一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x|\frac{3-x}{x}\geqslant 0\}$，$B=\{x|x^2<4\}$，则 $A\cap B=$

A. $(0,3]$　　B. $(-2,0)$　　C. $[0,2)$　　D. $(0,2)$

2. 已知复数 $z=1+2i+\frac{1+2i}{2-i}$，则 z 的虚部为

A. 1　　B. 3　　C. -1　　D. 2

3. 已知 $\sin(\theta-\pi)=\frac{4}{5}$，且 $\tan\theta<0$，则 $\sin 2\theta=$

A. $\frac{24}{25}$　　B. $\frac{12}{25}$　　C. $-\frac{24}{25}$　　D. $-\frac{12}{25}$

4. 若 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y+1\geqslant 0,\\x+y-3\leqslant 0,\\x-3y+1\leqslant 0,\end{cases}$ 则目标函数 $z=2x+y$ 的最大值为

A. 5　　B. 4　　C. 3　　D. 2

5. 某班统计某次数学测验的平均分与方差（成绩不完全相同），计算完后才发现有位同学的分数录入了两次，只好重算一次. 已知第一次计算所得平均分和方差分别为 $\bar{x}$，s^2，第二次计算所得平均分和方差分别为 $\bar{x}_1$，s_1^2，若此同学的得分恰好为 $\bar{x}$，则

A. $\bar{x}=\bar{x}_1$，$s^2=s_1^2$　　B. $\bar{x}=\bar{x}_1$，$s^2<s_1^2$

C. $\bar{x}=\bar{x}_1$，$s^2>s_1^2$　　D. $\bar{x}<\bar{x}_1$，$s^2=s_1^2$

6. 甲、乙、丙做同一道题“已知 α,β 是两个不同的平面，m,n,l 是三条不同的直线，且满足 $m\subset\alpha$，$n\subset\beta$，$\alpha\cap\beta=l$，…，”甲说：“$\alpha\perp\beta$”，乙说：“$m\perp n$”，丙说：“$n/\!/l$”，如果三人说的均是正确的，以下判断正确的是

A. $m/\!/$

B. $n\perp\alpha$

C. 直线 m,l 不一定垂直

D. 直线 m,n 为异面直线

7. 在锐角△ABC 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，若 $b=a\cos C+2a\cos A$，则 $a=$

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 1　　D. 2

8. 双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>$ [illegible] 分别为 F_1,F_2，过 F_1 的直线与双曲线 C 的右支在第一象限的交点为 A，与 y 轴的交点为 B，且 B 为 AF_1 的中点，若 $\triangle ABF_2$ 的周长为 $6a$，则双曲线 C 的渐近线方程为

A. $y=\pm\sqrt{3}x$　　B. $y=\pm\sqrt{2}x$

C. $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}x$　　D. $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$

9. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\lg x, x\geq 1,\\ -\lg(2-x), x<1,\end{cases}$ 则

A. $f(x)$存在最小值

B. $f(x)$在$[1,+\infty)$上是增函数，在$(-\infty,1)$上是减函数

C. $f(x)$的图象关于点$(1,0)$对称

D. $f(x)$的图象关于直线 $x=1$ 对称

10. 已知定义在$[0,\frac{3\pi}{4}]$上的函数 $f(x)=\sin(\omega x-\frac{\pi}{3})(\omega>0)$有且仅有三个零点，$f(0)+f(\frac{3\pi}{4})=0$，则 ω 的值为

A. $\frac{11}{3}$或 3　　B. $\frac{32}{9}$或 3

C. $\frac{32}{9}$或 4　　D. $\frac{11}{3}$或 4

11. 在四面体 $ABCD$ 中，$AB=AD=BD=\sqrt{2}BC=\sqrt{2}CD=\sqrt{2}$，$AC=\sqrt{3}$，则该四面体的外接球表面积为

