河北衡水中学2020届全国高三第一次联合考试

文科数学

命题单位:河北衡水中学　天舟教科院

成绩查询网址:youngdale.onlyets.com　　成绩查询微信公众号:ruiya2006

本试卷4页。满分150分。考试时间120分钟。

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上相应的位置。
2. 全部答案在答题卡上完成,答在本试卷上无效。
3. 回答选择题时,选出每小题答案后,用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案用0.5 mm黑色笔迹签字笔写在答题卡上。
4. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合$A=\{x\in\mathbf{N}|x<6\}$,$B=\{y|y=2^x,x\in A\}$,则$A\cap B$中元素的个数是

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

2. 已知复数z满足$z(1+i)=1+3i$,其中i是虚数单位,设$\bar{z}$是z的共轭复数,则$\bar{z}$的虚部是

A. i　　B. 1　　C. $-i$　　D. -1

3. 等差数列$\{a_n\}$中,S_n为$\{a_n\}$的前n项和,若a_2,a_4是关于x的一元二次方程$x^2-4x+2=0$的两个根,则$S_5=$

A. 5　　B. 10　　C. 12　　D. 15

4. 若$f(x)=e^x+ae^{-x}$是定义在$\mathbf{R}$上的奇函数,则曲线$y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程是

A. $y=-x$　　B. $y=x$　　C. $y=-2x$　　D. $y=2x$

5. 已知$\odot O$的半径为1,A,B为圆上两点,且劣弧AB的长为1,则弦AB与劣弧AB所围成图形的面积为

A. $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sin 1$　　B. $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 1$　　C. $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}$

6. 某校为提高学生的身体素质,实施"每天一节体育课",并定期对学生进行体能测验.在一次体能测验中,某班甲、乙、丙三位同学的成绩(单位:分)及班内排名如下表(假定成绩均为整数).现从该班测验成绩为94和95的同学中随机抽取两位,这两位同学成绩相同的概率是

	成绩/分	班内排名
甲	95	9
乙	94	11
丙	93	14

A. 0.2　　B. 0.4　　C. 0.5　　D. 0.6

7. 已知双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$、$F_2$.若以$F_1F_2$为直径的圆和曲线$C$在第一象限交于点$P$,且$\triangle POF_2$恰好为正三角形,则双曲线$C$的离心率为

A. $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$　　C. $1+\sqrt{3}$　　D. $1+\sqrt{5}$

8. 某校高一组织五个班的学生参加学农活动，每班从“农耕”“采摘”“酿酒”“野炊”“饲养”五项活动中选择一项进行实践，且各班的选择互不相同.已知 1 班不选“农耕”“采摘”；2 班不选“农耕”“酿酒”；如果 1 班不选“酿酒”，那么 4 班不选“农耕”；3 班既不选“野炊”，也不选“农耕”；5 班选择“采摘”或“酿酒”.则选择“饲养”的班级是

A. 2 班　　B. 3 班　　C. 4 班　　D. 5 班

9. 下列关于函数 $f(x)=2\cos^2 x+\sqrt{3}\sin 2x-1$ 的说法，正确的是

A. $x=\frac{\pi}{3}$是函数 $f(x)$的一个极值点

B. $f(x)$在区间$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上是增函数

C. 函数 $f(x)$在区间$(0,\pi)$上有且只有一个零点$\frac{5\pi}{12}$

D. 函数 $f(x)$的图象可由函数 $y=2\sin 2x$ 的图象向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度得到

10. 瑞士数学家、物理学家欧拉发现任一凸多面体(即多面体内任意两点的连线都被完全包含在该多面体中，直观上讲是指没有凹陷或孔洞的多面体)的顶点数 V、棱数 E 及面数 F 满足等式 $V-E+F=2$，这个等式称为欧拉多面体公式，被认为是数学领域最漂亮、简洁的公式之一.现实生活中存在很多奇妙的几何体，现代足球的外观即取自一种不完全正多面体，它是由 12 块黑色正五边形面料和 20 块白色正六边形面料构成的.20 世纪 80 年代，化学家们成功地以碳原子为顶点组成了该种结构，排列出全世界最小的一颗“足球”，称为“巴克球(Buckyball)”.则“巴克球”的顶点个数为

A. 180　　B. 120　　C. 60　　D. 30

11. 已知正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$，E，F 是线段 AC_1 上的点，且 $AE=EF=FC_1$.分别过点 E，F 作与直线 AC_1 垂直的平面 α，β，则正方体夹在平面 α 与 β 之间的部分占整个正方体体积的

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{3}{4}$

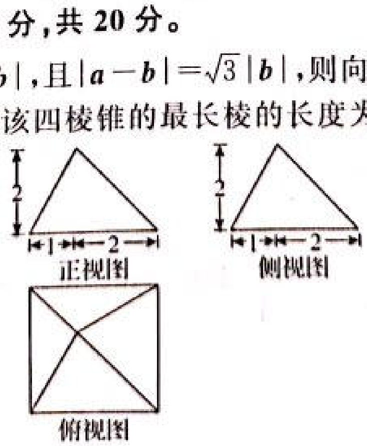
12. 已知椭圆 C：$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，点 P 在椭圆上且异于长轴端点.点 M，N 在$\triangle PF_1F_2$ 所围区域之外，且始终满足$\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MF_1}=0$，$\overrightarrow{NP}\cdot\overrightarrow{NF_2}=0$，则$|MN|$的最大值为

A. 6　　B. 8　　C. 12　　D. 14

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，且$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}|\boldsymbol{b}|$，则向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为________.

