2020年中国数学奥林匹克希望联盟夏令营试题（三）

四川•成都

考试时间：2020年8月26日 8:00—9:20

一、填空题（本大题共8道小题，每小题8分）

1.在 ΔABC 中，若 $\tan A\tan B=\tan A\tan C+\tan C\tan B$，则 $\frac{a^2+b^2}{c^2}=$________.

【解析】已知的等式可化为：$\frac{\sin A\sin B}{\cos A\cos B}=\frac{\sin A\sin C}{\cos A\cos C}+\frac{\sin B\sin C}{\cos B\cos C}$，

同乘以 cosAcosBcosC 得 sinAsinBcosC=sinC(sinAcosB+cosAsinB)=sin2C.

所以 $ab\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=c^2$，即 $a^2+b^2=3c^2$，故，原式=3.

2.数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\sqrt{2}$，$a_{n+1}=\frac{2-\sqrt{3}+a_n}{1-2a_n+\sqrt{3}a_n}$，$a_{145}=$________

【解析】令 $a_n=\tan b_n$，则 $\tan b_{n+1}=\frac{\tan 15^\circ+\tan b_n}{1-\tan 15^\circ\tan b_n}=\tan(b_n+15^\circ)$，故

$a_{n+12}=a_n,a_{145}=a_1=\sqrt{2}$

3.函数 $f(x)=\sqrt{x^2+(\frac{x^2}{4}-2)^2}+\sqrt{x^2+(\frac{x^2}{4}-1)^2}$ 的最小值为________

【解析】$f(x)=\sqrt{x^2+(\frac{x^2}{4}-2)^2}+\sqrt{x^2+(\frac{x^2}{4}-1)^2}$ 看做 $x^2=4y$ 上的点到 $(0,2)$，$(0,1)$ 的距离，注意到 $(0,1)$ 是 $x^2=4y$ 的焦点，从而最小值为 $(0,2)$ 到 $x^2=4y$ 的准线 $y=-1$ 的距离,即 3.

4.如图,$\overrightarrow{AA_2}+\overrightarrow{BB_2}+\overrightarrow{CC_2}=\mathbf{0}$,且 $\frac{|AB_1|}{|B_1C|}=\frac{1}{4}$,则 $\frac{|AB_2|}{|B_2C_2|}=$______

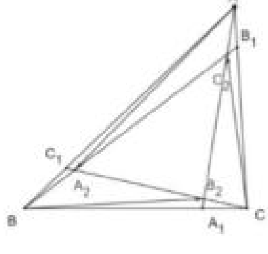
【解析】

$\overrightarrow{AA_2}+\overrightarrow{BB_2}+\overrightarrow{CC_2}=\mathbf{0}$，$\overrightarrow{A_2B_2}+\overrightarrow{B_2C_2}+\overrightarrow{C_2A_2}=\mathbf{0}$，

故 $\overrightarrow{AB_2}+\overrightarrow{BC_2}+\overrightarrow{CA_2}=\mathbf{0}$.

设 $\overrightarrow{AB_2}=k\overrightarrow{B_2C_2}$，$\overrightarrow{AB_2}=t\overrightarrow{C_2A_2}$，$\overrightarrow{CA_2}=s\overrightarrow{A_2B_2}$，

故 $k=s=t$,设 $\frac{CB_2}{CA_2}=\frac{AC_2}{AB_2}=\frac{BA_2}{BC_2}=\lambda$，



过 B_2 作 $B_2E//BB_1$,交 AC 于 E，$\frac{CE}{EB_1}=\frac{AB_1}{EB_1}$,故 $CE=AB_1$,$\frac{|AB_2|}{|B_2C_2|}=\frac{4}{3}$

5. 2020 个不同的小球放入 2020 个不同的盒子里，每个球落入各个盒子的可能性相同，不同小球之间落入盒子的可能性互不影响，则空盒子个数的期望为____________

【解析】定义随机变量 x_i，若第 i 个盒子有球则 $x_i=0$，否则 $x_i=1$. 则 $P(x_i=1)=\dfrac{2019^{2020}}{2020^{2020}}$，

$P(x_i=0)=1-\dfrac{2019^{2020}}{2020^{2020}}$，$E(x_i=1)=1\times\dfrac{2019^{2020}}{2020^{2020}}=\dfrac{2019^{2020}}{2020^{2020}}$.