A. 3π　　B. 6π　　C. [illegible]　　D. 12π

12. 若关于 x 的方程$\frac{\ln x}{x}+\frac{x}{\ln x+x}+m=0$有三个不相等的实数解 x_1,x_2,x_3，且 $x_1<x_2<x_3$，则$(1-\frac{\ln x_1}{x_1})\sqrt{(1-\frac{\ln x_2}{x_2})(1-\frac{\ln x_3}{x_3})}$的取值范围为

A. $(1-\frac{2}{e^2+e},1+\frac{2}{e^2+e})$　　B. $(1-\frac{2}{e^2+e},1)$

C. $(\frac{2}{e^2+e},1)$　　D. $(0,\frac{2}{e^2+e})$

第Ⅱ卷

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．把答案填在答题卡中的横线上．

13. 若“$\exists x\in\mathbf{R}, e^x\leq m$”为假命题，则实数 m 的取值范围是___▲___．

14. 在菱形 $ABCD$ 中，$|AC|=2$，点 M 为线段 BD 上一点，则$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AM}=$___▲___．

15. 某足球比赛共有 8 支球队参赛，其中有 2 支种子队，以抽签的方式将这 8 支球队平均分为两组，2 支种子队不在同一组的概率为___▲___．

16. 已知点 $M(-2,2)$和抛物线 $C:y^2=8x$，过 C 的焦点且斜率为 k 的直线与 C 交于 A,B 两点．若$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$，则 $k=$___▲___．

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(一)必考题：共 60 分.

17.（12 分）

已知正项等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $3a_3=4a_1+4a_2$，$S_6=126$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

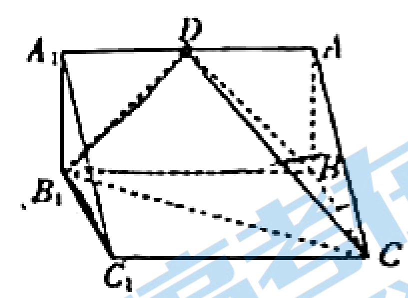
(2)若 $b_n=\dfrac{2}{\log_2 a_{2n-1}\cdot\log_2 a_{2n+1}}$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 T_n.

18.（12 分）

如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，平面 $BCC_1B_1\perp$ 平面 A_1ABB_1，D 为棱 AA_1 的中点，$BB_1=2AB=2$.

(1)证明：$B_1D\perp$ 平面 BDC.

(2)若二面角 $A-CC_1-B$ 为 45°，求二面角 $D-B_1C-B$ 的余弦值.



19.（12 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左焦点和右顶点分别 F，A，P 是椭圆 C 上一点，$PF\perp x$ 轴，直线 PA 的斜率为$-\dfrac{1}{2}$.

(1)求椭圆 C 的离心率；

(2)若直线 PA 与 y 轴交于点 $E(0,1)$，过 E 的直线 l 与椭圆 C 交于 M，N 两点，$\overrightarrow{EM}+3\overrightarrow{EN}=0$，求直线 l 的方程.

20.(12 分)

有一种双人游戏,游戏规则如下:每人各分得一个装有 4 个球(2 个白球和 2 个黑球)的布袋,并轮流到对方袋中摸出 1 球;若摸出的是白球,则放回对方的袋中,若摸出的是黑球,则放人自己袋中,两人各摸取一次算为一轮.

(1)求第一轮比赛后先摸球的人的袋中黑球个数 X 的分布列与期望;

(2)小李和小张准备玩这种游戏,约定最多玩 3 轮,每轮游戏由小李先摸球,并且规定每轮结束后,一方袋中若有 4 个黑球,则获胜并结束游戏,否则进行下一轮摸球游戏,求小李获胜的概率.

21.(12 分)

已知函数 $f(x)=\ln(x+a)$.

(1)当 $a=1$ 时,求曲线 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程.

(2)证明:当 $0<a\leqslant 1$ 时,对一切 $x\in[0\quad)$,都有 $3xf(x)<2e^x$ 成立.

