

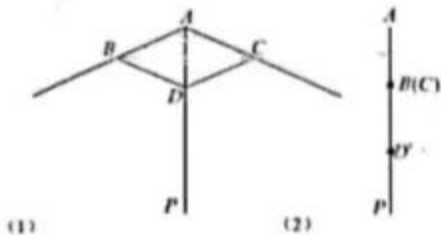
## 数 学

(高 21 级) 2023.08

## 第一部分 (选择题 共 40 分)

一、选择题 共 10 小题, 每小题 4 分, 共 40 分。在每小题列出的四个选项中, 选出符合题目要求的一项。

- (1) 不等式  $(1-x)(2+x) > 0$  的解集为  
 (A)  $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$  (B)  $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$   
 (C)  $(-1, 2)$  (D)  $(-2, 1)$
- (2) 在  $(x^2 - \frac{1}{x})^6$  的展开式中, 常数项为  
 (A) 15 (B) -15 (C) 20 (D) -20
- (3) 已知  $\{a_n\}$  为等差数列,  $S_n$  为其前  $n$  项和,  $a_2 = -1$ ,  $S_5 - S_3 = 8$ , 则  $S_9 =$   
 (A) 36 (B) 45 (C) 54 (D) 63
- (4) 已知  $f(x) = \frac{9^x - 1}{3^x}$ , 则  
 (A)  $f(x)$  为偶函数, 且在  $(0, +\infty)$  上单调递增  
 (B)  $f(x)$  为偶函数, 且在  $(0, +\infty)$  上单调递减  
 (C)  $f(x)$  为奇函数, 且在  $(0, +\infty)$  上单调递增  
 (D)  $f(x)$  为奇函数, 且在  $(0, +\infty)$  上单调递减
- (5) 若直线  $y = kx + 2$  把圆  $x^2 + y^2 = 4$  分成长度为 1: 2 的两段圆弧, 则  $k =$   
 (A)  $\pm \frac{\sqrt{3}}{3}$  (B)  $\pm \frac{\sqrt{3}}{2}$  (C)  $\pm 1$  (D)  $\pm \sqrt{3}$
- (6) 已知  $a, b$  为平面上的单位向量, “ $a \perp b$ ” 是 “ $|3a + 2b| = |2a - 3b|$ ” 的  
 (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件  
 (C) 充分必要条件 (D) 既不必要又不充分条件
- (7) 在  $\triangle ABC$  中,  $a = 4\sqrt{2}$ ,  $A = 45^\circ$ ,  $b = m$ , 若满足条件的  $\triangle ABC$  有两个, 则  $m$  的可能取值为  
 (A) 8 (B) 6 (C) 4 (D) 2
- (8) 已知抛物线  $y^2 = 2px (p > 0)$  的焦点为  $F$ , 点  $P$  是抛物线准线上一动点, 作线段  $PF$  的垂直平分线  $l$ , 则直线  $l$  与抛物线公共点个数的可能值构成的集合为  
 (A)  $\{0\}$  (B)  $\{1\}$  (C)  $\{0, 1\}$  (D)  $\{1, 2\}$
- (9) 我国油纸伞的制作工艺巧妙。如图(1), 伞不管是张开还是收拢, 伞柄  $AP$  始终平分同一平面内两条伞骨所成的角  $\angle BAC$ , 且  $AB = AC$ , 从而保证伞圈  $D$  能够沿着伞柄滑动。如图(2), 伞完全收拢时, 伞圈  $D$  已滑动到  $D'$  的位置, 且  $A, B, D'$  三点共线,  $AD' = 40\text{cm}$ ,  $B$  为  $AD'$  中点, 当伞从完全张开到完全收拢, 伞圈  $D$  沿着伞柄向下滑动的距离为  $24\text{cm}$ , 则当伞完全张开时,  $\angle BAC$  的余弦值为