设随机变量空盒子的个数为 $\xi=\sum\limits_{i=1}^{2020}x_i$，

$$E(\xi)=E(\sum_{i=1}^{2020}x_i)=\sum_{i=1}^{2020}E(x_i)=2020\times\frac{2019^{2020}}{2020^{2020}}=\frac{2019^{2020}}{2020^{2019}}$$

6.已知 $(1+x+x^2+x^3)^{400}=\sum\limits_{k=0}^{300}c_{4k}x^{4k}+\sum\limits_{k=0}^{299}c_{4k+1}x^{4k+1}+\sum\limits_{k=0}^{299}c_{4k+2}x^{4k+2}+\sum\limits_{k=0}^{299}c_{4k+3}x^{4k+3}$，

则 $\sum\limits_{k=0}^{300}c_{4k}=$____________

【解析】设 $\sum\limits_{k=0}^{300}c_{4k}=A_1$，$\sum\limits_{k=0}^{299}c_{4k+1}=A_2$，$\sum\limits_{k=0}^{299}c_{4k+2}=A_3$，$\sum\limits_{k=0}^{299}c_{4k+3}=A_4$.

令 $x=1,i,-1,-i$ 可得 $\begin{cases}4^{400}=A_1+A_2+A_3+A_4\\0=A_1+iA_2-A_3-iA_4\\0=A_1-A_2+A_3-A_4\\0=A_1-iA_2-A_3+iA_4\end{cases}$，解得 $A_1=A_2=A_3=A_4=4^{399}$

7.设正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，线段 MN 的端点 M 在射线 AA_1 上，N 在射线 BC 上，且 MN 与棱 C_1D_1 交于点 L，那么 MN 的最小值是______

【解析】设 $AM=x$，$BN=y$. 故 $MN=\sqrt{x^2+y^2+1}$. 又向平面 ABB_1 以及平面 ABC 做射影易知：$\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{y-1}{1}$，故 $x^2y^2\geq 4xy$ 进而 $xy\geq 4$. $MN=\sqrt{x^2+y^2+1}\geq\sqrt{2xy+1}\geq 3$. 等号成立当且仅当 $x=y=2$.

8.已知集合 $A=\{1,2,3,4,5,6\}$，映射 $f:A\to A$ 为一一映射. $f^{(2)}(x)=f(f(x))$

$f^{(n+1)}(x)=f(f^{(n)}(x)),x\geq 1$. 满足 $\forall x\in A,f^{(12)}(x)=x$ 的映射 f 的个数为______

【解析】$f:A\to A$ 的一一映射共有 $A_6^6=720$ 个. 若不满足 $\forall x\in A,f^{(12)}(x)=x$，

则必有 $\exists x\in A,f^{(5)}(x)=x$，且 $1\leq n\leq 4,f^{(n)}(x)\neq x$ ①；

满足①的情况共有$C_6^1\times A_4^4=144$个f.

故满足$\forall x\in A, f^{(12)}(x)=x$的共有$720-144=576$个.

二、解答题（本大题共3道小题，第9题16分，第10题20分，第11题20分）

9．已知椭圆$E:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，A为椭圆的右顶点，BC是E的不与x轴重合的弦,且过原点O.直线AB，AC分别交y轴于P,Q两点.

(1)求证：以PQ为直径的圆Γ至少过一个定点；

(2)设圆Γ与x轴点M,N（M在负半轴上，N在正半轴上），求直线PM与直线QN交点的T轨迹方程.

【解析】

(1) 设点$B(x_0,y_0)$，$C(-x_0,-y_0)$，$P(0,y_1)$，$Q(0,y_2)$，

则直线$AB:\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{y_1}=1$，带入点$B(x_0,y_0)$可得$y_1=\dfrac{2y_0}{2-x_0}$,同理有$y_2=\dfrac{-2y_0}{2+x_0}$；

$$y_1y_2=\frac{2y_0}{2-x_0}\cdot\frac{-2y_0}{2+x_0}=-\frac{y_0^2}{1-\frac{x_0^2}{4}}=-1$$ ………………………(5分)

即$|PO|\cdot|QO|=1$，

取点$M(-1,0)$，则$|PO|\cdot|QO|=|OM|^2$，从而$\angle PMQ=\dfrac{\pi}{2}$,故$M$以$PQ$为直径的圆$\Gamma$上是定点.同理可得$N(1,0)$也是圆$\Gamma$上的一个定点.