(二)选考题:共 10 分.请考生在第 22、23 题中任选一题作答.如果多做,则按所做的第一题计分.

22.[选修 4—4:坐标系与参数方程](10 分)

在直角坐标系 xOy 中,曲线 C 的参数方程为$\begin{cases}x=1+\sqrt{2}\cos\theta,\\ y=\sqrt{2}\sin\theta,\end{cases}$($\theta$ 为参数).以坐标原点为极点,x 轴正半轴为极轴建立极坐标系,直线 l 的极坐标方程为 $\theta=\alpha(0\leqslant\alpha\leqslant\pi)$.

(1)求曲线 C 的极坐标方程;

(2)已知直线 l 与曲线 C 交于 A,B 两点,若 $|OA|+|OB|=\sqrt{6}$,求直线 l 的直角坐标方程.

23.[选修 4—5:不等式选讲](10 分)

已知函数 $f(x)=2|x-1|-x$.

(1)求不等式 $f(x)<2x-4$ 的解集.

(2)已知函数 $f(x)$ 的最小值为 m,且 a,b,c 都是正数,$a+2b+c=m$,证明:$\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}\geqslant 4$.

高三数学试题参考答案(理科)

1. D 【解析】本题考查集合的交集运算,考查运算求解能力.

因为 $A=(0,3]$,$B=(-2,2)$,所以 $A\cap B=(0,2)$.

2. B 【解析】本题考查复数的四则运算,考查运算求解能力.

因为 $z=1+2i+\dfrac{1+2i}{2-i}=1+3i$,所以复数 z 的虚部为 3.

3. C 【解析】本题考查三角恒等变换,考查运算求解能力.

$\because \sin(\theta-\pi)=\dfrac{4}{5}$,$\therefore \sin\theta=-\dfrac{4}{5}$,$\therefore \cos\theta=\pm\dfrac{3}{5}$. 又$\because \tan\theta<0$,$\therefore \cos\theta=\dfrac{3}{5}$,$\therefore \sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{24}{25}$.

4. A 【解析】本题考查线性规划,考查数形结合的思想.

画出可行域(图略)知,当 $l: z=2x+y$ 平移到过点$(2,1)$时,z 取得最大值,最大值为 5.

5. B 【解析】本题考查平均数与方差,考查数据分析能力.

设这个班有 n 个同学,分数分别是 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$,

假设第 i 个同学的成绩录入了两次,第一次计算时,总分是$(n+1)\bar{x}$,方差为

$s^2=\dfrac{1}{n+1}[(a_1-\bar{x})^2+(a_2-\bar{x})^2+\cdots+(a_{i-1}-\bar{x})^2+2(a_i-\bar{x})^2+(a_{i+1}-\bar{x})^2+\cdots+(a_n-\bar{x})^2]$;

第二次计算时,$\bar{x}_1=\dfrac{(n+1)\bar{x}-\bar{x}}{n}=\bar{x}$,方差

$s_1^2=\dfrac{1}{n}[(a_1-\bar{x})^2+(a_2-\bar{x})^2+\cdots+(a_{i-1}-\bar{x})^2+(a_i-\bar{x})^2+(a_{i+1}-\bar{x})^2+\cdots+(a_n-\bar{x})^2]=\dfrac{n+1}{n}s^2$.

故有 $\bar{x}=\bar{x}_1$,$s^2<s_1^2$.

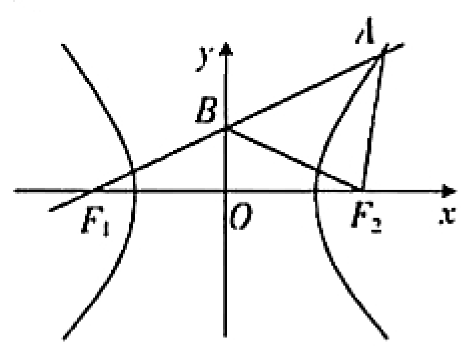
6. D 【解析】本题考查线面垂直的判定、性质定理,考查逻辑推理能力.