(A)  $-\frac{17}{25}$

(B)  $-\frac{4\sqrt{21}}{25}$

(C)  $-\frac{3}{5}$

(D)  $-\frac{8}{25}$

(10) 已知函数  $f(x) = \sin \omega x + \frac{x-2}{x+2}$  ( $\omega > 0$ ) 在  $[0, 2]$  上恰有 4 个不同的零点, 则实数  $\omega$  的取值范围为

(A)  $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$

(B)  $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$

(C)  $(2\pi, \frac{5}{2}\pi]$

(D)  $[2\pi, \frac{5}{2}\pi)$

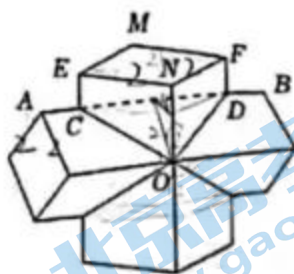
## 第二部分 (非选择题 共 110 分)

二、填空题 共 5 道小题, 每小题 5 分, 共 25 分.

(11) 双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{36} = 1$  ( $a > 0$ ) 的渐近线方程为  $y = \pm 2x$ , 则  $a =$  \_\_\_\_\_.

(12) 已知复数  $z$  满足  $z(1+i) = 2+2z$ , 则  $z$  在复平面的对应点的坐标为 \_\_\_\_\_.

(13) “十字贯穿体”是由两个完全相同的正四棱柱“垂直贯穿”构成的多面体, 其中一个四棱柱的每一条侧棱分别垂直于另一个四棱柱的每一条侧棱, 两个四棱柱分别有两条相对的侧棱交于两点, 另外两条相对的侧棱交于一点 (该点为所在棱的中点). 若某“十字贯穿体”由两个底面边长为 2, 高为  $3\sqrt{2}$  的正四棱柱构成, 如图所示, 则该“十字贯穿体”的体积为 \_\_\_\_\_.



14. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} |x+m|, & x \leq m, \\ x^2, & x > m. \end{cases}$

① 函数  $f(x)$  的零点个数为 \_\_\_\_\_.

② 若存在实数  $b$ , 使得关于  $x$  的方程  $f(x) = b$  有三个不同的根, 则实数  $m$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.

(15) 已知无穷项数列  $\{a_n\}$  满足:  $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ),  $a_1, a_2$  为有理数, 给出下列四个结论:

① 若  $a_3 > a_2 > a_1$ , 则数列  $\{a_n\}$  单调递增;

② 数列  $\{a_n\}$  可能为等比数列;

③ 若存在  $k_0 \in \mathbb{N}^*$ ,  $k_0 \geq 3$ ,  $a_{k_0} = 0$ , 则对于任意  $n \leq k_0 - 2$ , 总有  $a_n a_{n+1} \leq 0$ .

④ 若存在  $M > 0$ , 对于任意  $n \in \mathbb{N}^*$ , 总有  $|a_n| < M$ , 则  $a_n = 0$ .

其中全部正确结论的序号为 \_\_\_\_\_.

关注北京高考在线官方微信: 京考一点通 (微信号:bjgkzx), 获取更多试题资料及排名分析信息。



三、解答题 共 6 道小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

(16)(本小题 13 分)

已知函数  $f(x) = \cos(2x - \frac{\pi}{3}) + 2\cos^2 x$ .

(I) 求  $f(\frac{\pi}{4})$  的值;

(II) 求函数  $f(x)$  的单调递增区间.

(17)(本小题 14 分)

如图，在三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中， $CC_1 \perp$  平面  $ABC$ ， $AC = BC = 2$ ， $CC_1 = 3$ ，点  $D$ ， $E$  分别在棱  $AA_1$  和棱  $CC_1$  上，且  $AD = 1$ ， $CE = 2$ ， $M$  为棱  $A_1B_1$  的中点.

