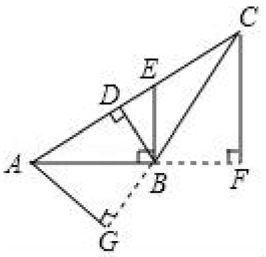
2022 北京人大附中朝阳学校初三一模

数　　学

一、选择题（本题共 16 分，每小题 2 分）下面 1-8 题均有四个选项，符合题意的选项只有一个.

1. 如图所示，△ABC 中 AB 边上的高线是（　　）



A. 线段 AG　　B. 线段 BD　　C. 线段 BE　　D. 线段 CF

2. 图 1 是数学家皮亚特•海恩（Piet Hein）发明的索玛立方块，它由四个及四个以内大小相同的立方体以面相连接构成的不规则形状组件组成．图 2 不可能是下面哪个组件的视图（　　）


图1

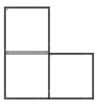
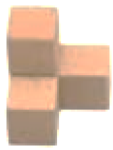
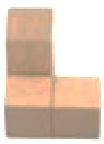
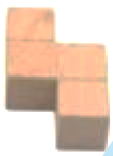


图2

A. 

B. 

C. 

D. 

3. 当函数 y=（x-1）^{2}-2 的函数值 y 随着 x 的增大而减小时，x 的取值范围是（　　）

A. $x>0$　　B. $x<1$　　C. $x>1$　　D. x 为任意实数

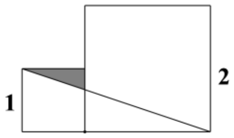
4. 正五边形的内角和是（　）

A. 360°　　B. 540°　　C. 720°　　D. 900°

5. 如果 $x^2+x=3$，那么代数式 $(x+1)(x-1)+x(x+2)$ 的值是（　）

A. 2　　B. 3　　C. 5　　D. 6

6. 把边长分别为 1 和 2 的两个正方形按图的方式放置.则图中阴影部分的面积为（ ）



A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{5}$　　D. $\frac{1}{4}$

7. 某便利店的咖啡单价为 10 元/杯，为了吸引顾客，该店共推出了三种会员卡，如下表：

会员卡类型	办卡费用/元	有效期	优惠方式
A 类	40	1 年	每杯打九折
B 类	80	1 年	每杯打八折
C 类	130	1 年	一次性购买 2 杯，第二杯半价

例如，购买 A 类会员卡，1 年内购买 50 次咖啡，每次购买 2 杯，则消费 $40+2\times50\times(0.9\times10)=940$ 元．若小玲 1 年内在该便利店购买咖啡的次数介于 75~85 次之间，且每次购买 2 杯，则最省钱的方式为（　）

A. 购买 A 类会员卡　　B. 购买 B 类会员卡

C. 购买 C 类会员卡　　D. 不购买会员卡

8. 在一次生活垃圾分类知识竞赛中，某校七、八年级各有 100 名学生参加，已知七年级男生成绩的优秀率为 40%，女生成绩的优秀率为 60%；八年级男生成绩的优秀率为 50%，女生成绩的优秀率为 70%对于此次竞赛的成绩，下面有三个推断：

①七年级男生成绩的优秀率小于八年级男生成绩的优秀率；

②七年级学生成绩的优秀率一定小于八年级学生成绩的优秀率；

③七、八年级所有男生成绩的优秀率一定小于七、八年级所有女生成绩的优秀率．

所有合理推断的序号是（　）

A. ①②　　B. ①③　　C. ②③　　D. ①②③

二、填空题（本题共 16 分，每小题 2 分）

9. 若分式 $\frac{1-x}{x}$ 的值为 0，则 x 的值为_______．

10. 已知“若 $a>b$，则 $ac<bc$”是真命题，请写出一个满足条件的 c 的值是__________.

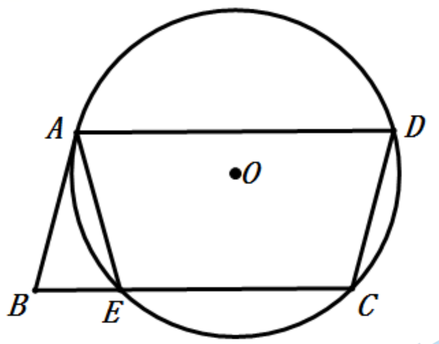
11. 已知圆锥的母线长为 5cm，侧面积为 $15\pi cm^2$，则这个圆锥的底面圆半径为_____cm.

12. 下表显示了用计算机模拟随机抛掷一枚硬币的某次实验的结果.

抛掷次数 n	300	500	700	900	1100	1300	1500	1700	1900	2000
“正面向上”的次数 m	137	233	335	441	544	650	749	852	946	1004
“正面向上”的频率 $\frac{m}{n}$	0.457	0.466	0.479	0.490	0.495	0.500	0.499	0.501	0.498	0.502

估计此次实验硬币“正面向上”的概率是_______.

13. 如图，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$\odot O$ 经过点 A，C，D 与 BC 交于点 E，连接 AE，若 $\angle D=72°$，则 $\angle BAE=$_____________.



14. 如图 1，将矩形 $ABCD$ 和正方形 $EFGH$ 分别沿对角线 AC 和 EG 剪开，拼成如图 2 所示的平行四边形 $PQMN$，中间空白部分的四边形 $KRST$ 是正方形．如果正方形 $EFGH$ 和正方形 $KRST$ 的面积分别是 16 和 1，则矩形 $ABCD$ 的面积为_______.

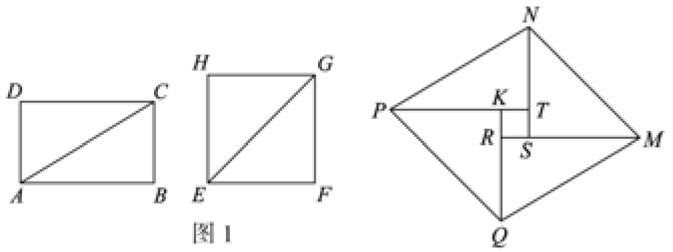


图 1　　图 2

15. 甲、乙两个芭蕾舞团演员的身高（单位：cm）如下表：

甲	164	164	165	165	166	166	167	167
乙	163	163	165	165	166	166	168	168

两组芭蕾舞团演员身高的方差较小的是______．（填“甲”或“乙”）

16. 对于题目：“如图 1，平面上，正方形内有一长为 12 、宽为 6 的矩形，它可以在正方形的内部及边界通过移转（即平移或旋转）的方式，自由地从横放移转到竖放，求正方形边长的最小整数 n．”甲、乙、丙作了自认为边长最小的正方形，先求出该边长 x，再取最小整数 n．

甲：如图 2，思路是当 x 为矩形对角线长时就可移转过去；结果取 n=14.

乙：如图 3，思路是当 x 为矩形外接圆直径长时就可移转过去；结果取 n=14.

丙：如图 4，思路是当 x 为矩形的长与宽之和的 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 倍时就可移转过去；结果取 n=13.

甲、乙、丙的思路和结果均正确的是___________．

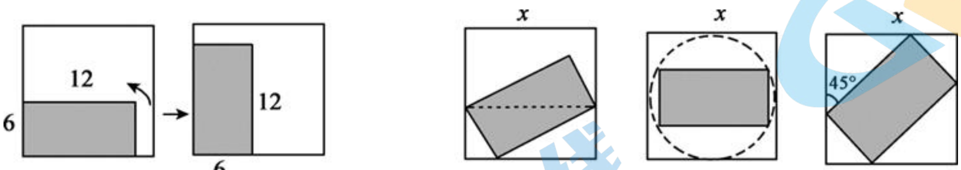


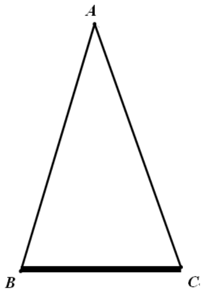
图1　图2　图3　图4

三、解答题（本题共 68 分，第 17-22 题，每小题 5 分，第 23-26 题，每小题 6 分，第 27，28 题，每小题 7 分）

17. 计算：$4\cos 45° + \left(\sqrt{3}-1\right)^0 - \sqrt{8} + 2^{-1}$．

18. 解不等式组 $\begin{cases} 4(x+1)\le 2x+6 \\ x-3<\dfrac{x-5}{3} \end{cases}$，并写出它的所有非负整数解.

19. 已知：$\triangle ABC$ 中，$\angle A=36°$，$AB=AC$，用尺规求作一条过点 B 的直线，使得截出的一个三角形与 $\triangle ABC$ 相似并证明.（保留作图痕迹，不写作法）

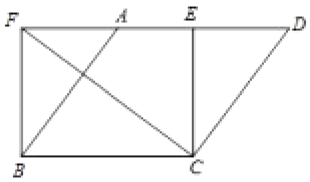


20. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2+2x+m-4=0$ 有两个实数根.

（1）求 m 的取值范围；

（2）写出一个满足条件的 m 的值，并求出此时方程的根.

21. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，$CE\perp AD$ 于点 E，延长 DA 至点 F，使得 $EF=DA$，连接 BF，CF.

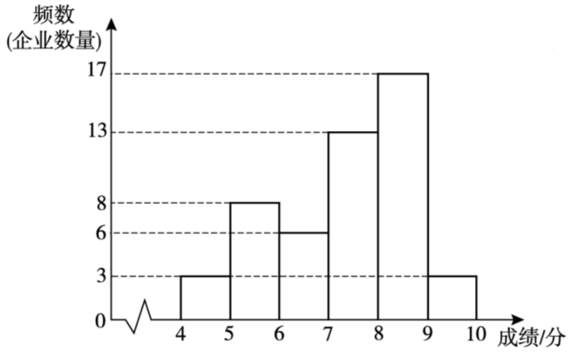


（1）求证：四边形 $BCEF$ 矩形；

（2）若 $AB=3$，$CF=4$，$DF=5$，求 EF 的长.