结合甲、乙、丙三人的说法可知,当 $\alpha\perp\beta$,$m\perp n$,$n/\!/l$ 正确时,直线 m,n 为异面直线. 故选 D.

7. B 【解析】本题考查正弦定理以及三角恒等变换,考查运算求解能力.

由正弦定理可知,$\sin B=\sin A\cos C+2a\sin C\cos A$,则 $\cos A\sin C=2a\sin C\cos A$,则 $a=\dfrac{1}{2}$.

8. B 【解析】本题考查双曲线的定义以及几何性质,考查数形结合的思想和运算求解的能力.



由对称性可知 $BF_2=BF_1$,所以$\triangle ABF_2$ 的周长为 $6a$,即 $AF_1+AF_2=6a$,又 $AF_1-AF_2=2a$,所以 $AF_1=4a$,$AF_2=2a$. 因为 B 为 AF_1 的中点,所以 $AB=BF_1=2a$,则$\triangle ABF_2$ 为等边三角形,所以$\angle ABF_2=\dfrac{\pi}{3}$,$\angle F_1BF_2=\dfrac{2\pi}{3}$,$\angle F_1BO=\dfrac{\pi}{3}$.

又因为 $OF_1=c$,所以在 $Rt\triangle F_1BO$ 中,$\sin\angle F_1BO=\dfrac{OF_1}{BF_1}=\dfrac{c}{2a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

所以$\dfrac{c}{a}=\sqrt{3}$,$\dfrac{b}{a}=\sqrt{2}$,即双曲线 C 的渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{2}x$.

9. C 【解析】本题考查函数的性质,考查逻辑推理能力.

设点(x,y)是函数 $y=\lg x$,$x\geq1$ 图象上任意一点,它关于点$(1,0)$的对称点为(x',y'),

则$\begin{cases}x+x'=2,\\y+y'=0,\end{cases}$ $\begin{cases}x=2-x',\\y=-y',\end{cases}$代入 $y=\lg x$,得$-y'=\lg(2-x')$,$\therefore y'=-\lg(2-x')$,$x'\leq1$.

$\therefore$函数 $y=\lg x$,$x\geq1$ 的图象与函数 $y=-\lg(2-x)$,$x\leq1$ 的图象关于点$(1,0)$对称.

即 $f(x)=\begin{cases}\lg x, x\geqslant 1,\\ -\lg(2-x), x<1\end{cases}$ 的图象关于点(1,0)对称，易知 $f(x)$ 在定义域 R 上单调递增.

10. C 【解析】本题考查三角函数的图象，考查数形结合的思想.

令 $\theta=\omega x-\frac{\pi}{3}\in[-\frac{\pi}{3},\frac{3\pi}{4}\omega-\frac{\pi}{3}]$，$2\pi\leqslant\frac{3\pi}{4}\omega-\frac{\pi}{3}<3\pi$，则 $\frac{28}{9}\leqslant\omega<\frac{40}{9}$.

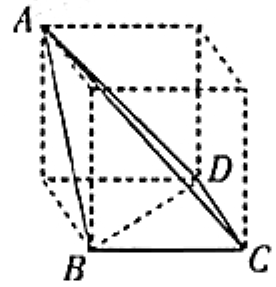
因为 $f(0)+f(\frac{3\pi}{4})=0$，所以 $\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin(\frac{3\pi}{4}\omega-\frac{\pi}{3})$，

即 $\frac{3\pi}{4}\omega-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ 或 $\frac{3\pi}{4}\omega-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$，

即 $\omega=\frac{8}{9}+\frac{8}{3}k$ 或 $\omega=\frac{4}{3}+\frac{8}{3}k$，$k\in\mathbf{Z}$，所以 ω 为 $\frac{32}{9}$ 或 4.