(2) 设直线$PM:y=k_1x+y_1$, $QN:y=k_2x+y_2$.

考虑到M在以PQ为直径的圆上,故$PM\perp QM$得,$k_1\cdot k_{QM}=-1$

由对称性易知$k_2=-k_{QM}$.从而$k_1\cdot k_2=1$.……………(15分)

设点$T(x_T,y_T)$，

则$k_1=k_{MT}=\dfrac{y_T-0}{x_T-(-1)}=\dfrac{y_T}{x_T+1}$，$k_2=k_{NT}=\dfrac{y_T-0}{x_T-1}=\dfrac{y_T}{x_T-1}$

$k_1\cdot k_2=\dfrac{y_T}{x_T-1}\cdot\dfrac{y_T}{x_T+1}=1$，

故$x_T^2-y_T^2=1$.注意到$x_T\neq\pm1$.

故点 T 的轨迹方程为 $x^2-y^2=1(x\neq\pm1)$,…

10.已知 $n(n>1)$ 是给定的正整数，记 $a_k=\left(\dfrac{n-k}{k}\right)^{k-\frac{n}{2}}$ ，$0<k\le n$，$k\in N$，求数列 $\{a_k\}$ 的最大值.

解：$\because \ln f(k)=\ln\left(\dfrac{n-k}{k}\right)^{k-\frac{n}{2}}=\left(k-\dfrac{n}{2}\right)\ln\dfrac{n-k}{k}=\dfrac{1}{2}(2k-n)\ln\dfrac{n-k}{k}$

$=\dfrac{1}{2}(k-(n-k))(\ln(n-k)-\ln k)=-\dfrac{1}{2}(k-(n-k))(\ln k-\ln(n-k))$

一方面知道，$k-(n-k)$ 与 $\ln k-\ln(n-k)$ 同号

当 $k>n-k$ 即 $k>\dfrac{n}{2}$ 时，$k-(n-k)$ 与 $\ln k-\ln(n-k)$ 均关于 k 单调递增且恒正，故 k 与 $\dfrac{n}{2}$ 越接近越小；

当 $k<n-k$ 即 $k<\dfrac{n}{2}$ 时，$k-(n-k)$ 与 $\ln k-\ln(n-k)$ 均关于 k 单调递增且恒负，故依然是 k 与 $\dfrac{n}{2}$ 越接近越小.这说明 k 取与 $\dfrac{n}{2}$ 最接近的正整数时，$(k-(n-k))(\ln k-\ln(n-k))$ 的值最小，即 $\ln f(k)$ 取得最大值也即 $f(k)$ 取得最大值

故当 $n\equiv1(\mathrm{mod}\,2)$ 时，$f(k)_{\max}=\max\left(f\left(\dfrac{n-1}{2}\right),f\left(\dfrac{n+1}{2}\right)\right)=\sqrt{\dfrac{n-1}{n+1}}$；

当 $n\equiv0(\mathrm{mod}\,2)$ 时，$f(k)_{\max}=f\left(\dfrac{n}{2}\right)=1$

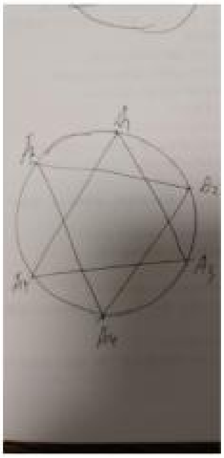
故 $n\equiv1(\mathrm{mod}\,2)$ 时 $\left(\dfrac{n-k}{k}\right)^k$ 的最大值是 $\left(\sqrt{\dfrac{n-1}{n+1}}\right)^{\frac{n}{2}}=\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{\frac{n}{4}}$；