22. 为了解某地区企业信息化发展水平，从该地区中随机抽取 50 家企业调研，针对体现企业信息化发展水平的 A 和 B 两项指标进行评估，获得了它们的成绩（十分制），并对数据（成绩）进行整理、描述和分析．下面给出了部分信息.

a．A 项指标成绩的频数分布直方图如下（数据分成 6 组：$4\leqslant x<5$，$5\leqslant x<6$，$6\leqslant x<7$，$7\leqslant x<8$，$8\leqslant x<9$，$9\leqslant x\leqslant 10$）：



b．A 项指标成绩在 $7 \leqslant x < 8$ 这一组的是：

7.2 7.3 7.5 7.67 7.7 7.71 7.75 7.82 7.86 7.9 7.92 7.93 7.97

c． A, B 两项指标成绩　平均数、中位数、众数如下：

	平均数	中位数	众数
A 项指标成绩	7.37	m	8 2
B 项指标成绩	7.21	7.3	8

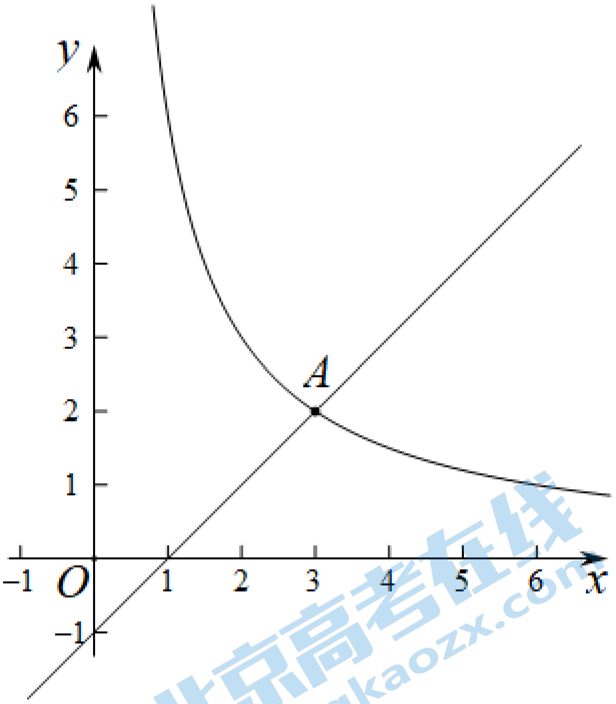
根据以上信息，回答下列问题：

（1）写出表中 m 的值

（2）在此次调研评估中，某企业 A 项指标成绩和 B 项指标成绩都是 7.5 分，该企业成绩排名更靠前的指标是______________（填“A”或“B”），理由是_____________；

（3）如果该地区有 500 家企业，估计 A 项指标成绩超过 7.68 分的企业数量．

23. 在平面直角坐标系 xOy 中，反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}(x>0)$ 的图象与直线 $y=x-1$ 交于点 $A(3, m)$



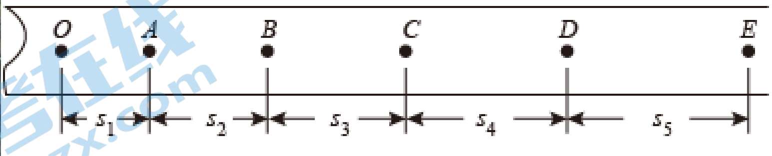
（1）求 k 的值；

（2）已知点 $P(n,0)(n>0)$，过点 P 作垂直于 x 轴的直线，交直线 $y=x-1$ 于点 B，交函数 $y=\frac{k}{x}(x>0)$ 于点 C.

①当 $n=4$ 时，判断线段 PC 与 BC 的数量关系，并说明理由；

②若 $PC\leqslant BC$，结合图象，直接写出 n 的取值范围.

24. 某地想要建造儿童直线斜坡轨道滑车设施（如图），为防止滑车下滑速度过快，轨道与地面夹角要适度，根据儿童能够在斜坡轨道上的滑行时间来确定直线斜坡轨道的长度．为解决此问题，小明用小车沿斜面滑下的实验来模拟此过程．借助打点计时器（一种测量短暂时间的工具，每隔 0.02s 打一次点），让小车带动纸带通过打点计时器，再按顺序测得相邻各点之间的距离数据如下表：



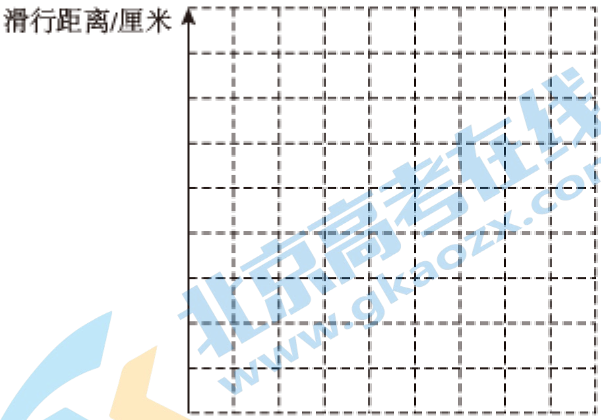
打点计时器如图所示

时间（秒）	0	0.02	0.04	0.06	0 08	0.10

相邻各点的距离（厘米）	0	0.3	0.5	0.7	0 9	1.0

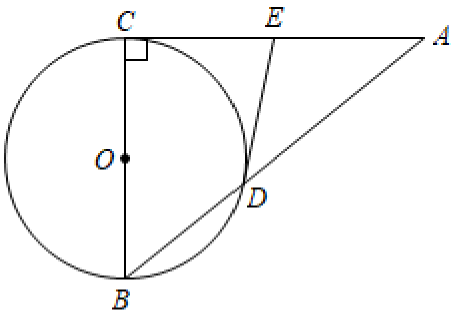
（1）当时间为 0.04 秒时，滑行距离是______厘米；

（2）请在下图网格中建立平面直角坐标系，以时间为横坐标，以滑行距离为纵坐标，根据表格中的数据计算并描点，用平滑的曲线连起来；



（3）通过计算确定滑车能够在斜坡轨道上滑行 10 秒时直线斜坡轨道的长度.

26. 如图，在△*ABC* 中，∠*ACB*=90°，以 *BC* 为直径的⊙*O* 交 *AB* 于点 *D*，*E* 是 *AC* 中点，连接 *DE*.



（1）判断 *DE* 与⊙*O* 的位置关系并说明理由；

（2）设 *CD* 与 *OE* 的交点为 *F*，若 *AB*=10，*BC*=6，求 *OF* 的长.

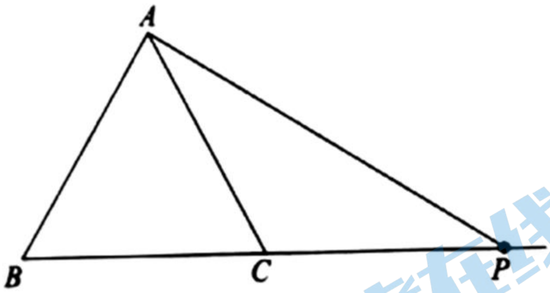
27. 在平面直角坐标系 *xOy* 中，$M\left(a, y_1\right)$，$N\left(a+t, y_2\right)$ 为抛物线 $y=x^2+x$ 上两点，其中 $t>0$.

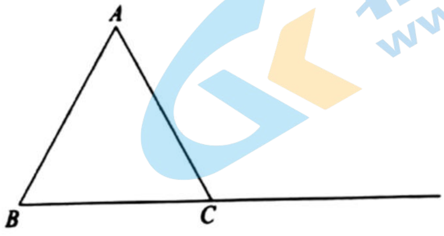
（1）求抛物线与 *x* 轴的交点坐标；

（2）若 $t=1$，点 *M*，*N* 在抛物线上运动，当 $\left|y_1-y_2\right|=1$ 时，求 *a* 的值；

（3）记抛物线在 M，N 两点之间的部分为图象 G（包含 M，N 两点），若图象 G 上最高点与最低点的纵坐标之差为 1，直接写出 t 的取值范围.

29. ΔABC 是等边三角形，点 P 在 BC 的延长线上，以 P 为中心，将线段 PC 逆时针旋转 n°（$0<n<180$）得线段 PQ，连接 AP， BQ .





备用图

（1）如图，若 $PC=AC$，画出当 $BQ//AP$ 时的图形，并写出此时 n 的值；

（2）M 为线段 BQ 的中点，连接 PM . 写出一个 n 的值，使得对于 BC 延长线上任意一点 P，总有 $MP=\frac{1}{2}AP$，并说明理由.

30. A,B 是圆上的两个点，点 P 在⊙C 的内部．若 $\angle APB$ 为直角，则称 $\angle APB$ 为 AB 关于⊙C 的内直角，特别地，当圆心 C 在 $\angle APB$ 边（含顶点）上时，称 $\angle APB$ 为 AB 关于⊙C 的最佳内直角．如图1，$\angle AMB$ 是 AB 关于⊙C 的内直角，$\angle ANB$ 是 AB 关于⊙C 的最佳内直角．在平面直角坐标系 xOy 中.

（1）如图 2，⊙O 的半径为 5，$A(0,-5)$, $B(4,3)$ 是⊙O 上两点.

①已知 $P_1(1,0)$，$P_2(0,3)$，$P_3(-2,1)$，在 $\angle AP_1B$, $\angle AP_2B$, $\angle AP_3B$, 中，是 AB 关于⊙O 的内直角的是______；

②若在直线 $y=2x+b$ 上存在一点 P，使得 $\angle APB$ 是 AB 关于⊙O 的内直角，求 b 的取值范围.

（2）点 E 是以 $T(t,0)$ 圆心，4 为半径的圆上一个动点，⊙T 与 x 轴交于点 D（点 D 在点 T 的右边）．现有点 $M(1,0)$, $N(0,n)$，对于线段 MN 上每一点 H，都存在点 T，使 $\angle DHE$ 是 DE 关于⊙T 的最佳内直角，请直接写出 n 的最大值，以及 n 取得最大值时 t 的取值范围.

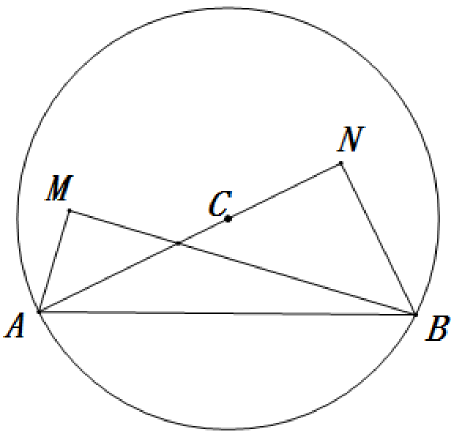


图 1

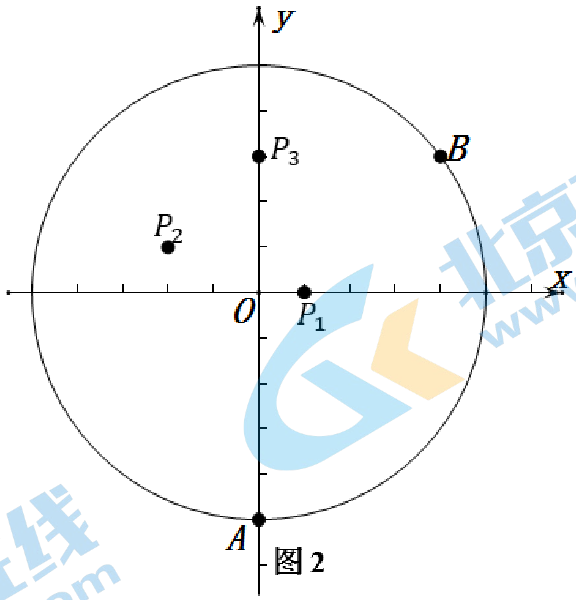
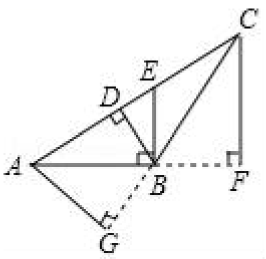


图 2

参考答案

一、选择题（本题共 16 分，每小题 2 分）下面 1-8 题均有四个选项，符合题意的选项只有一个.

1. 如图所示，△ABC 中 AB 边上的高线是（　　）



A. 线段 AG　　B. 线段 BD　　C. 线段 BE　　D. 线段 CF

【1 题答案】

【答案】D

【解析】

【分析】根据三角形高的定义进行判断即可得.

【详解】根据三角形高线的定义可知，△ABC 中 AB 边上高线应该是过点 C 向 AB 所在直线所作的垂线段，

所以△ABC 中 AB 边上的高线是线段 CF，

故选 D.

【点睛】本题考查了三角形的高线，正确理解三角形的高线的定义是解题的关键.