11. A 【解析】本题考查四面体的外接球，考查空间想象能力.

由 $AB=AD=BD=\sqrt{2}BC=\sqrt{2}CD=\sqrt{2}$，可知△BCD 为等腰直角三角形，△ABD 为等边三角形，$AC=\sqrt{3}$，所以四面体 ABCD 可补形成正方体，如图所示. AC 即为外接球直径 2R，则 $R=\frac{\sqrt{3}}{2}$，从而外接球表面积 $=4\pi(\frac{\sqrt{3}}{2})^2=3\pi$.



12. B 【解析】本题考查导数的应用、函数与方程，考查数形结合与化归与转化的数学思想.

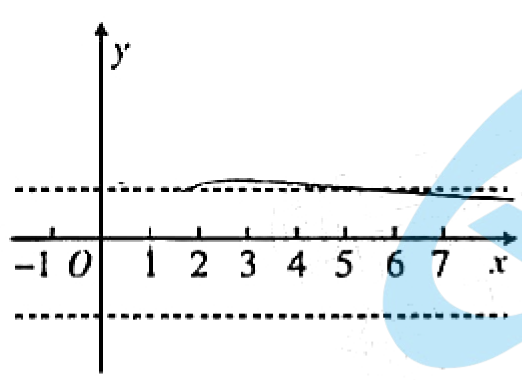
由方程 $\frac{\ln x}{x}+\frac{x}{\ln x+x}+m=0$，可得 $\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{\frac{\ln x}{x}+1}+m=0$.

令 $\frac{\ln x}{x}=t$，则有 $t+\frac{1}{t+1}+m=0$，即 $t^2+(m+1)t+m+1=0$.

令函数 $g(x)=\frac{\ln x}{x}$，则 $g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$.

$g(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增，在 $(e,+\infty)$ 上单调递减.

作出图象如下：



要使关于 x 的方程 $\frac{\ln x}{x}+\frac{x}{\ln x+x}+m=0$ 有三个不相等的实数解 x_1,x_2,x_3，且 $x_1<x_2<x_3$，

结合图象可得关于 t 的方程 $t^2+(m+1)t+m+1=0$ 一定有两个实根 t_1,t_2 $(t_1<0<t_2<\frac{1}{e},t\neq-1)$，

且 $\frac{\ln x_1}{x_1}=t_1$，$\frac{\ln x_2}{x_2}=\frac{\ln x_3}{x_3}=t_2$，$t_1+t_2=-(m+1)$，$t_1t_2=m+1$，

所以 $m+1<0$，$\frac{1}{e^2}+\frac{m+1}{e}+m+1>0$，解得 $-1-\frac{1}{e^2+e}<m<-1$.

故 $(1-\frac{\ln x_1}{x_1})\sqrt{(1-\frac{\ln x_2}{x_2})(1-\frac{\ln x_3}{x_3})}=(1-t_1)(1-t_2)=1-t_1-t_2+t_1t_2=2m+3\in(1-\frac{2}{e^2+e},1)$.

13. $(-\infty,0]$ 【解析】本题考查命题的否定，考查逻辑推理能力.

若原命题为假命题，则其否定"$\forall x\in\mathbf{R}$，$e^x>m$"为真命题，m 的取值范围为 $(-\infty,0]$.

14. 2 【解析】本题考查平面向量的数量积公式，考查数形结合的思想.

设 O 为 AC 与 BD 的交点，则 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AM}=|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AM}|\cos\angle MAO=|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AO}|=2$.

15. $\frac{4}{7}$ 【解析】本题考查排列组合，考查逻辑推理能力.

这 8 支球队分为两组，则一共有 $\frac{C_8^4C_4^4}{A_2^2}=35$(种)，

2 支种子队不在同一组，则有 $\frac{C_6^3C_3^3}{A_2^2}A_2^2=20$(种)，故所求概率为 $\frac{20}{35}=\frac{4}{7}$.