$n\equiv0(\mathrm{mod}\,2)$ 时 $\left(\dfrac{n-k}{k}\right)^k$ 的最大值是 1

11. 设 $z_1, z_2, \cdots, z_6$ 是六个互不相同的复数，依次对应以 $O(0,0)$ 为圆心，r 为半径的圆上六个按顺时针方向排列的点 $A_1, A_2, \cdots, A_6$，若虚数 ω 满足 $\omega^3=1$，且 $z_1\omega^2+z_3\omega+z_5=0$，$z_2\omega^2+z_4\omega+z_6=0$

（1）判断 $\Delta A_1A_3A_5$ 的形状

（2）求证：$\sum\limits_{i=1}^{6}|z_i-z_{i+1}|=\sum\limits_{i=1}^{3}|z_i-z_{i+3}|$（其中 $z_7=z_1$）



3. 已知复数范围内,方程 $x^n-1=0$ 的 n 个根为 $z_0, z_1, \cdots, z_{n-1}$,其中 $z_0=1$,记 $\mathrm{Re}(z)$ 表示复数 z 的实部

(1)求 $\prod\limits_{k=1}^{n-1}|1-z_k|$ 的值;

(2)对 $0\leqslant k\leqslant n-1$，记 $g(k)=\lambda_1\mathrm{Re}(z_k)+\lambda_2\mathrm{Re}(z_k^2)+\cdots+\lambda_{n-1}\mathrm{Re}(z_k^{n-1})$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{n-1}\in\mathbb{R}$.

若对一切 $0\leqslant k\leqslant n-1, k\in\mathbb{Z}$,都有 $g(k)\geqslant -1$ 均成立,求证: $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{n-1}\leqslant n-1$.

解:(1) $x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)$，所以 $z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}$ 为方程 $x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1=0$ 的根.所以

$$(x-z_1)(x-z_2)\cdots(x-z_{n-1})=x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1$$

将 $x=1$ 代入,并两边同时取模,可得 $\prod\limits_{k=1}^{n-1}|1-z_k|=n-1$.

(2)记 $\theta=\dfrac{2\pi}{n}, \theta_k=k\theta, z_k=\cos\theta_k+\mathrm{i}\sin\theta_k$,所以

$$g(k)=\lambda_1\cos\theta_k+\lambda_2\cos 2\theta_k+\cdots\lambda_{n-1}\cos(n-1)\theta_k$$

又 $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\cos m\theta_k+\mathrm{i}\sin m\theta_k=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta_k}=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}mk\theta}=\dfrac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\cdot 2\pi}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\frac{2\pi}{n}}}=0$

所以 $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\cos m\theta_k=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\sin m\theta_k=0, (m=0,1,2,\cdots,n-1)$.

$$\begin{aligned}&g(0)+g(1)+\cdots+g(n-1)\\=&\lambda_1\cos 0+\lambda_2\cos(2\cdot 0)+\lambda_{n-1}\cos(n-1)\cdot 0+\\&\lambda_1\cos\theta_1+\lambda_2\cos 2\theta_1+\cdots+\lambda_{n-1}\cos(n-1)\theta_1+\\&\cdots\\&+\lambda_1\cos\theta_{n-1}+\lambda_2\cos 2\theta_{n-1}+\cdots+\lambda_{n-1}\cos(n-1)\theta_{n-1}\\=&\lambda_1\sum_{k=0}^{n-1}\cos\theta_k+\lambda_2\sum_{k=0}^{n-1}\cos 2\theta_k+\cdots+\lambda_n\sum_{k=0}^{n-1}(n-1)\cos\theta_k\\=&0\end{aligned}$$

又 $g(k)\geqslant -1,\forall 0\leqslant k\leqslant n-1$. 所以

$$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{n-1}=g(0)=-[g(1)+g(2)+\cdots+g(n-1)]\leqslant n-1.$$

2020 年中国数学奥林匹克希望联盟夏令营试题（三）

四川•成都

考试时间：2020 年 8 月 26 日 9:40—12:30

一、（本题满分 40 分） 对于和为 1 的非负实数 $x_0,x_1,\cdots,x_n$，约定 $x_{n+1}=x_1$，求下面表达式的最大值：

$$S=\sqrt{x_0+\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-x_{i+1})^2}{2n}}+\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}。$$