2. 图 1 是数学家皮亚特•海恩（Piet Hein）发明的索玛立方块，它由四个及四个以内大小相同的立方体以面相连接构成的不规则形状组件组成．图 2 不可能是下面哪个组件的视图（　　）


图1

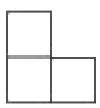
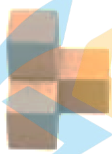
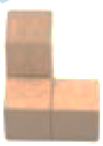
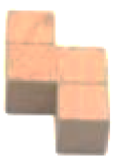
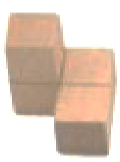


图2

A. 　B. 　C. 　D. 

【2 题答案】

【答案】C

【解析】

【分析】依次分析所给几何体从正面看及从左面看得到的图形是否与所给图形一致即可.

【详解】A、主视图和左视图从左往右 2 列正方形的个数均依次为 2，1，符合所给图形；

B、主视图和左视图从左往右 2 列正方形的个数均依次为 2，1，符合所给图形；

C、主视图左往右 2 列正方形的个数均依次为 1，1，不符合所给图形；

D、主视图和左视图从左往右 2 列正方形的个数均依次为 2，1，符合所给图形.

故选 C.

【点睛】考查由视图判断几何体；用到的知识点为：主视图，左视图分别是从正面看及从左面看得到的图形.

3. 当函数 $y=(x-1)^2-2$ 的函数值 y 随着 x 的增大而减小时，x 的取值范围是（　　）

A. $x>0$　　　　B. $x<1$　　　　C. $x>1$　　　　D. x 为任意实数

【3 题答案】

【答案】B

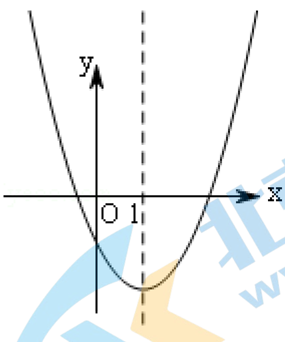
【解析】

【分析】利用二次函数的增减性求解即可，画出图形，可直接看出答案.

【详解】解：对称轴是：$x=1$，且开口向上，如图所示，

∴当 $x<1$ 时，函数值 y 随着 x 的增大而减小；

故选 B.



【点睛】本题主要考查了二次函数的性质，解题的关键是熟记二次函数的性质.

4. 正五边形的内角和是（　）

A. 360°　　　　　B. 540°　　　　　C. 720°　　　　　D. 900°

【4 题答案】

【答案】B

【解析】

【分析】n 边形的内角和是 $\left(n-2\right)\cdot 180°$ ，把多边形的边数代入公式，就得到多边形的内角和.

【详解】（5﹣2）×180°=540°.

故选 B.

【点睛】本题考查了多边形的内角和与外角和定理，解决本题的关键是正确运用多边形的内角和公式，是需要熟记的内容.

5. 如果 $x^2+x=3$，那么代数式 $(x+1)(x-1)+x(x+2)$ 的值是（　）

A. 2　　　　　B. 3　　　　　C. 5　　　　　D. 6

【5 题答案】

【答案】C

【解析】

【分析】先将代数式 $(x+1)(x-1)+x(x+2)$ 进行化简，然后代入求值.

【详解】解：$(x+1)(x-1)+x(x+2)$ =x²-1+x²+2x=2(x²+x)-1.

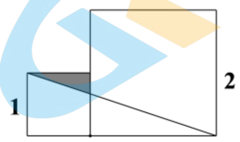
∵ $x^2+x=3$，

∴原式=2×3$-1=5$.

故选 C.

【点睛】此题主要考查了代数式求值问题，要熟练掌握，求代数式的值可以直接代入、计算．如果给出的代数式可以化简，要先化简再求值.

6. 把边长分别为 1 和 2 的两个正方形按图的方式放置.则图中阴影部分的面积为（ ）



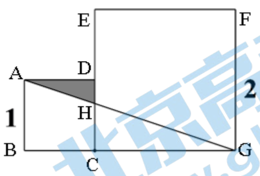
A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{5}$　　D. $\frac{1}{4}$

【6 题答案】

【答案】A

【解析】

【分析】对图上各边标上字母，由题意可证得△ADH∽△GCH，利用相似三角形对应线段成比例可知 $\frac{1}{2}=\frac{DH}{1-DH}$，可求得阴影部分面积的高 DH，进而求得阴影部分面积.

【详解】

∵∠CHG=∠DHA，∠HCG=∠ADH

∴△ADH∽△GCH

∴ $\frac{AD}{CG}=\frac{DH}{CH}$

即 $\frac{1}{2}=\frac{DH}{1-DH}$

解得 DH= $\frac{1}{3}$

∴阴影部分面积 $=1\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

【点睛】本题考查了相似三角形的性质与判定，求阴影部分的面积，解本题的关键是求得阴影部分的高进而即可解题.

7. 某便利店的咖啡单价为 10 元/杯，为了吸引顾客，该店共推出了三种会员卡，如下表：

会员卡类型	办卡费用/元	有效期	优惠方式
A 类	40	1 年	每杯打九折
B 类	80	1 年	每杯打八折

C类	130	1年	一次性购买2杯，第二杯半价

例如，购买A类会员卡，1年内购买50次咖啡，每次购买2杯，则消费$40+2\times50\times(0.9\times10)=940$元．若小玲1年内在该便利店购买咖啡的次数介于75~85次之间，且每次购买2杯，则最省钱的方式为（　）

A. 购买A类会员卡

B. 购买B类会员卡

C. 购买C类会员卡

D. 不购买会员卡

【7题答案】

【答案】C

【解析】

【分析】设一年内在该便利店买咖啡的次数为x次，消费的钱数为y元，根据题意得：列出3类会员卡用含x的关系表示消费的费用y，再确定y的范围，进行比较即可解答．

【详解】设一年内在该便利店买咖啡的次数为x次，消费的钱数为y元，根据题意得：$y_A=40+0.9\times2\times10x=40+18x$，$y_B=80+0.8\times2\times10x=80+16x$，$y_C=130+15\times x=130+15x$，

当$75\le x\le85$时，

$1390\le y_A\le1570$；

$1280\le y_B\le1440$；

$1255\le y_C\le1405$；

由此可见，C类会员年卡消费最低，所以最省钱的方式为购买C类会员年卡．

故选：C．

【点睛】本题考查了一次函数的应用，解决本题的关键是根据题意，列出函数关系式，并确定函数值的范围．

8. 在一次生活垃圾分类知识竞赛中，某校七、八年级各有100名学生参加，已知七年级男生成绩的优秀率为40%，女生成绩的优秀率为60%；八年级男生成绩的优秀率为50%，女生成绩的优秀率为70%对于此次竞赛的成绩，下面有三个推断：

①七年级男生成绩的优秀率小于八年级男生成绩的优秀率；

②七年级学生成绩的优秀率一定小于八年级学生成绩的优秀率；

③七、八年级所有男生成绩的优秀率一定小于七、八年级所有女生成绩的优秀率．

所有合理推断的序号是（　）

A. ①②　　　　B. ①③　　　　C. ②③　　　　D. ①②③

【8 题答案】

【答案】B

【解析】

【分析】由题意直接根据给出条件，利用统计学知识逐一加以判断即可得出答案.

【详解】解：①七年级男生成绩的优秀率即 40%小于八年级男生成绩的优秀率即 50%，故正确；

②七年级学生成绩的优秀率在 40%与 60%之间，八年级学生成绩的优秀率在 50%与 70%之间，不能确定哪个年级的优秀率大，故错误；

③七、八年级所有男生成绩的优秀率在 40%与 50%之间一定小于七、八年级所有女生成绩的优秀率即在 50%与 70%之间，故正确.

故答案为：B.

【点睛】本题考查统计学知识，熟练掌握数据的处理与应用以及判断优秀率的大小范围是解题的关键.

二、填空题（本题共 16 分，每小题 2 分）

9. 若分式$\frac{1-x}{x}$的值为 0，则 x 的值为_______.

【9 题答案】

【答案】1

【解析】

【分析】根据分式值为零的性质可知，$1 - x = 0$，且 $x\neq0$，然后计算即可.

【详解】解：∵分式$\frac{1-x}{x}$的值为 0

∴$1 - x = 0$，且 $x\neq0$

∴$x = 1$

故答案为：1.

【点睛】本题主要考查了分式值为零时的性质. 熟知当分式的分子等于零，且分母不为零时，是分式值为零的条件，是解决本题的关键.

10. 已知“若 $a>b$，则 $ac<bc$”是真命题，请写出一个满足条件 c 的值是__________.

【10 题答案】

【答案】–1（答案不唯一，负数即可）

【解析】

【分析】当 $a>b$，要使符号变号，则只需不等式两边同时乘同一个负数 c 即可.

【详解】当 $a>b$，要使 $ac<bc$ 成立，即不等式两边同时乘一个 c 符号会变号，则使 c 是负数即可，则可使 $c=-1$.

【点睛】本题考查了真命题和不等式的性质知识点，不等式符号要变号，就使不等式两边同时乘或除同一个负数即可，这一性质是解题的关键.

11. 已知圆锥的母线长为 5cm，侧面积为 $15\pi cm^2$，则这个圆锥的底面圆半径为______cm.

【11 题答案】

【答案】3

【解析】

【分析】根据圆锥的侧面积和圆锥的母线长求得圆锥的弧长，利用圆锥的侧面展开扇形的弧长等于圆锥的底面周长求得圆锥的底面半径即可.

【详解】∵圆锥的母线长是 5cm，侧面积是 15πcm2，

∴圆锥的侧面展开扇形的弧长为：$\frac{2\times 15\pi}{5}=6\pi$，

∵锥的侧面展开扇形的弧长等于圆锥的底面周长，

∴$r=\frac{6\pi}{2\pi}=3$cm，

故答案为 3.

【点睛】本题考查了圆锥的计算，解题的关键是正确地进行圆锥与扇形的转化.

12. 下表显示了用计算机模拟随机抛掷一枚硬币的某次实验的结果.

抛掷次数 n	300	500	700	900	1100	1300	1500	1700	1900	2000
“正面向上”的次数 m	137	233	335	441	544	650	749	852	946	1004
“正面向上”的频率 $\frac{m}{n}$	0.457	0.466	0.479	0.490	0.495	0.500	0.499	0.501	0.498	0.502

估计此次实验硬币“正面向上”的概率是_______.

【12 题答案】

【答案】$\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】利用频率估算概率.

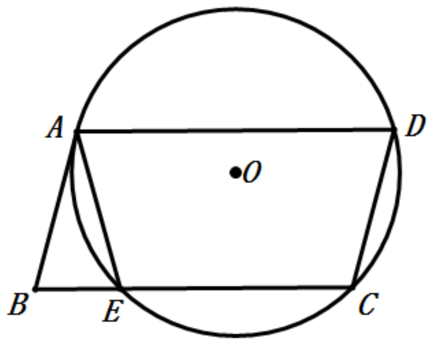
【详解】∵由表格可得：随着抛掷次数的增多，出现正面向上的频率越来越接近 0.5，

∴“正面向上”的概率为$\frac{1}{2}$.

故答案为：$\frac{1}{2}$.

【点睛】考查了频率和概率的定义以及它们之间的相互关系，解题关键是理解在相同的条件下做大量重复试验，一个事件 A 出现的次数 和总的试验次数 n 之比，称为事件 A 在这 n 次试验中出现的频率．当试验次数 n 很大时，频率将稳定在一个常数附近．n 越大，频率偏离这个常数较大的可能性越小．这个常数称为这个事件的概率．

13. 如图，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$\odot O$ 经过点 A，C，D 与 BC 交于点 E，连接 AE，若 $\angle D=72°$，则 $\angle BAE=$______________.