16. 2 【解析】本题考查抛物线的定义以及几何性质，考查数形结合的思想和运算求解的能力.

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $\begin{cases}y_1^2=8x_1,\\y_2^2=8x_2,\end{cases}$ 所以 $y_1^2-y_2^2=8x_1-8x_2$，所以 $k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{8}{y_1+y_2}$.

取 AB 的中点 $M'(x_0,y_0)$，分别过点 A，B 作准线 $x=-2$ 的垂线，垂足分别为 A'，B'. 因为 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$，$\angle AMB=90°$，所以 $|MM'|=\frac{1}{2}|AB|=\frac{1}{2}(|AF|+|BF|)=\frac{1}{2}(|AA'|+|BB'|)$. 因为 M' 为 AB 的中点，所以 MM' 平行于 x 轴. 因为 $M(-2,2)$，所以 $y_0=2$，则 $y_1+y_2=4$，即 $k=2$.

17. 解：(1) 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，由 $3a_3=4a_1+4a_2$，可得 $3q^2-4q-4=0$，解得 $q=2$ 或 $q=-\frac{2}{3}$(舍去). …… 2 分

因为 $S_6=126$，所以 $S_6=\frac{a_1(1-2^6)}{1-2}=126$，解得 $a_1=2$，…… 4 分

所以 $a_n=2\cdot 2^{n-1}=2^n$. …… 6 分

(2) $b_n=\frac{2}{\log_2 a_{2n-1}\cdot\log_2 a_{2n+1}}=\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}$，…… 9 分

所以 $T_n=(1-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+\cdots+(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})=1-\frac{1}{2n+1}=\frac{2n}{2n+1}$. …… 12 分

18. (1) 证明：$\because ABC-A_1B_1C_1$ 为直三棱柱，$\therefore BB_1\perp$ 平面 ABC，则 $BB_1\perp BC$. …… 1 分

$\because$ 平面 $BCC_1B_1\perp$ 平面 A_1ABB_1，平面 $BCC_1B_1\cap$ 平面 $A_1ABB_1=BB_1$

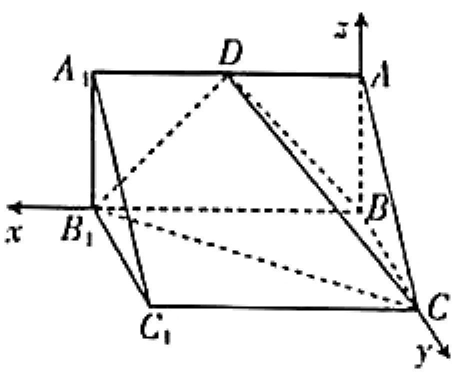
$\therefore CB\perp$ 平面 A_1ABB_1，$\therefore B_1D\perp BC$. …… 2 分

$\because BB_1=2AB=2$，$ABC-A_1B_1C_1$ 为直三棱柱，$\therefore B_1D=BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{2}$.

$\therefore BB_1^2=BD^2+B_1D^2$，$\therefore B_1D\perp BD$. …… 4 分

又 $BD\cap BC=B$，$\therefore B_1D\perp$ 平面 BDC. …… 5 分

(2) 解：$\because CC_1\perp$ 平面 ABC，二面角 $A-CC_1-B$ 的平面角为 $\angle ACB$，即 $\angle ACB=45°$，$\therefore BC=1$. …… 7 分



以 B 为原点，$\overrightarrow{BB_1}$ 的方向为 x 轴正方向，$\overrightarrow{BC}$ 的方向为 y 轴正方向，$\overrightarrow{BA}$ 的方向为 z 轴正方向建立如图所示的空间直角坐标系 $B-xyz$，

则 $B_1(2,0,0)$，$C(0,1,0)$，$D(1,0,1)$，$\overrightarrow{B_1C}=(-2,1,0)$，$\overrightarrow{B_1D}=(-1,0,1)$.