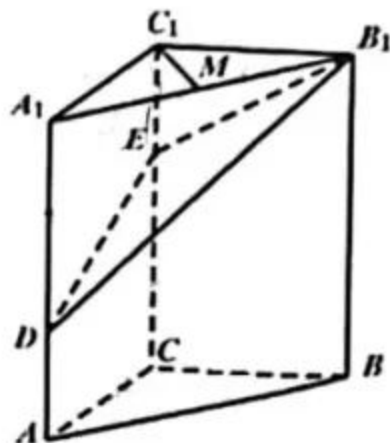
(I) 求证： $C_1M \parallel$  平面  $B_1DE$ ;

(II) 从下面两个选项中选择 一个作为条件，

求二面角  $A - DE - B_1$  的余弦值.

①  $DE \perp BC$ ;

②  $C_1M = \sqrt{2}$ .



(18)(本小题 13 分)

为了调查居民对垃圾分类的了解程度，某社区居委会从 A 小区与 B 小区各随机抽取 300 名社区居民（分为 18-40 岁、41 岁-70 岁及其他人群各 100 名）参与问卷测试，按测试结果将居民对垃圾分类的了解程度分为“比较了解”（得分不低于 60 分）和“不太了解”（得分低于 60 分），并将问卷得分不低于 60 分绘制频数分布表如下

分组	A 小区频数	B 小区频数
18-40 岁人群	60	30
41-70 岁人群	80	90
其他人群	30	50

假设用频率估计概率，所有居民的问卷测试结果互不影响.

(I) 从 A 小区随机抽取一名居民参与问卷测试，估计其对垃圾分类比较了解的概率;

(II) 从 A、B 小区 41-70 岁人群中各随机抽取一名居民，记其对垃圾分类比较了解的居民人数为随机变量  $X$ ，求  $X$  的分布列和数学期望;

(III) 设事件  $E$  为“从 A 小区的三个年龄组随机抽取两组，且每个年龄组各随机抽取一名居民，则这两名居民均为对垃圾分类比较了解”，设事件  $F$  为“从 B 小区的三个年龄组随机抽取两组，且每个年龄组各随机抽取一名居民，则这两名居民均为对垃圾分类比较了解”，试比较事件  $E$  发生的概率  $P(E)$  与事件  $F$  发生的概率  $P(F)$  的大小，并说明理由.

(19)(本小题 15 分)

已知椭圆  $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ , 其离心率  $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$ , 长轴长为 6.

(I) 求椭圆  $E$  的标准方程;

(II) 椭圆  $E$  的上下顶点分别为  $A, B$ , 右顶点为  $C$ , 过点  $A$  的直线  $l$  与椭圆  $E$  的另一个交点为  $P$ , 点  $Q$  与点  $P$  关于  $x$  轴对称, 直线  $AP$  交  $BC$  于  $M$ , 直线  $AQ$  交  $BC$  于点  $N$ , 点  $T(6, -2)$ , 求证:  $|AM| = |TN|$ .

(20)(本小题 15 分)

已知函数  $f(x) = e^{ax} + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + b$ , 且曲线  $y = f(x)$  在  $x = 0$  处与  $x$  轴相切.

(I) 求  $a, b$  的值;

(II) 令  $g(x) = f'(x)$ , 证明函数  $g(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增;

(III) 求  $f(x)$  的极值点个数.

(21)(本小题 15 分)

对于数集  $X = \{-1, x_1, x_2, \dots, x_n\} (n \geq 2$  为给定的正整数), 其中  $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$ , 如果对任意  $a, b \in X$ , 都存在  $c, d \in X$ , 使得  $ac + bd = 0$ , 则称  $X$  具有性质  $P$ .

(I) 若  $0 < x < \frac{1}{2}$ , 且集合  $\{-1, x, \frac{1}{2}, 1\}$  具有性质  $P$ , 求  $x$  的值;

(II) 若  $X$  具有性质  $P$ , 求证:  $1 \in X$ ; 且若  $x_n > 1$  成立, 则  $x_1 = 1$ ;

(III) 若  $X$  具有性质  $P$ , 且  $x_n = 2023$ , 求数列  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的通项公式.

## 关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜



京考一点通