【13 题答案】

【答案】36°

【解析】

【分析】由圆的内接四边形内对角互补性质，解得 $\angle AEC=108°$，进而由邻补角性质解得 $\angle AEB=72°$，再由平行四边形对角相等性质，解得 $\angle B=\angle D=72°$，最后由三角形内角和 180°解题即可．

【详解】四边形 $ABCD$ 是$\odot O$ 的内接四边形

$\therefore \angle D+\angle AEC=180°$

$\because \angle D=72°$

$\therefore \angle AEC=180°-72°=108°$，

$\therefore \angle AEB=180°-108°=72°$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore \angle B=\angle D=72°$

$\therefore \angle BAE=180°-2\times 72°=36°$

故答案为：36°

【点睛】本题考查圆内接四边形性质、平行四边形性质、邻补角性质等知识，是重要考点，难度较易，掌握相关知识是解题关键．

14. 如图 1，将矩形 $ABCD$ 和正方形 $EFGH$ 分别沿对角线 AC 和 EG 剪开，拼成如图 2 所示的平行四边形 $PQMN$，中间空白部分的四边形 $KRST$ 是正方形．如果正方形 $EFGH$ 和正方形 $KRST$ 的面积分别是 16 和 1，则矩形 $ABCD$ 的面积为_______．

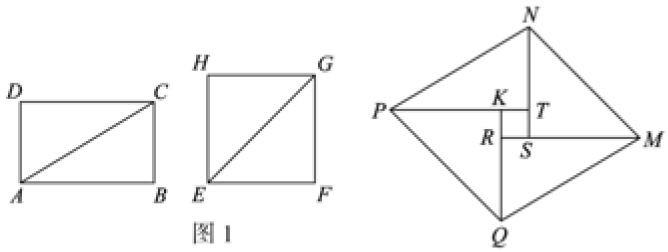


图 1

图 2

【14 题答案】

【答案】15

【解析】

【分析】根据正方形的面积公式求得正方形 EFCH 和正方形 KRST 的边长，再根据线段的和差关系可求矩形 ABCD 的长和宽，再根据矩形的面积公式即可求解.

【详解】解：∵正方形 EFCH 和正方形 KRST 的面积分别是 16 和 1，

∴正方形 EFCH 和正方形 KRST 的边长分别是 4 和 1，

则矩形 ABCD 的面积为（4+1）×（4-1）=15.

故答案为：15.

【点睛】本题考查图形的拼剪，矩形的性质，正方形的性质等知识，解题的关键是学会利用数形结合的思想解决问题.

15. 甲、乙两个芭蕾舞团演员的身高（单位：cm）如下表：

甲	164	164	165	165	166	166	167	167
乙	163	163	165	165	166	166	168	168

两组芭蕾舞团演员身高的方差较小的是______.（填“甲”或“乙”）

【15 题答案】

【答案】甲

【解析】

【分析】先算出两组数据的平均数，再计算两组数据的方差.

【详解】解：甲组演员身高的平均数为：$\frac{1}{8}$（164×2+165×2+166×2+167×2）

=165.5，

乙组演员身高的平均数为：$\frac{1}{8}$（163×2+165×2+166×2+168×2）

=165.5，

$\because S_{甲}^2=\frac{1}{8}$[（164-165.5）^{2}+（164-165.5）^{2}+（165-165.5）^{2}+（165-165.5）^{2}+（166-165.5）^{2}+（166-165.5）^{2}+（167-165.5）^{2}+（167-165.5）^{2}]

$=\frac{1}{8}$（2.25+2.25+0.25+0.25+0.25+0.25+2.25+2.25）

=1.25；

$S_{乙}^2=\frac{1}{8}$[（163-165.5）^{2}+（163-165.5）^{2}+（165-165.5）^{2}+（165-165.5）^{2}+（166-165.5）^{2}+（166-165.5）^{2}+（168-165.5）^{2}+（168-165.5）^{2}]

$=\frac{1}{8}$（6.25+6.25+0.25+0.25+0.25+0.25+6.25+6.25）

=3.25；

∴甲组芭蕾舞团演员身高的方差较小.

故答案为：甲.

【点睛】本题考查了方差的计算，掌握计算方差的公式是解决本题的关键.

16. 对于题目："如图 1，平面上，正方形内有一长为 12 、宽为 6 的矩形，它可以在正方形的内部及边界通过移转（即平移或旋转）的方式，自由地从横放移转到竖放，求正方形边长的最小整数 n．"甲、乙、丙作了自认为边长最小的正方形，先求出该边长 x，再取最小整数 n．

甲：如图 2，思路是当 x 为矩形对角线长时就可移转过去；结果取 n=14.

乙：如图 3，思路是当 x 为矩形外接圆直径长时就可移转过去；结果取 n=14.

丙：如图 4，思路是当 x 为矩形的长与宽之和的 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 倍时就可移转过去；结果取 n=13.

甲、乙、丙的思路和结果均正确的是___________．

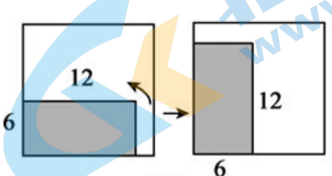


图1

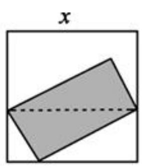


图2

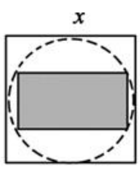


图3

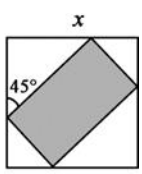


图4

【16 题答案】

【答案】甲、乙

【解析】

【分析】根据矩形长为 12 宽为 6，可得矩形的对角线长为$6\sqrt{5}$，由矩形在该正方形的内部及边界通过平移或旋转的方式，自由地从横放变换到竖放，可得该正方形的边长不小于$6\sqrt{5}$，进而可得正方形边长的最小整数 n 的值.

【详解】∵矩形长为 12 宽为 6，

∴矩形　对角线长为：$n=\sqrt{6^2+12^2}=6\sqrt{5}$，

∵矩形在该正方形的内部及边界通过平移或旋转的方式，自由地从横放变换到竖放，

∴该正方形的边长不小于$6\sqrt{5}$，

∵$13<6\sqrt{5}<14$，

∴该正方形边长的最小整数 n 为 14.

故甲的思路正确，长方形对角线最长，只要对角线能通过就可以，结果也正确；

乙的思路正确，长方形对角线就是圆的直径最长，只要圆能通过就可以，结果也正确；

丙的思路错误，长方形对角线最长，只要对角线能通过才可以，故丙的思路与结果都错误；

故答案为：甲、乙.

【点睛】本题考查了矩形的性质、圆的性质与旋转的性质，熟练运用矩形的性质是解题的关键.

三、解答题（本题共 68 分，第 17-22 题，每小题 5 分，第 23-26 题，每小题 6 分，第 27，28 题，每小题 7 分）

17. 计算：$4\cos 45°+\left(\sqrt{3}-1\right)^0-\sqrt{8}+2^{-1}$.

【17 题答案】

【答案】$\frac{3}{2}$

【解析】

【分析】先分别根据特殊角的三角函数值、零指数幂、二次根式的化简、负指数幂计算，然后根据实数混合运算法则计算即可求得结果.

【详解】解：原式$=4\times\frac{\sqrt{2}}{2}+1-2\sqrt{2}+\frac{1}{2}$

$=2\sqrt{2}+\frac{3}{2}-2\sqrt{2}$

$=\frac{3}{2}$.

【点睛】本题考查了特殊角的三角函数值、零指数幂、二次根式的化简、负指数幂，熟练掌握相关运算法则和熟记特殊角的三角函数值是解题的关键.

18. 解不等式组$\begin{cases}4(x+1)\le 2x+6\\ x-3<\dfrac{x-5}{3}\end{cases}$，并写出它的所有非负整数解.

【18题答案】

【答案】不等式组的解集为$x\leqslant 1$，所有非负整数解为0，1

【解析】

【分析】先分别求出各不等式的解集，再求出其公共解集，在其公共解集内找出符合条件的x的所有非负整数解即可.

【详解】解：原不等式组为$\begin{cases}4(x+1)\le 2x+6, & ①\\ x-3<\dfrac{x-5}{3}. & ②\end{cases}$

解不等式①，得$x\leqslant 1$.

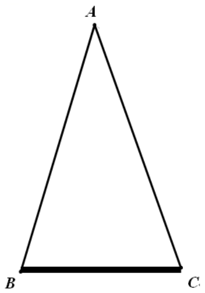
解不等式②，得$x<2$.

$\therefore$原不等式组的解集为$x\leqslant 1$.

$\therefore$原不等式组的所有非负整数解为0，1.

【点睛】本题考查的是解一元一次不等式组及求一元一次不等式组的非负整数解，求不等式的公共解，要遵循以下原则：同大取较大，同小取较小，小大大小中间找，大大小小解不了.

19. 已知：$\triangle ABC$中，$\angle A=36°$，$AB=AC$，用尺规求作一条过点B的直线，使得截出的一个三角形与$\triangle ABC$相似并证明.（保留作图痕迹，不写作法）



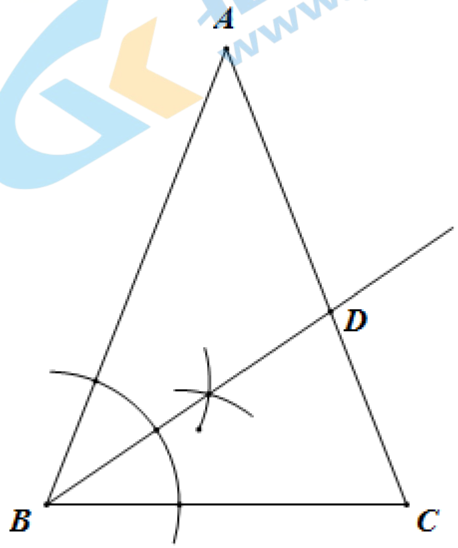
【19 题答案】

【答案】见详解

【解析】

【分析】作$\angle ABC$的角平分线，交AC于点D，再根据两角对应相等即可.

【详解】解：如图，直线BD即为所求.



证明：$\because \angle A=36°$， $AB=AC$，

$\therefore \angle ABC=\angle ACB=72°$，

$\because BD$平分$\angle ABC$，

$\therefore \angle BCD=36°$，

$\therefore \angle BCD=\angle A$，

$\because \angle C=\angle A$，

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle BCD$

【点睛】本题主要考查了角平分线的作法，以及三角形相似的判定，解题的关键是三角形相似的判定.

20. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2+2x+m-4=0$ 有两个实数根.

（1）求 m 的取值范围；

（2）写出一个满足条件的 m 的值，并求出此时方程的根.

【20 题答案】

【答案】（1）$m\le 5$；（2）$x_1=1, x_2=-3$（答案不唯一）

【解析】

【分析】（1）先确定 a、b、c，然后运用一元二次方程跟的判别式解答即可；

（2）根据（1）确定的 m 的取值范围，取一个合适的 m 值代入，然后解一元二次方程即可.

【详解】（1）解：$a=1, b=2, c=m-4$

$\therefore \triangle=b^2-4ac$

$=2^2-4(m-4)$

$=20-4m$

$\because$ 一元二次方程 $x^2+2x+m-4=0$ 有两个实数根，

$\therefore 20-4m\ge 0$

$m\le 5$.