$\overrightarrow{BA}=(0,0,1)$ 为平面 B_1BCC_1 的一个法向量. …… 9 分

设平面 DB_1C 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{B_1C}=0,\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{B_1D}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-2x+y=0,\\-x+z=0,\end{cases}$ 令 $x=1$，得 $y=2$，$z=1$，则 $\boldsymbol{n}=(1,2,1)$，$\cos\langle\overrightarrow{BA},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{BA}||\boldsymbol{n}|}=\frac{1}{1\times\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$，所以二面角 $D-B_1C-B$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$. …… 12 分

19. 解：(1) 设点 $F(-c,0)$，$A(a,0)$，$P(-c,y_0)$，则 $\frac{c^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$，则 $y_0^2=\frac{b^4}{a^2}$，…… 2 分

又直线 PA 的斜率为 $-\frac{1}{2}$，所以 $\frac{\frac{b^2}{a}-0}{-c-a}=-\frac{1}{2}$，…………………………………………………… 3 分

则 $2c^2+ac-a^2=0$，即 $2e^2+e-1=0$，解得 $e=\frac{1}{2}$，所以椭圆 C 的离心率为 $\frac{1}{2}$． ……………………………… 5 分

(2)因为直线 PA 与 y 轴交于点 $E(0,1)$，所以直线 PA 的方程为 $y=-\frac{1}{2}x+1$，则 $A(2,0)$，

所以 $a=2,c=1,b=\sqrt{3}$，即椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$． ………………………………………………… 6 分

当直线 l 的斜率不存在时，MN 的方程为 $x=0$．此时 $\frac{|EM|}{|EN|}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=2+\sqrt{3}$，不符合条件舍去． ……… 7 分

当直线 MN 的斜率存在时，设直线 MN 的方程为 $y=kx+1$，

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则 $\overrightarrow{EM}=(x_1,y_1-1)$，$\overrightarrow{EN}=(x_2,y_2-1)$．

因为 $\overrightarrow{EM}+3\overrightarrow{EN}=\mathbf{0}$，所以 $x_1=-3x_2$． ………………………………………………………………… 8 分

联立 $\begin{cases}y=kx+1,\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$ 得 $(3+4k^2)x^2+8kx-8=0$，所以 $\begin{cases}x_1+x_2=\frac{-8k}{3+4k^2},\\ x_1x_2=\frac{-8}{3+4k^2},\end{cases}$ ………………………… 9 分

将 $x_1=-3x_2$ 代入得 $\begin{cases}-2x_2=\frac{-8k}{3+4k^2},\\ 3x_2^2=\frac{8}{3+4k^2}.\end{cases}$ 所以 $3(\frac{4k}{3+4k^2})^2=\frac{8}{3+4k^2}$， ……………………………… 11 分

所以 $k^2=\frac{3}{2}$，$k=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$，

所以直线 l 的方程为 $y=\frac{\sqrt{6}}{2}x+1$ 或 $y=-\frac{\sqrt{6}}{2}x+1$． …… …………………………………… 12 分

20．解：(1)由题意，知 X 的值可能为 1，2，3． ………………………………………………………………… 1 分

$P(X=1)=\frac{2}{4}\times\frac{2}{4}=\frac{1}{4}$， ………………………………………………………………………………… 2 分

$P(X=3)=\frac{2}{4}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$， ………………………………………………………………………………… 3 分

$P(X=2)=\frac{2}{4}\times\frac{2}{4}+\frac{2}{4}\times\frac{3}{5}=\frac{11}{20}$． ……………………………………………………………………… 4 分

所以随机变量 X 的分布列为

X	1	2	3
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{20}$	$\frac{1}{5}$

……… 5 分

所以 $E(X)=1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{11}{20}+3\times\frac{1}{5}=\frac{39}{20}$． ……………………………………………………………… 6 分

(2)若游戏进行 2 轮且小李获胜的概率为 $P=\frac{2}{4}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{45}$， ……………………………… 8 分