14. 某四棱锥的三视图如图所示，则该四棱锥的最长棱的长度为________.



15. 已知在锐角三角形 ABC 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c.若 $a=4$，且 $2a\left(\frac{a}{2}-b\cos B\right)+b^2=c^2$，则 $b+c$ 的取值范围为________.

16. 已知曲线 $y=|\ln x|$ 与直线 $y=m$ 有两个不同的交点 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)(x_1<x_2)$，设直线 l_1,l_2 分别是曲线 $y=|\ln x|$ 在点 P_1,P_2 处的切线，且 l_1,l_2 分别与 y 轴相交于点 A，B.$\triangle P_2AB$ 为等边三角形，则实数 m 的值为________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一)必考题：共 60 分。

17.（12 分）

端午节是中国传统节日之一.节日期间，各大商场各种品牌的“粽子战”便悄然打响.某记者走访市场发现，各大商场粽子种类繁多，价格不一.根据数据统计分析，得到了某商场不同种类的粽子销售价格(单位：元/千克)的频数分布表，如表一所示.

表一：

价格/(元/千克)	[10,15)	[15,20)	[20,25)	[25,30)	[30,35)
种类数	4	12	16	6	2

在调查中，记者还发现，各大品牌在馅料方面还做足了功课，满足了市民多样化的需求.除了蜜枣、豆沙等传统馅料粽，很多品牌还推出了鲜肉、巧克力、海鲜等特色馅料粽.在该商场内，记者随机对 100 名顾客的年龄和粽子口味偏好进行了调查，结果如表二.

表二：

	喜欢传统馅料粽	喜欢特色馅料粽	总计
40 岁以下	30	15	45
40 岁及以上	50	5	55
总计	80	20	100

(1)根据表一估计该商场粽子的平均销售价(同一组中的数据用该组区间的中点值代表)；

(2)根据表二信息，能否有 95%的把握认为顾客的粽子口味偏好与年龄有关？

参考公式和数据：$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

$P(K^2\geqslant k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

18.（12 分）

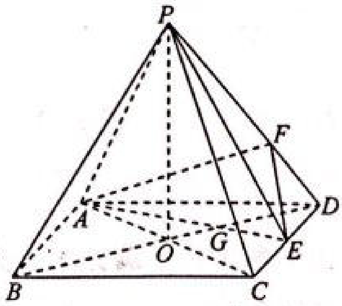
已知 $\{a_n\}$ 是等比数列，$a_3=\frac{1}{8}$，且 $a_1,a_2+\frac{1}{16},a_3$ 成等差数列.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)设 $b_n=\frac{2}{\left(\log_{\frac{1}{2}}a_{2n-1}\right)\left(\log_{\frac{1}{2}}a_{2n+1}\right)}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

19. (12 分)

如图，四棱锥 P-$ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形，$\angle ABC=60°$，AC 与 BD 交于点 O，$PO\perp$ 平面 $ABCD$，E 为 CD 的中点，连接 AE 交 BD 于 G，点 F 在侧棱 PD 上，且 $DF=\dfrac{1}{3}PD$.



(1)求证：$PB\,/\!/$ 平面 AEF；

(2)若 $\cos\angle BPA=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，求三棱锥 E-PAD 的体积.

20. (12 分)

已知函数 $f(x)=a\mathrm{e}^x-x-a$.

(1)求函数 $f(x)$的极值.

(2)是否存在实数 a，使得函数 $f(x)$恰有两个相异零点？若存在，求 a 的取值范围；若不存在，说明理由.

21. (12 分)

已知抛物线 C：$x^2=2py(p>0)$，直线 l 交 C 于 A，B 两点，且 A，B 两点与原点不重合，点 $M(1,2)$为线段 AB 的中点.

(1)若直线 l 的斜率为 1，求抛物线 C 的方程；

(2)分别过 A，B 两点作抛物线 C 的切线，若两条切线交于点 S，证明点 S 在一条定直线上.

(二)选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22. [选修 4—4：坐标系与参数方程](10 分)

在直角坐标系 xOy 中，直线 l 的参数方程为$\begin{cases}x=4-t,\\ y=m+\dfrac{1}{2}t\end{cases}$($t$ 为参数).以坐标原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为$(\rho-2\cos\theta)^2=5-4\sin^2\theta$.

(1)求直线 l 的普通方程和曲线 C 的直角坐标方程；

(2)若直线 l 与曲线 C 相切，求 m 的值.

23. [选修 4—5：不等式选讲](10 分)

已知函数 $f(x)=|x+4^m|+|x+2^{m+1}-3|$.

(1)当 $m=1$ 时，求不等式 $f(x)\geqslant 7$ 的解集；

(2)试证明 $f(x)\geqslant 2$.