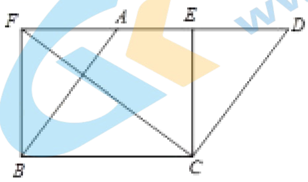
（2）解：当 $m=1$ 时，$x^2+2x-3=0$.

则（x-1）（x+3）=0

解得 $x_1=1, x_2=-3$（答案不唯一）.

【点睛】本题考查了一元二次方程方程根的判别式，掌握判别式的大小与一元二次方程根的关系是解答本题的关键.

21. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，$CE\perp AD$ 于点 E，延长 DA 至点 F，使得 $EF=DA$，连接 BF，CF.



（1）求证：四边形 $BCEF$ 是矩形；

（2）若 $AB=3$，$CF=4$，$DF=5$，求 EF 的长．

【21 题答案】

【答案】（1）见解析；（2）$EF=\frac{16}{5}$．

【解析】

【分析】（1）先证明四边形 $BCEF$ 是平行四边形，再根据垂直，即可求证；

（2）根据勾股定理的逆定理，求得△CDF 是直角三角形，等面积法求得 CE，勾股定理即可求解．

【详解】（1）证明：∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴$AD\parallel BC$，$AD=BC$，

∵$EF=DA$，

∴$EF=BC$，$EF\parallel BC$，

∴四边形 $BCEF$ 是平行四边形，

又∵$CE\perp AD$，

∴$\angle CEF=90°$，

∴平行四边形 $BCEF$ 是矩形；

（2）解：∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴$CD=AB=3$，

∵$CF=4$，$DF=5$，

∴$CD^2+CF^2=DF^2$，

∴△CDF 是直角三角形，$\angle DCF=90°$，

∴△CDF 的面积$=\frac{1}{2}DF\times CE=\frac{1}{2}CF\times CD$，

∴$CE=\frac{4\times 3}{5}=\frac{12}{5}$，

由（1）得：$EF=BC$，四边形 $BCEF$ 是矩形，

∴$\angle FBC=90°$，$BF=CE=\frac{12}{5}$，

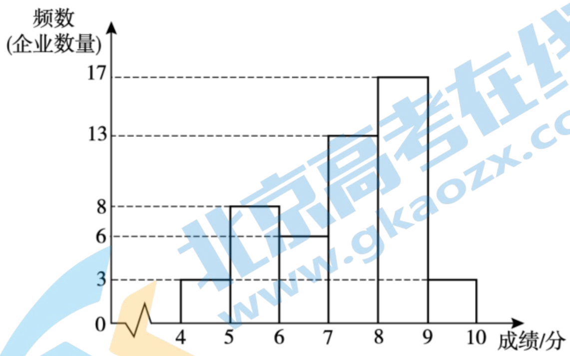
∴$BC=\sqrt{CF^2-BF^2}=\frac{16}{5}$，

∴$EF=\frac{16}{5}$．

【点睛】此题考查了矩形的判定与性质，平行四边形的性质，勾股定理以及逆定理，熟练掌握相关基本性质是解题的关键．

22. 为了解某地区企业信息化发展水平，从该地区中随机抽取 50 家企业调研，针对体现企业信息化发展水平的 A 和 B 两项指标进行评估，获得了它们的成绩（十分制），并对数据（成绩）进行整理、描述和分析．下面给出了部分信息．

a．A 项指标成绩的频数分布直方图如下（数据分成 6 组：$4\leqslant x<5$，$5\leqslant x<6$，$6\leqslant x<7$，$7\leqslant x<8$，$8\leqslant x<9$，$9\leqslant x\leqslant 10$）：



b．A 项指标成绩在 $7\leqslant x<8$ 这一组的是：

7.2 7.3 7.5 7.67 7.7 7.71 7.75 7.82 7.86 7.9 7.92 7.93 7.97

c．A, B 两项指标成绩的平均数、中位数、众数如下：

	平均数	中位数	众数
A 项指标成绩	7.37	m	8.2
B 项指标成绩	7.21	7.3	8

根据以上信息，回答下列问题：

（1）写出表中 m 的值

（2）在此次调研评估中，某企业 A 项指标成绩和 B 项指标成绩都是 7.5 分，该企业成绩排名更靠前的指标是_____________（填"A"或"B"），理由是_____________；

（3）如果该地区有 500 家企业，估计 A 项指标成绩超过 7.68 分的企业数量．

【22 题答案】

【答案】（1）7.84；（2）B，见解析（3）290

【解析】

【分析】（1）根据中位数定义，先把 50 名企业 A 项指标成绩排序，而中位数就是第 25，26 两项数据的平均数，易得（7.82+7.86）÷ 2 =7.84，即求出 m 的值；

（2）结合 A, B 两项指标成绩的平均数、中位数、众数综合评判：该企业 A 项指标成绩是 7.5 分，小于 A 项指标成绩的中位数，说明该企业 A 项指标成绩的排名在后 25 名；B 项指标成绩是 7.5 分，大于 B 项指标成绩的中位数，说明该企业 B 项指标成绩的排名在前 25 名，故让该企业成绩排名更靠前的指标是 B.

（3）先根据样本数据计算出样本中 A 项指标成绩超过 7.68 分的企业数量，再表示这部分在样本中的占比为 $\frac{29}{50}$，再用该地区的企业总数乘以 $\frac{29}{50}$，即可估算出该地区 A 项指标成绩超过 7.68 分的企业数量.

【详解】解：（1）根据中位数的定义，把 50 名企业 A 项指标成绩排序，

可得第 25，26 两项数据分别是 7.82 和 7.86，

∴中位数为（7.82+7.86）÷ 2 =7.84

故 $\mathrm{m} = 7.84$.

（2）在此次调研评估中，该企业成绩排名更靠前的指标是 $\underline{B}$.

理由：该企业 A 项指标成绩是 7.5 分，小于 A 项指标成绩的中位数，说明该企业 A 项指标成绩的排名在后 25 名；B 项指标成绩是 7.5 分，大于 B 项指标成绩的中位数，说明该企业 B 项指标成绩的排名在前 25 名.

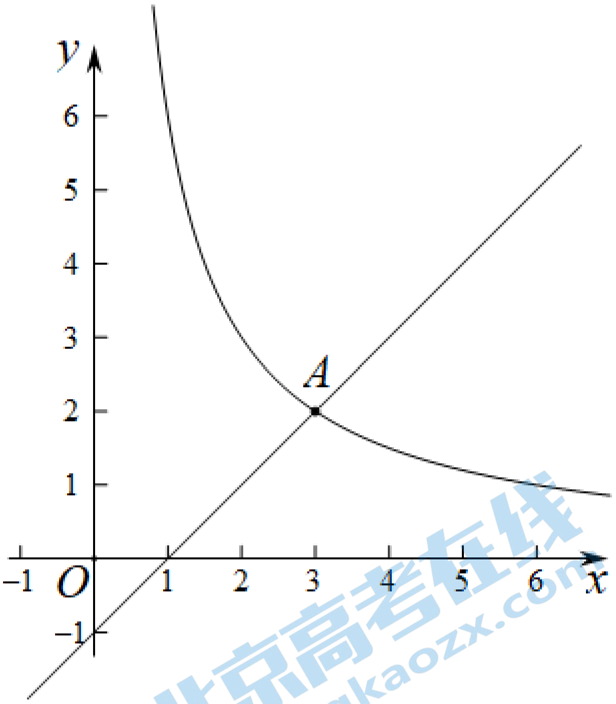
（3）根据题意可知，在样本中，由（1）排序知，A 项指标成绩在 $7 \leqslant x < 8$ 这一组，A 项指标成绩超过 7.68 分的企业数量是 9，A 项指标成绩在 $8 \leqslant x < 9$ 这一组的数量是 17，A 项指标成绩在 $9 \leqslant x \leqslant 10$ 这一组的数量是 3

∴9+17+3=29，

∴估计该地区 A 项指标成绩超过 7.68 分的企业数量为 $\frac{29}{50} \times 500 = 290$.

【点睛】本题主要考查了用样本数据估算总体，中位数的计算等知识，难度不大；准确掌握中位数及用样本数据估算总体的方法，是解决本题的关键.

23. 在平面直角坐标系 xOy 中，反比例函数 $y = \frac{k}{x}(x > 0)$　图象与直线 $y = x - 1$ 交于点 $A(3, m)$



（1）求 k 的值；

（2）已知点 $P(n,0)(n>0)$，过点 P 作垂直于 x 轴的直线，交直线 $y=x-1$ 于点 B，交函数 $y=\frac{k}{x}(x>0)$ 于点 C.

①当 $n=4$ 时，判断线段 PC 与 BC 的数量关系，并说明理由；

②若 $PC \leqslant BC$，结合图象，直接写出 n 的取值范围.

【23 题答案】

【答案】（1）$k=6$；（2）①$PC=\frac{3}{2}$，$BC=\frac{3}{2}$；理由见解析；②$0<n\le1$ 或 $n\ge4$.

【解析】

【分析】（1）把点 A 的坐标代入一次函数解析式即可求出 m 的值，再把点 A 的坐标代入反比例函数解析式即可求出 k 的值；

（2）①把 x=4 分别代入一次函数和反比例函数解析式求出点 B 和点 C 的坐标，即可判断出 PC 与 PB 的数量关系；

②结合图象及①中结论可得当 n≥4 或点 B 在 x 轴或 x 轴下方时 PC≤PB，即可确定出对应的 n 的取值范围.

【详解】（1）把 $x=3$ 代入 $y=x-1$ 得 $y=2$ ，

$\therefore A(3,2)$，

又 $y=\dfrac{k}{x}(x>0)$ 图象过点 $A(3,2)$，

解得 $k=6$；

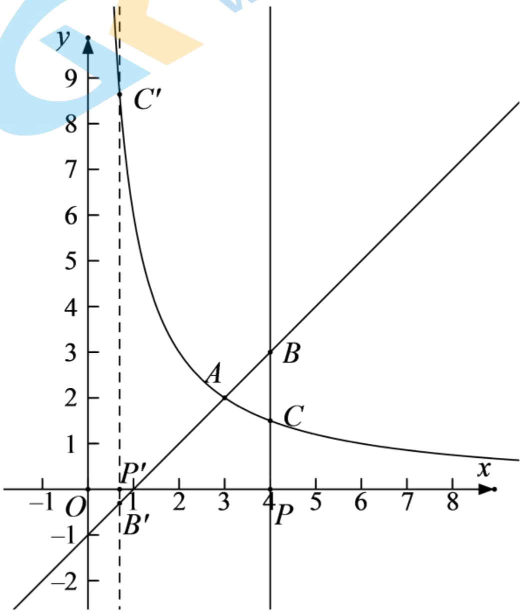
（2）① $PC=BC$，

当 $n=4$ 时，$B(4,3)$，$C\left(4,\dfrac{3}{2}\right)$，

$PC=\dfrac{3}{2}$，$BC=\dfrac{3}{2}$，

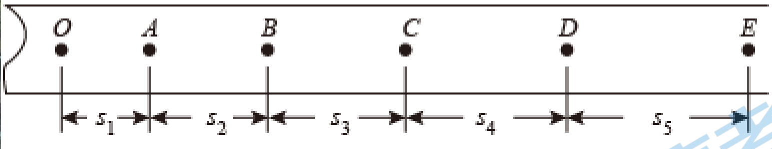
所以 $PC=BC$；

②根据图象可得：$0<n\le 1$ 或 $n\ge 4$．



【点睛】本题主要考查了一次函数图象和反比例函数图象的交点问题，根据函数图象上的点的坐标满足函数的解析式即可求出 m，k 的值；求出 $PC=PB$ 时 n 的值，然后结合函数的图象是解决（2）的关键．