解析： 一方面，当 $x_0=x_1=\cdots=x_n=\frac{1}{n+1}$ 时，上式等于 $\sqrt{n+1}$，下证此为最大值。

注意到 $(\sqrt{x_i}+\sqrt{x_{i+1}})^2\leq 2(x_i+x_{i+1})\leq 2$，故 $\frac{(x_i-x_{i+1})^2}{2n}\leq\frac{(\sqrt{x_i}-\sqrt{x_{i+1}})^2}{n}$，进而：

$$\sqrt{x_0+\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-x_{i+1})^2}{2n}}\leq\sqrt{x_0+\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(\sqrt{x_i}-\sqrt{x_{i+1}}\right)^2}{n}}=\sqrt{1-[(1-\frac{2}{n})\sum_{i=1}^{n}x_i+\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_ix_{i+1}}]}$$

下面证明：$\left(1-\frac{2}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}x_i+\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_ix_{i+1}}\geq\frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i})^2$

实际上由均值不等式

$$(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i})^2-2\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_ix_{i+1}}=\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{i\geq j+2}2\sqrt{x_ix_j}\leq\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{i\geq j+2}(x_i+x_j)=(n-2)\sum_{i=1}^{n}x_i$$

可得显然成立;

记 $t=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}$,则由柯西不等式

$$S\le\sqrt{1-\frac{t^2}{n}}+t=\sqrt{1-\frac{t^2}{n}}\cdot1+\frac{t}{\sqrt{n}}\cdot\sqrt{n}\le\sqrt{1}\cdot\sqrt{1+n}=\sqrt{n+1}$$

综上,S 的最大值是 $\sqrt{n+1}$

二、(本题满分 40 分) 对不小于 2 的正整数 n,定义 $P(n)$ 是 n 的最大素因子.定义数列 $\{a_n\}:a_1\ge2,$

$$a_{n+1}=\begin{cases}a_n-P(a_n), & 若a_n有至少两个不同素因子,\\ a_n+P(a_n), & 若a_n为素数或素数的方幂.\end{cases}$$

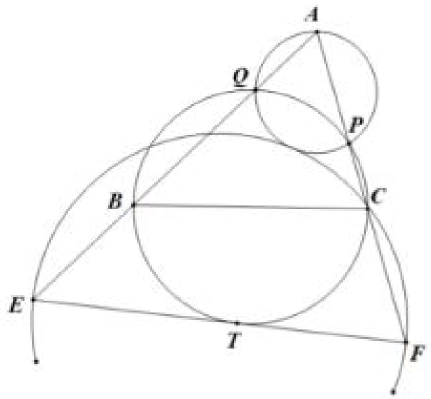
证明:数列 $\{a_n\}$ 是最终周期的,即存在正整数 N,T,使得对任意正整数 $n\ge N$,有 $a_{n+T}=a_n$.

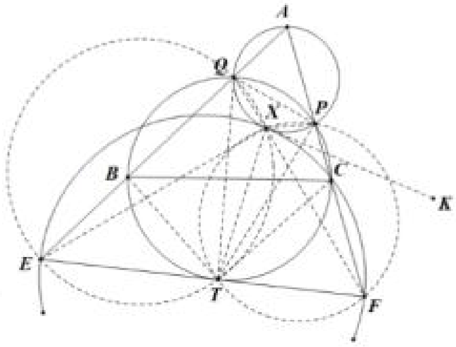
证明: 若 a_n 有至少两个不同素因子,$a_n-P(a_n)\ge2P(a_n)-P(a_n)\ge2$,因此该数列是良定义的.

当数列中某一项为 2 时,假设 $a_m=2$,则 $a_{m+1}=4,a_{m+2}=6,a_{m+3}=3,a_{m+4}=6,a_{m+5}=3$,从第 $m+2$ 项起是周期的.