若游戏进行 3 轮且小李获胜的概率为 $P=(\frac{2}{4}\times\frac{2}{4}+\frac{2}{4}\times\frac{3}{5})\times\frac{1}{45}+\frac{2}{4}\times\frac{2}{5}\times(\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{4}{6})\times\frac{1}{3}$

$\times\frac{2}{6}=\frac{187}{8100}$, ………………………………………………………………………… 11 分

所以小李获胜的概率为$\frac{1}{45}+\frac{187}{8100}=\frac{367}{8100}$. ………………………………………… 12 分

21. (1)解：$f(x)=\ln(x+1)$，$f(0)=0$， ………………………………………………………… 1 分

$f'(x)=\frac{1}{x+1}$，则 $f'(0)=1$， ………………………………………………………… 3 分

所以曲线 $y=f(x)$在 $x=0$ 处的切线方程为 $y=x$. ……………………………………… 5 分

(2)证明：因为 $0<a\leqslant 1$，所以 $\ln(x+a)\leqslant\ln(x+1)$，

又 $x\in[0,+\infty)$，所以 $xf(x)\leqslant x\ln(x+1)$. ………………………………………… 7 分

易证得 $\ln(x+1)\leqslant x$，所以 $xf(x)\leqslant x^2$. ……………………………………………… 9 分

令 $h(x)=\frac{x^2}{e^x}$，$x\in[0,+\infty)$，$h'(x)=\frac{2x-x^2}{e^x}$. 当 $x\in[0,2)$时，$h'(x)>0$，$h(x)$单调递增；当 $x\in(2,+\infty)$时，

$h'(x)<0$，$h(x)$单调递减. $h(x)_{\max}=h(2)=\frac{4}{e^2}<\frac{2}{3}$. ……………………………… 11 分

所以，当 $0<a\leqslant 1$ 时，对 $\forall x\in[0,+\infty)$，都有 $3xf(x)<2e^x$ 成立. ………………… 12 分

22. 解：(1)由曲线 C 的参数方程$\begin{cases}x=1+\sqrt{2}\cos\theta,\\ y=\sqrt{2}\sin\theta\end{cases}$($\theta$ 为参数)得曲线 C 的普通方程为$(x-1)^2+y^2=2$，得 $x^2+y^2-2x-1=0$. ……………………………………………………………… 2 分

曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2-2\rho\cos\theta-1=0$. ………………………………………… 4 分

(2)将直线 l 的极坐标方程代入曲线 C 的极坐标方程，得 $\rho^2-2\rho\cos\alpha-1=0$. ………… 6 分

设 $A(\rho_1,\alpha)$，$B(\rho_2,\alpha)$.

则 $\rho_1\cdot\rho_2=-1<0$，所以$|OA|+|OB|=|\rho_1-\rho_2|=\sqrt{4\cos^2\alpha+4}=\sqrt{6}$，

则 $\cos\alpha=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，即 $\alpha=\frac{\pi}{4}$或$\frac{3\pi}{4}$. ……………………………………………… 8 分

所以直线 l 的直角坐标方程为 $y=\pm x$. ……………………………………………… 10 分

23. (1)解：由题可得 $2|x-1|<3x-4$，所以$-(3x-4)<2(x-1)<3x-4$， ……………………… 3 分

解得 $x>2$，所以不等式 $f(x)<2x-4$ 的解集为$(2,+\infty)$. ………………………………… 5 分

(2)证明：$f(x)=\begin{cases}x-2, x\geqslant 1,\\ -3x+2, x<1,\end{cases}$ 则 $m=f(1)=-1$， ……………………………………… 7 分

则$(a+b)+(b+c)=1$，$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}=(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c})[(a+b)+(b+c)]=2+\frac{b+c}{a+b}+\frac{a+b}{b+c}\geqslant 4$，

当且仅当 $a=c$ 时，取等号. ……………………………………………………………… 10 分