24. 某地想要建造儿童直线斜坡轨道滑车设施（如图），为防止滑车下滑速度过快，轨道与地面夹角要适度，根据儿童能够在斜坡轨道上的滑行时间来确定直线斜坡轨道的长度．为解决此问题，小明用小车沿斜面滑下的实验来模拟此过程．借助打点计时器（一种测量短暂时间的工具，每隔 0.02s 打一次点），让小车带动纸带通过打点计时器，再按顺序测得相邻各点之间的距离数据如下表：

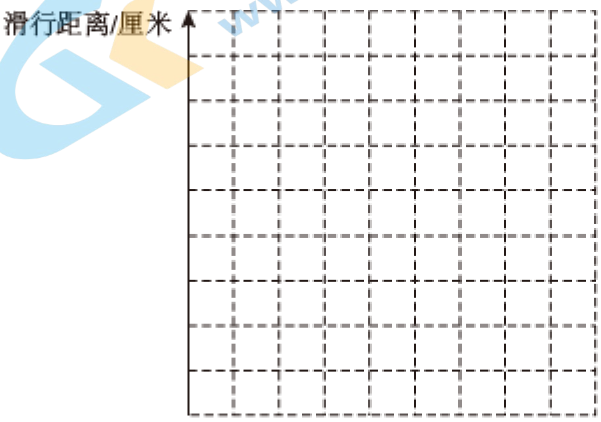


打点计时器如图所示

时间（秒）	0	0.02	0.04	0.06	0.08	0.10
相邻各点的距离（厘米）	0	0.3	0.5	0.7	0.9	1.0

（1）当时间为 0.04 秒时，滑行距离 ______厘米；

（2）请在下图网格中建立平面直角坐标系，以时间为横坐标，以滑行距离为纵坐标，根据表格中的数据计算并描点，用平滑的曲线连起来；



（3）通过计算确定滑车能够在斜坡轨道上滑行 10 秒时直线斜坡轨道的长度.

【24 题答案】

【答案】（1）0.8　（2）见解析

（3）250 米

【解析】

【分析】（1）根据表格即可求得答案；

（2）根据题意在网格中建立直角坐标系，然后描点、并用平滑的曲线连起来即可得到图像；

（3）根据 $\Delta S = a(\Delta t)^2$，求出加速度 a，然后根据 $S = \frac{1}{2}at^2$ 即可求解.

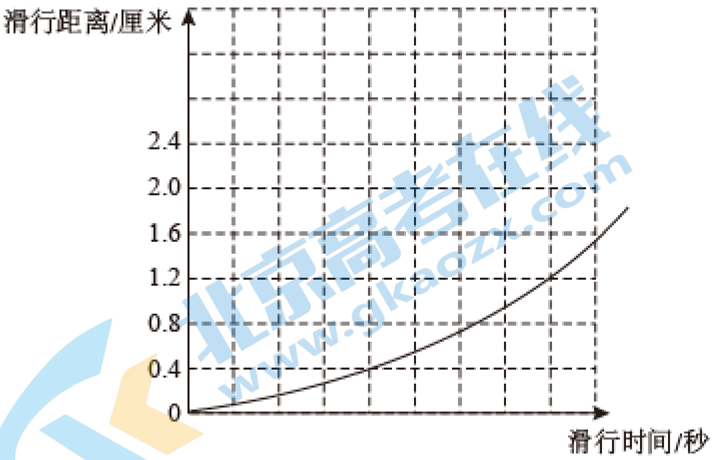
【小问 1 详解】

解：由表格可知，$OA=0.3$，$AB=0.5$，

∴当时间为 0.04 秒时，滑行距离是 0.8 厘米；

【小问 2 详解】

解：如图，



【小问 3 详解】

解：$\because \vartriangle S=a\left(\vartriangle t\right)^2$，

由表格可知：$\vartriangle t=0.02$ 秒，$\vartriangle S=0.2$ 厘米=0.002 米，

$\therefore 0.002=a\times\left(0.02\right)^2$，

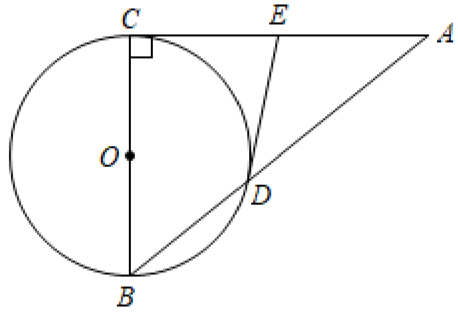
解得：$a=5$ 米/秒

$\therefore S=\dfrac{1}{2}at^2=\dfrac{5}{2}t^2$，

当 $t=10$ 秒时，$S=\dfrac{5}{2}\times100=250$ 米

【点睛】本题主要考查了探究匀变速直线运动规律，解题的关键是理解和掌握计算加速的方法.

26. 如图，在△*ABC* 中，∠*ACB*=90°，以 *BC* 为直径的⊙*O* 交 *AB* 于点 *D*，*E* 是 *AC* 中点，连接 *DE*.



（1）判断 DE 与⊙O 的位置关系并说明理由；

（2）设 CD 与 OE 的交点为 F，若 AB=10，BC=6，求 OF 的长．

【26 题答案】

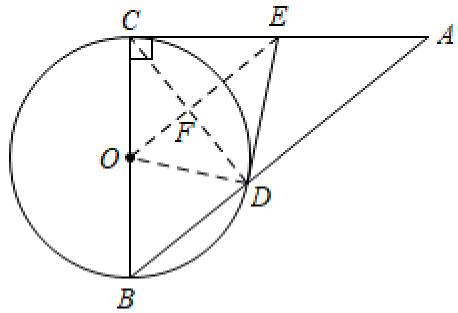
【答案】（1）DE 与⊙O 相切，证明见解析；（2）$OF=\frac{9}{5}$

【解析】

【分析】（1）连接 OD、CD、OE，通过全等三角形的性质求解即可；

（2）利用勾股定理求得线段 OE、CE 的长，利用相似三角形的性质求得 CF 的长，再用勾股定理求解即可．

【详解】（1）DE 与⊙O 相切，连接 OD、CD、OE



∵BC 为⊙O 的直径

∴$\angle CDA=\angle CDB=90°$

∵E 是 AC 中点

∴$ED=EC$

$\because OC=OD$，$OE=OE$

$\therefore \Delta OCE \cong \Delta ODE$（HL）

$\therefore \angle ODE=\angle OCE=90°$

$\therefore OD \perp DE$

$\therefore DE$ 与⊙O 相切

（2）$\because \angle ACB=90°$，$AB=10$，$BC=6$

$\therefore AC=8$，

$\because E$ 是 AC 中点， O 为 BC 的中点

$\therefore CE=\frac{1}{2}AC=4$， $OC=\frac{1}{2}BC=3$

由勾股定理可得： $OE=\sqrt{OC^2+CE^2}=5$

$\because DE$、CE 与⊙O 相切

$\therefore DE=CE$， $\angle CEO=\angle DEO$

又$\because OD=OC$

$\therefore OE$ 垂直平分 CD

$\therefore \angle OFC=\angle FCO+\angle FOC=90°$

又$\because \angle OCE=\angle COE+\angle CEO=90°$

$\therefore \angle OCE=\angle OFC$， $\angle FCO=\angle CEO$

$\therefore \triangle OCF \backsim \triangle OEC$

$\therefore \frac{OC}{OE}=\frac{CF}{EC}$

$\because OC \cdot CE=OE \cdot CF$

$\therefore CF=\frac{OC \cdot CE}{OE}=\frac{12}{5}$

$\therefore OF=\sqrt{OC^2-CF^2}=\frac{9}{5}$

【点睛】此题考查了圆切线的判定与性质，垂直平分线的性质，全等三角形的判定与性质，相似三角形的判定与性质，勾股定理，解题的关键是掌握并灵活利用有关性质进行求解.

27. 在平面直角坐标系 xOy 中，$M\left(a, y_1\right)$，$N\left(a+t, y_2\right)$ 为抛物线 $y=x^2+x$ 上两点，其中 $t>0$.

（1）求抛物线与 x 轴的交点坐标；

（2）若 $t=1$，点 M，N 在抛物线上运动，当 $\left|y_1-y_2\right|=1$ 时，求 a 的值；

（3）记抛物线在 M，N 两点之间的部分为图象 G（包含 M，N 两点），若图象 G 上最高点与最低点的纵坐标之差为 1，直接写出 t 的取值范围.

【27 题答案】

【答案】（1）（0，0），（−1，0）

（2）$-\frac{1}{2}$ 或 $-\frac{3}{2}$

（3）$0<t\leqslant 2$

【解析】

【分析】（1）令 $y=0$，解得 $x_1=0$，$x_2=-1$，即可得到答案；

（2）把 $M\left(a, y_1\right)$，$N\left(a+t, y_2\right)$ 分别代入抛物线 $y=x^2+x$，求出 y_1、y_2 与 a 的关系式，然后代入 $\left|y_1-y_2\right|=1$，即可求得答案；

（3）①当点 M、N 在对称轴同侧时，当点 M、N 均为对称轴的右侧时，即 $a \geq -\frac{1}{2}$，则 $y_2-y_1=t^2+2at+t=1$，进而求解；当点 M、N 均在对称轴左侧时，同理可解；②当点 M、N 在对称轴两侧时，同理可解.

【小问 1 详解】

解：令 $x^2+x=0$，

解得：$x_1=0$，$x_2=-1$，

∴抛物线与 x 轴的交点坐标为：（0，0），（−1，0）；

【小问 2 详解】

解：当$t=1$时，$N(a+1,y_2)$

把$M(a,y_1)$，$N(a+1,y_2)$分别代入抛物线$y=x^2+x$，

得：$y_1=a^2+a$，$y_2=(a+1)^2+a+1=a^2+3a+2$，

$\therefore |y_1-y_2|=|a^2+a-a^2-3a-2|=|-2a-2|$，

当$|y_1-y_2|=1$时，得：$|-2a-2|=1$，

解得：$a=-\frac{1}{2}$或$-\frac{3}{2}$；

【小问 3 详解】

解：由抛物线解析式可知，顶点坐标为$\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$，

①当点M、N在对称轴同侧时，当点M、N均为对称轴　右侧时，即$a\geq-\frac{1}{2}$，

则$y_2-y_1=(a+t)^2+(a+t)-a^2-a=t^2+2at+t=1$，

$\therefore a=\frac{1}{2t}(1-t-t^2)\geqslant-\frac{1}{2}$，

解得：$0<t\leq1$，

当点M、N均在对称轴左侧时，

同理可得：$0<t\leq1$，

$\therefore 0<t\leq1$；

②当点M、N在对称轴两侧时，则最小值为$-\frac{1}{4}$，最大值为y_1或y_2，

当最大值为y_1时，则$y_1-\left(-\frac{1}{4}\right)=1$，

即：$a^2+a+\frac{1}{4}=1$，

解得：$a=-\frac{3}{2}$，

则与点 M 关于抛物线对称轴对称的点的横坐标为 $\frac{1}{2}$，

故点 N 的横坐标 $a+t$ 在 $-\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{2}$ 之间，

即：$-\frac{1}{2}\leqslant t-\frac{3}{2}\leqslant\frac{1}{2}$，

解得：$1\le t\le 2$，

当最大值为 y_2 时，

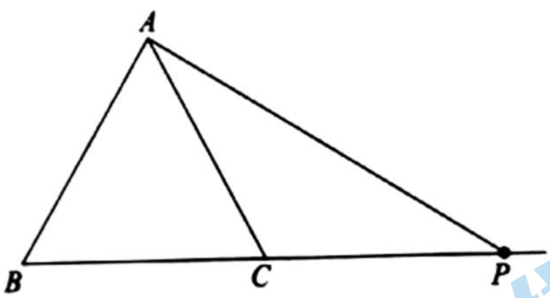
同理可得：$1\le t\le 2$，

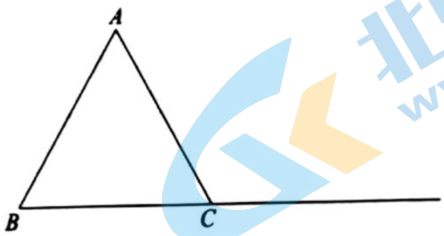
所以 $1\le t\le 2$.