当数列中任意一项均不为 2 时,若 $a_s=p^{\alpha}$,p 为素数,α 为正整数,则 $a_{s+1}=p^{\alpha}+p$,因此 $P(a_{s+1})\ge p$,由于 $p\ne2$,a_{s+1} 必不为素数或素数的方幂,从而 $a_{s+2}=a_{s+1}-P(a_{s+1})\le a_s$.若 a_s 不为素数或者素数方幂时,由题意 $a_{s+1}<a_s$.因此我们总能找到一个正整数序列满足 $n_1<n_2<n_3\cdots$,使得 $a_{n_1}\ge a_{n_2}\ge a_{n_3}\ge\cdots$,由数列 $\{a_n\}$ 有下界及正整数的离散性可知存在 $i,j\in N,i<j$,使得 $a_i=a_j$,那么记 $N=i,T=j-i$,则对任意正整数 $n\ge N$,有 $a_{n+T}=a_n$.证毕!

三、(本题满分 50 分). 锐角三角形 ABC 中,以 BC 为直径的圆 ω 交线段 AB,AC 于 Q,P(异于 B,C),T 为圆 ω 下半圆上一点,过 T 作 ω 的切线交射线 AB,AC 于 E,F. 证明:以 EF 为直径的圆与三角形 APQ 的外接圆相切.





证明：设三角形 ETQ 和三角形 FTP 的外接圆交于另一点 X．

那么 $\angle EXF=\angle EQT+\angle FPT=180^\circ-\angle BTC=90^\circ$，所以 X 在以 EF 为直径的圆上．

另一方面 $\angle QXP=2\pi-\angle TXQ-\angle TXP=\angle QET+\angle PFT=\pi-\angle A$，所以 X 在三角形 APQ 的外接圆上．

过 X 作圆（EF）的切线，则

$\angle KXP=\angle PXF-\angle KXF$

$=\angle PTF-\angle XEF$

$=\angle PTF-\angle XQT$

$=\angle PQT-\angle XQT$

$=\angle XQP$

这说明 KX 也是三角形 APQ 外接圆的切线，故以 EF 为直径的圆与三角形 APQ 的外接圆相切．

四、（本题满分 50 分）有 2023 个顶点的完全图（即任意两个点之间均有连线），现将每条边进行染色，有公共点的任意两条边颜色不同，定义每个点所连出的边的颜色为一个颜色集，求不同颜色集个数的最小值．

解析：设最小值为 k．下证 $k=3$．

（1）若 $k=1$，考虑其中任意一种颜色 S，记 A 为连出边的颜色为 S 的点的集合，一方面，由于每个点所对应的颜色集相同，则 $|A|=2023$；另一方面，由于公共点的任意两条边颜色不同，$|A|$ 为偶数，矛盾．

（2）若 $k=2$，设其中一个颜色集所对应的点为 $a_1,a_2,\cdots,a_m$，另一个颜色集所对应的点为 $b_1,b_2,\cdots,b_{2023-m}$．考虑 a_1 和 b_1 两点间的颜色 T，则 T 同时出现在两个颜色集中，记 B 为连出边的颜色为 T 的点的集合，同（1）可知矛盾．

（3）下给出 $k=3$ 的构造：

记 2023 个点为 $a_1,a_2,\cdots,a_{1011};b_1,b_2,\cdots,b_{1011};c$．

令 $a_ia_j(i\neq j)$ 颜色为 $x_{i+j(\bmod 1011)}$，a_ib_j 颜色为 $y_{i+j(\bmod 1011)}$，a_ic 颜色为 $x_{2i(\bmod 1011)}$；

$b_ib_j(i\neq j)$ 颜色为 $z_{i+j(\bmod 1011)}$，b_ic 颜色为 $z_{2i(\bmod 1011)}$．

对于 $\forall a_i(1\le i\le 1011)$，其所对颜色集为 $\{x_1,x_2,\cdots,x_{1011},y_1,y_2,\cdots,y_{1011}\}$．

对于 $\forall b_i(1\le i\le 1011)$，其所对颜色集为 $\{z_1,z_2,\cdots,z_{1011},y_1,y_2,\cdots,y_{1011}\}$.

对于 c，其所对颜色集为 $\{x_1,x_2,\cdots,x_{1011},z_1,z_2,\cdots,z_{1011}\}$.

综上所述，$k=3$.