又点 $Q\left(b, \frac{a}{b}\right)$ 在椭圆 C 上,

所以 $\frac{b^2}{a^2} + \frac{a^2}{b^4} = 1$, ②

联立①、②得 $a^2 = 8$, 且 $b^2 = 4$.

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$.

(2) 当直线 PN 的斜率 k 不存在时, PN 的方程为 $x = \sqrt{2}$ 或 $x = -\sqrt{2}$, 从而有 $|PN| = 2\sqrt{3}$, $S = \frac{1}{2} |PN| \cdot |OM| = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3}$

当直线 PN 的斜率 k 存在时

设直线 PN 的方程为 $y=kx+m(m \neq 0)$

$P(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$

将 PN 的方程代入 C 整理得 $(1+2k)x^2+4kmx+2m^2-8=0$

所以 $x_1+x_2 = x = \frac{-4km}{1+2k^2}$, $x_1 \cdot x_2 = x = \frac{2m^2-8}{1+2k^2}$

$$y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2m=\frac{2m}{1+2k^2}$$

由 $\vec{OM}=\vec{OP}+\vec{ON}$,

$$\text{得 } M\left(\frac{-4km}{1+2k^2}, \frac{2m}{1+2k^2}\right).$$

将 M 点坐标代入椭圆 C 方程得 $m^2=1+2k^2$.

又点 O 到直线 PN 的距离为 $d=\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}$,

$$|PN|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|,$$

$$S=d \cdot |PN|=|m| \cdot |x_1-x_2|=\sqrt{1+2k^2} \cdot |x_1-x_2|=\sqrt{16k^2-8m^2+32}=2\sqrt{6}.$$

综上所述, 平行四边形 OPMN 的面积 S 为定值 $2\sqrt{6}$.

$$\times 2\sqrt{2}=2\sqrt{6};$$

21. 已知函数 $f(x)=2m \ln x-x$, $g(x)=\frac{3e^x-3}{x^2}$ ($m \in \mathbb{R}$, e 为自然对数的底数).

(1) 试讨论函数 $f(x)$ 的极值情况;

(2) 证明: 当 $m>1$ 且 $x>0$ 时, 总有 $g(x)+3f'(x)>0$.

21. (1) 解: $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$$f'(x)=\frac{2m}{x}-1=-\frac{x-2m}{x}.$$

①当 $m \leq 0$ 时, $f'(x)<0$, 故 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调递减, $f(x)$ 无极值;

②当 $m>0$ 时, 令 $f'(x)>0$, 得 $0<x<2m$;

令 $f'(x)<0$, 得 $x>2m$.

故 $f(x)$ 在 $x=2m$ 处取得极大值, 且极大值为 $f(2m)=2m \ln(2m)-2m$, $f(x)$ 无极小值.

(2) 当 $x>0$ 时, $g(x)+3f'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{3e^x-3}{x^2}+\frac{6m}{x}-3>0 \Leftrightarrow 3e^x-3x^2+6mx-3>0$.

设函数 $u(x) = 3e^x - 3x^2 + 6mx - 3$,

则 $u'(x) = 3(e^x - 2x + 2m)$. 记 $v(x) = e^x - 2x + 2m$,

则 $v'(x) = e^x - 2$.

当 x 变化时, $v'(x)$, $v(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(0, \ln 2)$	$\ln 2$	$(\ln 2, +\infty)$
$v'(x)$	-	0	+
$v(x)$	单调递减	极小值	单调递增

由上表可知 $v(x) \geq v(\ln 2)$,

而 $v(\ln 2) = e^{\ln 2} - 2\ln 2 + 2m = 2 - 2\ln 2 + 2m = 2(m - \ln 2 + 1)$,

由 $m > 1$, 知 $m > \ln 2 - 1$,

所以 $v(\ln 2) > 0$,

所以 $v(x) > 0$, 即 $u'(x) > 0$.

所以 $u(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内为单调递增函数.

所以当 $x > 0$ 时, $u(x) > u(0) = 0$.

即当 $m > 1$ 且 $x > 0$ 时, $3e^x - 3x^2 + 6mx - 3 > 0$.

所以当 $m > 1$ 且 $x > 0$ 时, 总有 $g(x) + 3f'(x) > 0$.

22. 解: (1) 由 $\rho = 4\cos\theta$ 得 $\rho^2 = 4\rho\cos\theta$,

所以 $x^2 + y^2 - 4x = 0$,

所以圆 C 的直角坐标方程为 $(x-2)^2 + y^2 = 4$.

将直线 l 的参数方程代入圆 $C: (x-2)^2 + y^2 = 4$, 并整理得 $t^2 + 2\sqrt{2}t = 0$,

解得 $t_1 = 0$, $t_2 = -2\sqrt{2}$.

所以直线 l 被圆 C 截得的弦长为 $|t_1 - t_2| = 2\sqrt{2}$.

(2) 直线 l 的普通方程为 $x - y - 4 = 0$.

圆 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 + 2\cos\theta, \\ y = 2\sin\theta, \end{cases}$ (θ 为参数),

可设圆 C 上的动点 $P(2+2\cos\theta, 2\sin\theta)$,

则点 P 到直线 l 的距离 $d = \frac{|2+2\cos\theta-2\sin\theta-4|}{\sqrt{2}} = |2\cos(\theta+\frac{\pi}{4})-\sqrt{2}|$.

当 $\cos(\theta+\frac{\pi}{4}) = -1$ 时, d 取最大值, 且 d 的最大值为 $2+\sqrt{2}$,

所以 $S_{\triangle ABP} \leq \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times (2+\sqrt{2}) = 2+2\sqrt{2}$,

即 $\triangle ABP$ 的面积的最大值为 $2+\sqrt{2}$.