综上所述，若图象 G 上最高点与最低点的纵坐标之差为 1，t 的取值范围是：$0<t\leqslant 2$.

【点睛】本题是二次函数综合题，主要考查了二次函数的图像和性质、解不等式等，解题的关键是掌握二次函数的图像的点的坐标特征和运用分类讨论思想、避免遗漏.

29. ΔABC 是等边三角形，点 P 在 BC 的延长线上，以 P 为中心，将线段 PC 逆时针旋转 n°（$0<n<180$）得线段 PQ，连接 AP，BQ .





备用图

（1）如图，若 $PC=AC$，画出当 $BQ//AP$ 时的图形，并写出此时 n 的值；

（2）M 为线段 BQ 的中点，连接 PM . 写出一个 n 的值，使得对于 BC 延长线上任意一点 P，总有 $MP=\frac{1}{2}AP$，并说明理由.

【29 题答案】

【答案】（1）60°；（2）n=120°，理由见详解.

【解析】

【分析】（1）由ΔABC是等边三角形，得∠BAC=∠ACB=60°，由$PC=AC$，$BQ//AP$，得∠PBQ=∠CPA=30°，$PQ=\frac{1}{2}BP$，进而得到∠BPC=60°，即可求解；

（2）以点 C 为坐标原点，BC 所在直线为 x 轴，建立平面直角坐标系，如图 2，

设点 B（a，0），点 P（x，0），根据坐标系中，中点坐标公式和两点间的距离公式，分别表示出 MP，AP 的长度，即可.

【详解】如图 1，若$PC=AC$，当$BQ//AP$时，n=60°，理由如下：

∵ ΔABC是等边三角形，

∴∠BAC=∠ACB=60°，

∵ $PC=AC$，

∴∠CAP=∠CPA=30°，

∵ $BQ//AP$

∴∠PBQ=∠CPA=30°，

∵ $PQ=PC=AC=BC$，

∴ $PQ=\frac{1}{2}BP$，

∴∠Q=90°，

∴∠BPC=180°-∠Q -∠PBQ =180°-90°-30°= 60°，

∴n=60°；

（2）当 n=120°时，对于BC延长线上任意一点 P，总有$MP=\frac{1}{2}AP$，理由如下：

以点 C 为坐标原点，BC 所在直线为 x 轴，建立平面直角坐标系，如图 2，

设点 B（a，0），点 P（x，0），

∴PQ=PC=x，

∵∠CPQ=120°，

∴∠NPQ=180°-120°=60°,

过点 Q 作 QH⊥x 轴，则 PH=$\frac{1}{2}$x，QH=$\frac{\sqrt{3}}{2}$x,

∴点 Q 坐标为（$\frac{3}{2}x$，$-\frac{\sqrt{3}}{2}x$），

∵点 M 时 BQ 的中点，

∴点 M 的坐标为：$(\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}a,-\frac{\sqrt{3}}{4}x)$

过点 A 作 AE⊥x 轴，则 CE=$\frac{1}{2}$CB，AE=$\sqrt{3}$CE，

∴点 A 坐标为：$(\frac{1}{2}a,-\frac{\sqrt{3}}{2}a)$，

∴AP=$\sqrt{(x-\frac{1}{2}a)^2+\left[0-(-\frac{\sqrt{3}}{2}a)\right]^2}=\sqrt{x^2-ax+a^2}$

MP=$\sqrt{\left[x-(\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}a)\right]^2+\left[0-(-\frac{\sqrt{3}}{4}x)\right]^2}=\sqrt{\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}ax+\frac{1}{4}a^2}=\frac{1}{2}\sqrt{x^2-ax+a^2}$，

即：$MP=\frac{1}{2}AP$．

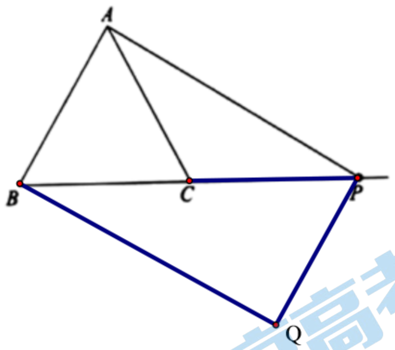


图 1

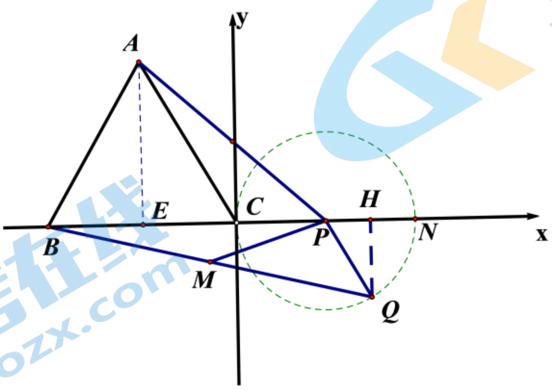


图 2

【点睛】本题主要考查等边三角形和含 30°角的直角三角形的性质，画出图形，建立合适的平面直角坐标系，把几何问题化为代数问题，用数形结合的思想方法，是解题的关键.

30. A,B 是圆上的两个点，点 P 在⊙C 的内部．若 $\angle APB$ 为直角，则称 $\angle APB$ 为 AB 关于⊙C 的内直角，特别地，当圆心 C 在 $\angle APB$ 边（含顶点）上时，称 $\angle APB$ 为 AB 关于⊙C 的最佳内直角．如图1，$\angle AMB$ 是 AB 关于⊙C 的内直角，$\angle ANB$ 是 AB 关于⊙C 的最佳内直角．在平面直角坐标系 xOy 中．

（1）如图2，⊙O 的半径为5，$A(0,-5),B(4,3)$ 是⊙O 上两点．

①已知 $P_1(1,0)$，$P_2(0,3)$，$P_3(-2,1)$，在 $\angle AP_1B,\angle AP_2B,\angle AP_3B,$ 中，是 AB 关于⊙O 的内直角的是______；

②若在直线 $y=2x+b$ 上存在一点 P，使得 $\angle APB$ 是 AB 关于⊙O 的内直角，求 b 的取值范围．

（2）点 E 是以 $T(t,0)$ 圆心，4 为半径的圆上一个动点，⊙T 与 x 轴交于点 D（点 D 在点 T 的右边）．现有点 $M(1,0),N(0,n)$，对于线段 MN 上每一点 H，都存在点 T，使 $\angle DHE$ 是 DE 关于⊙T 的最佳内直角，请直接写出 n 的最大值，以及 n 取得最大值时 t 的取值范围．

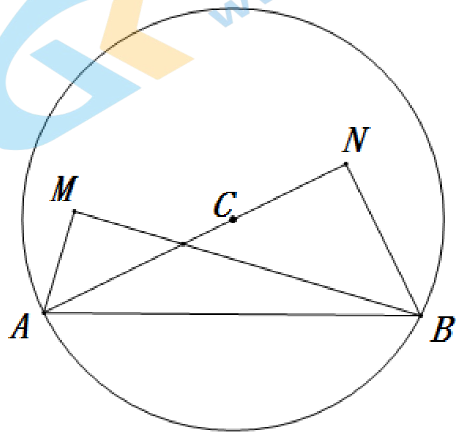


图 1

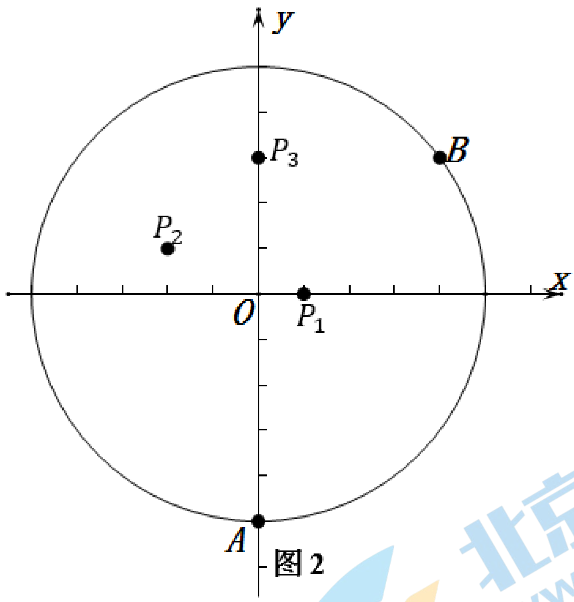


图 2

【30 题答案】

【答案】（1）①$\angle AP_2B,\angle AP_3B$，②$-5<b\le 5$；（2）2，$-\sqrt{5}-1\le t<5$

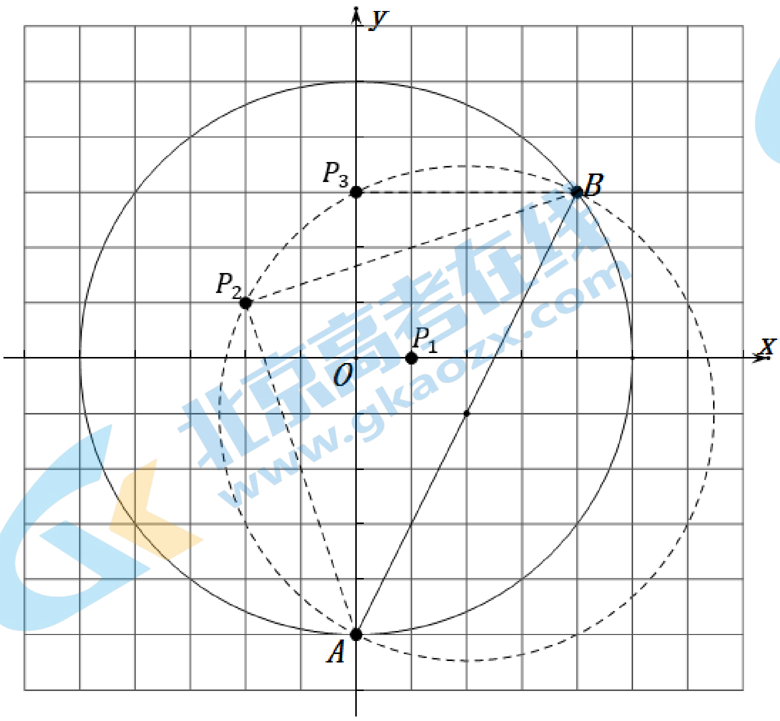
【解析】

【分析】（1）判断点 P_1,P_2,P_3 是否在以 AB 为直径的圆弧上即可得出答案；

（2）求得直线 AB 的解析式，当直线 $y=2x+b$ 与弧 AB 相切时为临界情况，证明 $\Delta OAH\sim\Delta BAD$，可求出此时 $b=5$，则答案可求出；

（3）可知线段 MN 上任意一点（不包含点 M）都必须在以 TD 为直径的圆上，该圆的半径为 2，则当点 N 在该圆的最高点时，n 有最大值 2，再分点 H 不与点 M 重合，点 M 与点 H 重合两种情况求出临界位置时的 t 值即可得解.

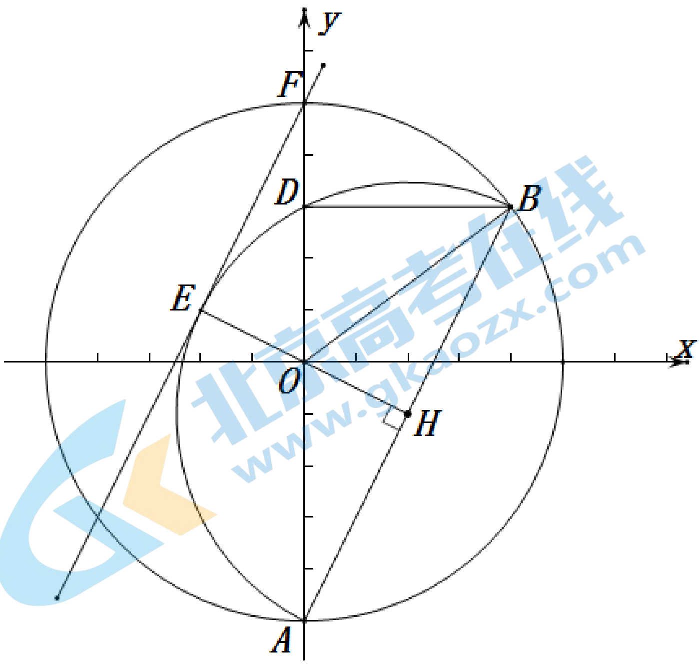
【详解】解：（1）如图1，点 P_2, P_3 在以 AB 为直径的圆上，所以 $\angle AP_2B, \angle AP_3B$ 是 AB 关于 $\odot O$ 的内直角。



（2）$\because \angle APB$ 是 AB 关于 $\odot O$ 的内直角，

$\therefore \angle APB = 90°$，且点 P 在 $\odot O$ 的内部，

$\therefore$ 满足条件的点 P 形成的图形为如图中的半圆 H（点 A, B 均不能取到），



过点 B 作 $BD \perp y$ 轴于点 D，

$\because A(0,-5), B(4,3)$，

$\therefore BD=4, AD=8$，

并可求出直线 AB 的解析式为 $y=2x-5$，

$\therefore$ 当直线 $y=2x+b$ 与直径 AB 重合时，$b=-5$，

连接 OB，作直线 OH 交半圆于点 E，过点 E 作直线 $EF // AB$，交 y 轴于点 F，

$\because OA=OB, AH=BH$

$\therefore EH \perp AB$

$\therefore EH \perp EF$

$\therefore EF$ 是半圆 H 的切线.

$\because \angle OAH=\angle OAH, \angle OHB=\angle BDA=90°$

$\therefore \Delta OAH \sim \Delta BAD$

$\therefore \frac{OH}{AH}=\frac{BD}{AD}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

$\therefore OH=\frac{1}{2}AH=\frac{1}{2}EH$

$\therefore OH=EO$

$\because \angle EOF=\angle AOH, \angle FEO=\angle AHO=90°$

$\therefore \Delta EOF \cong \Delta HOA$

$\therefore OF=OA=5$

$\because EF // AB$, 直线 AB 的解析式为 $y=2x-5$，

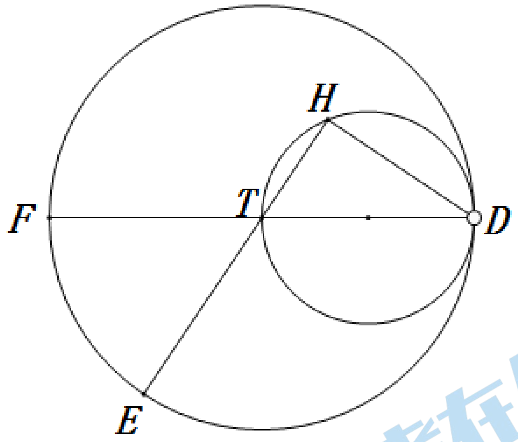
$\therefore$ 直线 EF 的解析式为 $y=2x+5$，此时 $b=5$，

$\therefore b$ 的取值范围是 $-5<b\le 5$.

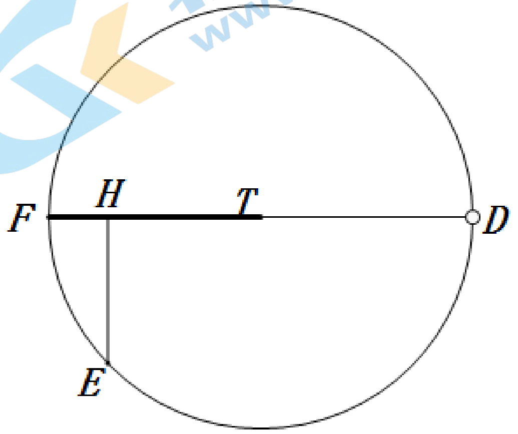
这一问难度陡然提升，而且之前的经验似乎有些浅显，需要进一步通过画图加深对题干部分的理解并在此过程中探究解题的方向，下面我们通过三步来划分思维的流程。

第一步：分析最佳内直角满足的条件，确定 H 的轨迹

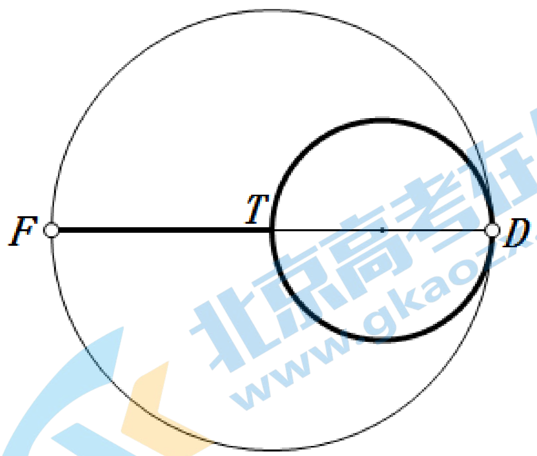
显然，最佳内直角为直角，而且直角的一条边经过圆心 T ，因此，不难得出以 TD 为直角的圆上的点(不包括点 D ）均满足条件。



另外，如果点 H 在圆 T 的水平方向的半径上，也满足条件



综上，我们得出满足条件的点 H 的轨迹，需要注意，最佳内直角的顶点在圆 T 的内部，因此，圆 T 上的两个点 D、F 均是空心点。



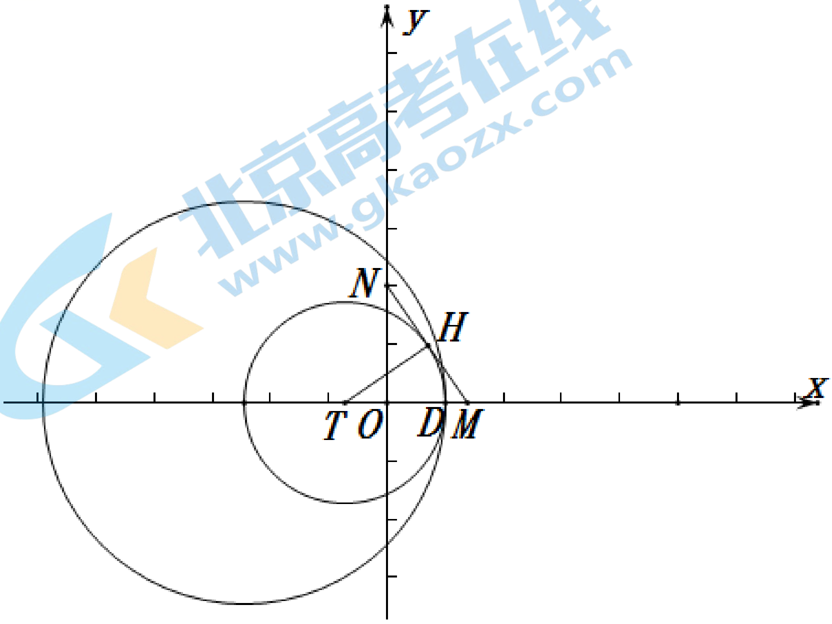
第二步，分析线段 MN 的端点 N 的位置

既然 MN 上的每一点都可以成为最佳内直角的直角顶点，那么 MN 一定与第一步得出的点的轨迹有交点，显然，当点 N 经过以 TD 为直径的圆的最高点时，n 取最大值，因此 TD，所以，$n=2$，即 n 的最大值为 2.

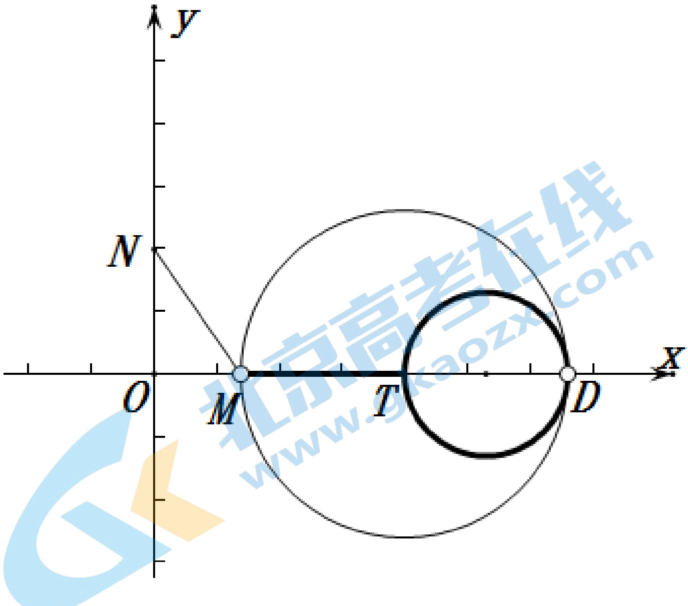
第三步，求圆心 T 的取值范围

这里需要再次理解题意：当 $n=2$，且当点 H“遍历”线段 MN 上的每一点时，对应的圆心的取值范围是什么？此时，问题回归到传统的动态问题分析上来，借助动态问题的分析原则分析如下：

当圆从左到右运动过程中，第一个临界值出现在点 H 的轨迹与线段 MN 相切时。如图所示，不难求出 $t=-\sqrt{5}-1$



当圆继续向右运动，如图所示，当点 H 点轨迹点水平部分经过点 M 时，此时为第二个临界位置，此时，很容易得出 $t=5$



综合以上可得，t 的取值范围是 $-\sqrt{5}\text{-}1\le t<5$.

【点睛】本题是圆的综合题，考查了一次函数图象上点的坐标特征，直角三角形的性质，圆周角定理，勾股定理，相似三角形的判定与性质，全等三角形的判定与性质等知识，利用数形结合的思想，正确理解最佳内直角的意义是解本题的关键.